

УДК 539.374

## ТРЕХЧЛЕННОЕ СООТНОШЕНИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ<sup>1</sup>

ЛЕНСКИЙ В. С., ЛЕНСКИЙ Э. В.

Для произвольного упругопластического процесса деформации предложено соотношение, означающее компланарность пятимерных векторов напряжений, скорости напряжений и скорости деформации. С использованием гипотезы локальной определенности выяснена структура коэффициентов. Получено экспериментальное подтверждение гипотезы компланарности в опытах [1], программированных в трехмерном пространстве вектора деформации. Установлена замкнутая система дифференциальных соотношений между углами ориентации вектора напряжений в репере Френе. Анализ экспериментальных данных показал возможность определения универсальной функции, входящей в исследуемое соотношение, по данным опытов по двухзвенным траекториям деформации.

1. Общее соотношение теории упругопластических процессов А. А. Ильюшина [2]  $\sigma = \sigma_u \cos \vartheta_i p_i$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ ) содержит скалярный функционал  $|\sigma| = \sigma_u \{\kappa_m\}$  и функционалы векторных свойств  $\vartheta_i \{\kappa_m\}$ , определяющие ориентацию вектора напряжений  $\sigma$  в сопровождающем репере Френе  $p_n$  траектории деформации и связанные тождественным соотношением  $\cos \vartheta_i \cos \vartheta_j = 1$ , где  $\kappa_m$  — кривизны траектории, определенные как функции длины дуги  $s$ . Установление аналитической структуры этих функционалов — задача сложная. К возможным путям преодоления этих трудностей относятся сокращение числа независимых функционалов (нахождение аналитических зависимостей между ними) и установление их свойств, вследствие которых возможно их представление, например как общих решений дифференциальных уравнений, содержащих экспериментально определяемые функции.

На основании анализа опытных данных была высказана гипотеза локальной определенности [3, 4], согласно которой функционалы  $\vartheta_n$  представляются как общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений  $\vartheta_n' = f_n(\vartheta_m, \kappa_k, \sigma_u)$  ( $m, n=1, 2, \dots, 5; k=1, 2, 3, 4$ ), причем в точке излома траектории  $s_0$  значения  $\kappa_k$  определяются, как  $\kappa_k(s_0+0)$  (точка в индексе означает производную по  $s$  ( $\vartheta' = d\vartheta/ds$ )). В последующем эта гипотеза подтверждена опытами различных авторов по плоским и трехмерным траекториям деформации (см., например, [3–7]).

С учетом этой гипотезы высказано предположение о компланарности векторов  $p_i = e^i$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma'$ , т. е. о возможности представления зависимости между девиаторами деформации и напряжений при произвольном сложном нагружении в форме [3, 8]:

$$e^i = A\sigma^0 + B\sigma'^0, \quad \sigma^0 = \sigma/\sigma_u, \quad \sigma'^0 = d\sigma^0/ds \quad (1.1)$$

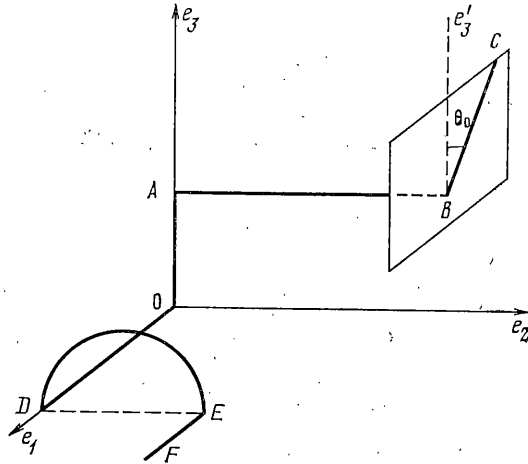
где  $\sigma^0$  — единичный вектор напряжений,  $\sigma'^0$  — неединичный вектор. Недостаток опытных данных не позволил в то время обосновать приемлемость этого предположения.

<sup>1</sup> Работа была доложена 23 февраля 1983 г. на заседании научно-исследовательского семинара по теории упругости и пластичности. См.: Вестн. МГУ. Матем. и механ., 1984, № 2, с. 94.

2. По определению,  $\cos \vartheta_1 = \sigma^0 \mathbf{p}_1$ . Продифференцировав это равенство по  $s$ , с учетом формулы Френе  $\mathbf{p}_1 \dot{=} \kappa_1 \mathbf{p}_2$  и равенства  $\mathbf{p}_2 \sigma^0 = \cos \vartheta_2$  получим

$$\dot{\vartheta}_1 = L_1 - \kappa_1 \cos \vartheta_2 / \sin \vartheta_1, \quad L_1 = -\sigma^0 \mathbf{p}_1 / \sin \vartheta_1 \quad (2.1)$$

Здесь  $L_1$  — мгновенная скорость поворота  $\sigma$  в направлении  $\mathbf{p}_1$ , причем согласно гипотезе локальной определенности  $L_1$  является функцией локальных переменных, т. е. текущих значений  $\vartheta_m$ ,  $\sigma_u$  (и, может быть,  $\dot{\vartheta}_m$ ,  $\dot{\sigma}_u$ ), но не  $\kappa_m$ .



При помощи  $\sigma^0 \sigma^0 = 0$ ,  $\mathbf{e}^* = \mathbf{p}_1$  и определения (2.1) преобразуем равенство (1.1) к виду

$$\mathbf{e}^* = \cos \vartheta_1 \sigma^0 - \sin \vartheta_1 \sigma^0 / L_1 \quad (2.2)$$

Если учесть, что  $\dot{\sigma}^* = \sigma_u \dot{\sigma}^0 + \sigma_u \sigma^0$ , то из (2.2) получаем соотношение

$$\dot{\mathbf{e}}^* = [\cos \vartheta_1 + \sigma_u \sin \vartheta_1 / (\sigma_u L_1)] \sigma / \sigma_u - \sin \vartheta_1 \dot{\sigma}^0 / (\sigma_u L_1) \quad (2.3)$$

для конкретизации которого применительно к произвольному упруго-пластическому процессу надо определить функционалы  $\sigma_u$  и  $\vartheta_1$  и функцию  $L_1$ .

Равенства (1.1), (2.2), (2.3) можно трактовать как следующее утверждение: если  $\sigma_A$  — вектор напряжений в точке  $A$  траектории сложной деформации  $OA$  и  $\mathbf{p}_0$  — единичный вектор прямолинейной траектории  $AB$ , то текущий вектор  $\sigma$  на  $AB$  лежит в плоскости  $(\sigma_A, \mathbf{p}_0)$ .

Для проверки этого утверждения используем опыты из [4], в которых тонкостенный трубчатый образец из отожженной малоуглеродистой стали S15C испытывался на машине 1S-10TS фирмы Шимазу — Сейсакуто по программным траекториям деформации в виде ортогональных трехзвенных ломаных при совместном осевом растяжении, кручении и внутреннем давлении (фигура). На фигуре приняты обозначения:  $e_1 = e_{11}$ ,  $e_2 = (e_{22} - e_{33}) / \sqrt{3}$ ,  $e_3 = 2e_{12} / \sqrt{3}$ , где  $e_{ij}$  — девиатор деформации. Каждый образец закручивался до  $e_3 = 2\%$  (звено  $OA$ ). Затем в трех сериях испытаний образцы при постоянных значениях  $e_1 = 0$ ,  $e_3 = 2\%$  доводились до деформаций  $e_2 = 0,25, 0,5$  и  $1\%$  соответственно (звено  $AB$ ). Для индивидуальных серий испытаний третье звено траектории  $BC$  при  $e_2 = \text{const}$  составляло углы  $\theta_0$  с осью  $e_3$ , равные  $0, 30, 60, 90, 120, 150$  и  $180^\circ$ .

По таблицам численных результатов экспериментов определялось направление нормали  $\mathbf{v}$  к плоскости  $(\sigma_B, BC)$  и вычислялся угол  $\varphi + \pi/2$  между  $\mathbf{v}$  и текущим вектором  $\sigma$  на  $BC$ . Если соотношение (1.1) верно, то  $\varphi = 0$ .

В табл. 1 приведены средние арифметические значения  $\varphi_0$  (каждое по 30 опытными значениям) при разных  $\theta_0$  и  $e_2 = \text{const}$  для значений  $\Delta s$  до  $2\%$  на третьем звене (первые строчки), а также наибольшие  $\varphi_{\text{max}}$  (вторые

Таблица 1

$s_1$	$\theta_0=30$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$
0,25%	+0,2	-2,0	+0,8	+0,5	+0,8
	+3,7	+0,3	+2,4	+5,1	+3,5
	-2,6	-4,6	-1,2	-3,5	-1,9
0,5%	+0,3	-0,8	-1,2	+1,9	0
	+5,1	+2,3	+0,3	+3,5	+2,9
	-1,9	-2,5	-2,5	0	-2,6
1,0%	-0,3	+0,3	-0,4	+0,8	+3,7
	+4,3	+3,8	+0,2	+5,1	+7,4
	-2,8	-1,4	-1,4	-4,1	0

строчки) и наименьшие  $\varphi_{\min}$  (третьи строчки) значения, характеризующие ширину полосы разброса опытных данных.

Ниже те же величины приведены для прямолинейного третьего звена (по 57 и 76 опытным точкам) в опытах 1НС и 2НС ( $s_1=1,64\%$ ) с образцами из нержавеющей стали ( $C=0,08$ ,  $Si=0,40$ ,  $Mn=0,50$ ,  $P=0,033$ ,  $S=0,026$ ,  $Ni=8,39$ ,  $Cr=18,35$ ) по программе (фигура): прямая  $OD$  ( $e_2=e_3=0$  до  $e_1=0,53\%$ ); полуокружность  $DE$  радиуса  $0,35\%$  в плоскости  $e_1=const$ ; прямая  $EF$  ( $e_2=0,7\%$ ,  $e_3=0$  до  $\Delta s=1,3\%$  в опыте 1НС и  $2,3\%$  в опыте 2НС):

$\varphi_0$	$\varphi_{\max}$	$\varphi_{\min}$	$\varphi_0$	$\varphi_{\max}$	$\varphi_{\min}$
+0,4	+3,5	-2,2	-0,9	+0,6	-2,6

Видно, что отклонения  $\varphi$ , как правило, имеют характер естественного разброса опытных данных в допустимых пределах. Таким образом, приведенные опытные данные свидетельствуют о приемлемости соотношения (1.1) не только для плоской траектории деформации (что очевидно) или для бесконечно малого процесса после простой деформации [2], но и для конечного интервала сложного нагружения<sup>2</sup>.

3. Установим соотношения между функционалами ориентации  $\varphi_n$ . Дифференцируя равенство (определение)  $\cos \vartheta_\alpha = \sigma^0 p_\alpha$  и пользуясь формулами Френе [2], вводим функции локальных переменных

$$L_\alpha = -\sigma^0 p_\alpha / \sin \vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha' + (\kappa_\alpha \cos \vartheta_{\alpha+1} - \kappa_{\alpha-1} \cos \vartheta_{\alpha-1}) / \sin \vartheta_\alpha \quad (3.1)$$

$$(\alpha=2, 3, 4, 5; \kappa_5=0, \vartheta_6=\pi/2)$$

аналогичные функции  $L_1$  в равенстве (2.1). Умножив обе части равенства (2.2) на  $p_\alpha$ , приходим к соотношениям

$$L_\alpha \operatorname{tg} \vartheta_\alpha = -L_1 \operatorname{ctg} \vartheta_1 \quad (3.2)$$

Эти равенства, в которых  $L_\alpha$  рассматриваются как обозначения (2.1), (3.1), представляют систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, выражающих  $\vartheta_\alpha$  ( $\alpha=2, 3, 4, 5$ ) через  $\vartheta_1$ . Кроме того, согласно гипотезе локальной определенности, имеет место уравнение (2.1), в котором  $L_1$  — универсальная для каждого данного материала функция локальных переменных.

Таким образом, для определения углов ориентации  $\vartheta_n$  имеется замкнутая система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, не содержащих неопределенную величину  $\sigma_n$ . Для ее решения требуется знание аналитической конструкции функции  $L_1$  в (2.1).

4. Если предположить, что  $L_1$  не зависит от  $\vartheta_\alpha$  ( $\alpha > 1$ ), то для определения конструкции этой функции достаточно опытов по двухзвенным

<sup>2</sup> Ленский В. С. О структуре соотношений общей теории пластичности. VIII Всес. конф. по прочности и пластичности. Тез. докл. Пермь: 1983, с. 100–101.

$\Delta s=0,01$	0,03	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
85,5	78,8	72,0	57,1	44,7	36,2	24,0	18,1	13,2
85,5	78,5	71,8	56,9	44,5	36,3	24,5	16,8	12,4

траекториям деформации. Действительно, для второго звена ломаной, на котором  $\kappa_m=0$ , уравнение (2.1) принимает вид

$$\dot{\varphi}_1 = L_1(\varphi_1, \sigma_u) \quad (4.1)$$

Решения этого дифференциального уравнения исследовались без учета зависимости  $L_1$  от  $\sigma_u$  (что допустимо в ограниченном диапазоне изменения длины дуги), причем даны рекомендации об аналитических аппроксимациях функции  $L_1(\varphi_1)$ , удовлетворительно описывающих экспериментальные данные (см., например, [4, 10]).

Для проверки утверждения (4.1) исходную информацию дают опыты, в которых исследуемому прямолинейному участку траектории деформации  $AB$  предшествует траектория сложной деформации  $OA$ , так что значения углов  $\varphi_\alpha$  ( $\alpha > 1$ ) ориентации направления  $AB$  в репере, определенном в точке  $A$  траектории  $OA$ , имеют различные значения.

В рассмотренных опытах из [1] в каждой серии с  $e_2 = \text{const}$  различно направленным третьим звеньям  $BC$  предшествует одна и та же траектория сложной деформации  $OAB$ . Следовательно, сравнение изменения  $\varphi_1$  на втором звене траектории  $AB$  с изменением  $\varphi_1$  на третьем звене  $BC$  дает материал для проверки утверждения (4.1).

В табл. 2 в первой строке приведены среднеарифметические значения  $\varphi_1$  (в градусах) для нескольких значений  $\Delta s = s - s_0$  (в процентах), где  $s_0 = OA$ , а во второй строке — среднеарифметические значения  $\varphi_1$  для таких же значений  $\Delta s = s - s_1$ , где  $s_1 = OAB$ , по данным для всех третьих звеньев при всех трех значениях  $e_2$  в точке  $B$ .

При этом анализе использовался прием, основанный на гипотезе локальной определенности [4]: для углов излома траектории деформации, отличных от  $90^\circ$ , график  $\varphi_1 \sim \Delta s$  смещался как целое по оси  $\Delta s$  до совпадения начального значения  $\varphi_1$  с соответствующим значением на графике  $\varphi_1 \sim \Delta s$ , полученном при угле излома  $90^\circ$ .

Близость соответствующих значений  $\varphi_1$  в табл. 2 (разности во много раз меньше ширины полосы естественного разброса опытных данных) свидетельствует о допустимости сделанного предположения (4.1).

Поскольку вопрос об определении  $\varphi_1$  и  $L_1$ , входящих в соотношение (2.3), а затем и других углов ориентации решается не только в принципе, но и практически, для конкретизации соотношения (2.3) остается решить трудную задачу об определении функционала  $\sigma_u$ . При некоторых допущениях, нуждающихся в экспериментальной проверке, показано [11], что функционал  $\sigma_u$  может быть определен так же, как общее решение обыкновенного дифференциального уравнения вида  $f(\sigma_u, \sigma_u, \varphi_1, \dot{\varphi}_1) = 0$  или системы дифференциальных уравнений относительно  $\sigma_u$  и  $\varphi_1$ .

Авторы признательны профессору И. Охашу (Нагойский университет, Япония) за реализацию согласованных программ испытаний и предоставление численных результатов экспериментов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ohashi Y., Tanaka E. Plastic deformation behavior of mild steel along orthogonal trilinear strain trajectories in three-dimensional vectors space of strain deviator. — Trans. ASME. J. Engng. Mater. Technol., 1981, v. 103, p. 287–292.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.

3. *Ленский В. С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций.— В кн.: Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 58—82.
4. *Ленский В. С.* Гипотеза локальной определенности в теории пластичности.— Изв. АН СССР. ОТН. Механ. и машиностр., 1962, № 5, с. 154—158.
5. *Дао Зуй Бин.* Экспериментальная проверка упрощенных вариантов теории пластичности.— Вестн. МГУ. Матем. и механ., 1966, № 1, с. 107—117.
6. *Ohashi Y., Kurita Y., Suzuki T., Tokuda M.* Experimental examination of the hypothesis of local determinability in the plastic deformation of metals.— J. Mech. Phys. Solids, 1978, v. 29, p. 51—67.
7. *Охаша И., Токуда М., Курита И., Сузуки Т.* Некоторые экспериментальные данные об общем законе пластичности Ильюшина.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 6, с. 53—64.
8. *Ленский В. С.* Упрощенные варианты теории пластичности.— Прикл. механ., 1969, т. 5, вып. 3, с. 18—22.
9. *Малый В. И.* Об упрощении функционалов теории упругопластических процессов.— Прикл. механ., 1978, т. 14, № 2, с. 48—53.
10. *Ермаков С. В.* Исследование постановки краевой задачи теории упругопластических процессов средней кривизны.— Вестн. МГУ. Матем. и механ., 1982, № 2, с. 88—92.

Москва

Поступила в редакцию  
10.V.1984