

УДК 539.3

**ПРИНЦИП ПОДОБИЯ НАГРУЖЕНИЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОПРЕДЕЛИМОСТЬ
ПОСЛЕДУЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТЕКУЧЕСТИ
ПОСЛЕ ПРОСТОГО НАГРУЖЕНИЯ**

МАНСУРОВ Р. М.

Известно, что ассоциированный закон пластического течения полностью определяется заданием поверхности (функции) текучести, и поэтому определение последующих поверхностей текучести f в процессе пластического деформирования является актуальной проблемой теории течения первоначально изотропных тел. Экспериментальное изучение f ограничивается, в основном, случаем простого нагружения. Каждая экспериментальная поверхность текучести f_0^δ строится по заранее выбранному постоянному допуску δ , определяющему величину отклонения опытных данных от линейного закона Гука. В результате получается целый слой поверхностей f_0^δ , построенных при различных допусках (в связи с этим возникло представление, что говорить о поверхности f без указания допуска лишено смысла).

Наличие слоя f_0^δ конечной толщины не позволяет оценить приемлемость какой-либо гипотезы относительно f (для выяснения причины плохого описания сложного нагружения известными вариантами теории течения), так как отсутствует критерий однозначного выбора f из слоя f_0^δ . Поэтому неизвестно, какую f из слоя f_0^δ можно принять за более подходящую (более «точную») и как осуществить выбор этой поверхности f из слоя f_0^δ , которая не обязана, вообще говоря, совпадать ни с одной f_0^δ постоянного допуска; экспериментальный метод построения f при постоянном δ вызывает естественное возражение, так как первоначально изотропное поликристаллическое тело подвергается направленному воздействию ε_{ij} (ε_{ij} — пластические деформации, $\varepsilon_{ii}=0$).

Решить вопрос о выборе f экспериментальным путем пока невозможно (экспериментально достаточно точно можно определить положение только одной точки f — точки предварительного простого нагружения).

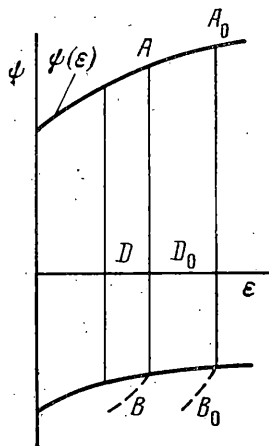
В публикуемой работе предлагается метод теоретического определения f после простого нагружения (как необходимый шаг для исследования сложного нагружения) по двум экспериментальным функциям одной переменной $\psi(\varepsilon)$ и $z(\pi/2, \varepsilon)$, которые слабо зависят от величины допуска δ и поэтому считаются не зависящими от δ .

1. Согласно постулату изотропии [1], все лучи простого нагружения эквивалентны, и поэтому будем считать, что необходимые экспериментальные функции определены из опыта на кручение. На фиг. 1 изображены (без учета упругой деформации) кривые кручения $\psi(\varepsilon)$ и эффекта Баушингера $\varphi(\varepsilon)$ (φ — половина упругого интервала), где $\varepsilon = \varepsilon_u = (\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})^{1/2} = 2^{1/2}\varepsilon_{12}$. Эти функции служат входными данными в известной изотропно-трансляционной теории течения, где поверхностью текучести f , по предположению, является сфера радиуса φ .

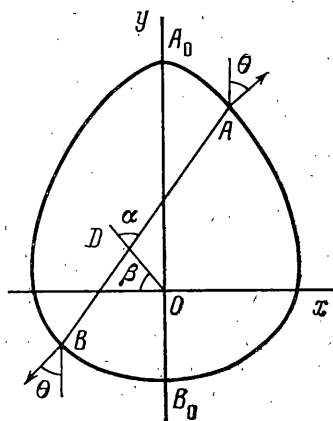
Нагружения, при которых определяются входные данные для какой-либо теории, назовем базовыми нагружениями этой теории. Характерные особенности реакции материала в базовых нагружениях изотропно-трансляционной теории течения можно представить соотношениями (см. фиг. 1):

$$DA = \psi(\varepsilon), AB = 2\varphi(\varepsilon), \gamma_{ij}|_D = 0, d\varepsilon_{ij}^0|_{A(B)} = \gamma_{ij}^0|_{A(B)}, d\varepsilon_{ij}^0|_B = -d\varepsilon_{ij}^0|_A \quad (1.1)$$

где $d\varepsilon_{ij}$ — приращения пластических деформаций, $\gamma_{ij} = e_{ij} - \varepsilon_{ij}$ — девиатор линейно-упругих деформаций; величины с индексом нуль означают направляющие тензоры, а точки A , B и D указаны на фиг. 1.



Фиг. 1



Фиг. 2

В изотропно-трансляционной теории течения используются количественные данные ψ и φ при описании других (небазовых) нагружений, а остальные условия из (1.1), при которых получены эти данные, не используются. Эти условия тождественно выполняются в базовых нагружениях, а в небазовых — не выполняются, если специально не потребовать этого. Ниже будет показано, что применение всех соотношений (1.1) ко всем описываемым нагружениям внутри f , которые оканчиваются возможным (но недействительным) малым выходом за f , определяет поверхность f . Поэтому становится излишним постулирование вида f , как это делается в изотропно-трансляционной теории течения из-за неиспользования указанных выше трех условий. В дальнейшем сильно зависящая от δ функция $\varphi(\epsilon)$ будет заменена другой независящей от δ функцией $z(\pi/2, \epsilon)$.

Одним из основных методов механики деформируемых сред является обобщение (присвоение) характерных особенностей реакции материала, выявленных в простейших экспериментах (в базовых нагружениях), на другие нагружения (класс нагружений) в предположении, что происходящие во всех этих нагружениях физические процессы эквивалентны, подобны.

Все такие особенности можно представить в виде соответствующих математических соотношений (как это сделано в (1.1)). Эти соотношения являются условиями физического подобия базовых и описываемых теорией нагружений. Выполнение этих условий подобия для всех описываемых нагружений представляется необходимым как минимальное требование для физической достоверности применяемой теории. Учитывая важность этого обстоятельства, можно ввести понятие принципа подобия нагружений (который представляется условиями подобия нагружений) и говорить о выполнении или невыполнении этого принципа в какой-либо теории. Например, в изотропно-трансляционной теории течения принцип подобия не выполнен, так как последние три условия из (1.1) не использованы. Так обстоит дело и в других вариантах теории течения, кроме трансляционной теории (f — сфера постоянного радиуса) для тел с линейным упрочнением [2], когда соотношения (1.1) выполняются тождественно при любых нагружениях (об этом см. ниже).

Таким образом, применение всех условий (1.1) к описываемым теорией нагружениям не является произвольной гипотезой, а с необходимостью следует из указанного основного метода механики.

Принцип подобия нагружений не противоречит постулату изотропии и не является его следствием, так как он включает в класс подобных не только начинающиеся с нуля нагружения, но не включающие нуля части

траектории нагружения (см. далее). Поэтому возможно совместное применение их для решения тех или иных всё еще многочисленных проблем теории пластичности. Перейдем к непосредственному построению f .

Для удовлетворения последних двух условий из (1.1) воспользуемся известным законом градиентальности, хотя возможно использование любого другого закона течения.

Согласно постулату изотропии, после простого нагружения f является поверхностью вращения около луча этого нагружения [1]. Следовательно, подлежит определению плоская замкнутая выпуклая кривая.

На фиг. 2 изображена искомая кривая — осевое сечение f . Согласно тому же постулату изотропии, форма и размеры кривой f не зависят от ориентации луча простого нагружения. Поэтому в качестве предварительного нагружения выберем пластический сдвиг $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{i1} \delta_{j2}$. Направление этого вектора ε_{ij} на фиг. 2 совпадает с направлением по оси y .

Пусть A — произвольная точка на f с нормалью n_a . На обратной стороне f найдется точка B с нормалью $n_b = -n_a$. Каждый такой отрезок AB характерен тем, что векторы $d\varepsilon_{ij}$ в концевых точках этого отрезка направлены в противоположные стороны. Такой выбор отрезка AB позволит сопоставлять это многоосное нагружение с его аналогом при одноосном (базовом) нагружении AB (фиг. 1) и даст возможность удовлетворить последнему условию из (1.1).

Введем для удобства специальную полярную систему координат (фиг. 2): β — независимая переменная, $z(\beta) = OD$, $\alpha(\beta)$ — угол между прямыми OD и DA , $\theta(\beta)$ — угол между векторами ε_{ij} и n_a . Согласно (1.1), положим $DA = \psi(\varepsilon)$, $AB = 2\varphi(\varepsilon)$, где $\varepsilon = \varepsilon(\theta)$. Тогда для любого β , если известны величины z , α , θ , ε , при известных ψ и φ можно однозначно определить положение точек A и B искомой кривой f (см. фиг. 2). Очевидно, эти четыре неизвестные функции зависят еще от $\varepsilon_u = (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij})^{1/2} = 2^{1/2} \varepsilon_0$ как от параметра. В силу симметрии f относительно оси y достаточно ограничиться областью $0 \leq \beta \leq \pi/2$, тогда и $0 \leq \theta \leq \pi/2$. При $\beta = 0$ имеем $z = 0$, $\theta = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, а $\alpha = \pi/2$. При этом точки A , B и D переходят в точки A_0 , B_0 , D_0 (на фиг. 2 точка D_0 совпадает с началом координат), соответствующие аналогичным точкам на фиг. 1.

В дальнейшем будет видно, что для построения кривой f значение функции $\varepsilon(\theta)$ не потребуется. Однако следует отметить, что $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, т. е. при построении f используются все значения функций ψ и φ в этом интервале. Это является следствием отказа от предположения $\varepsilon = \text{const}$, которое неявно принимается в изотропно-трансляционной теории течения как следствие допущения, что f — сфера, т. е. $\varphi(\varepsilon) = \text{const}$ (φ — радиус сферы). Теперь перейдем к определению трех неизвестных функций: z , α , θ .

2. Внутри f имеет место закон Гука $e_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl}$, где [1, 3] (для случая простого нагружения):

$$C_{ijkl} = \Phi_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \Phi_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \Phi_3 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (\Phi_k = \Phi_k(\varepsilon_u)) \quad (2.1)$$

Пусть точка напряжений $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$ движется по отрезку AB (фиг. 2). Тогда имеем $s_{ij} = s'_{ij} + s''_{ij}$, где вектор s' изображается отрезком OD с началом в нулевой точке, а вектор s'' с началом в точке D направлен по прямой AB . Имеем $\gamma_{ij} = \gamma'_{ij} + \gamma''_{ij}$, где $\gamma'_{ij} = C_{ijkl} s'_{kl}$, $\gamma''_{ij} = C_{ijkl} s''_{kl}$. При этом направляющий тензор $\gamma''_{ij} = \text{const}$ и в точке D имеет место $\gamma''_{ij} = 0$. Таким образом, вектор γ''_{ij} ведет себя так же, как и вектор γ_{ij} при базовом нагружении внутри упругого интервала AB (фиг. 1). Следовательно, для сохранения физического смысла второго и третьего условий в (1.1) при небазовом (многоосном) нагружении эти условия нужно заменить условиями

$$\gamma''_{ij}|_D = 0, \quad d\varepsilon_{ij}|_{A(B)} = \gamma''_{ij}|_{A(B)} \quad (2.2)$$

Для определения угла $\alpha(\beta)$ между векторами упругих напряжений s' и s'' (фиг. 2) нужно знать C_{ijkl} и задавать взаимную ориентацию соответ-

ствующих им векторов упругих деформаций γ' и γ'' (вектор γ' уже выбран, так как $|s'|=OD$). В базовых нагружениях $\gamma'=0$ (так как $s'=0$), $\gamma''=\gamma$, и поэтому всегда $\gamma_{ij}'\gamma_{ij}''=0$ независимо от $|\gamma''|$. В многоосном нагружении AB (фиг. 2) имеем $s'=\text{const}$, т. е. $\gamma'=\text{const}$. Следовательно, для сохранения условия $\gamma_{ij}'\gamma_{ij}''=0$ достаточно принять обычное разложение вектора γ на две ортогональные составляющие γ' и γ'' .

Из фиг. 2 видно, что $s_{ij}'s_{ij}''=|s'| |s''| \cos \alpha$, $\varepsilon_{ij}s_{ij}'=|\varepsilon| |s'| \sin \beta$, $\varepsilon_{ij}s_{ij}''=|\varepsilon| |s''| \sin(\alpha+\beta)$. Поэтому из условия $\gamma_{ij}'\gamma_{ij}''=0$ с помощью закона Гука и (2.1) нетрудно получить

$$\text{tg } \alpha = -2(1+n \sin^2 \beta) / (n \sin 2\beta) \quad (2.3)$$

$$n = 0,25 \varepsilon_u^2 \Phi_3 (\varepsilon_u^2 \Phi_3 + 4 \Phi_2) / \Phi_2^2 \quad (2.4)$$

Первое условие из (2.2) уже использовано при построении вектора s'' . Теперь воспользуемся вторым условием из (2.2) и определим функцию $\theta(\beta)$. Для этого в качестве искомого осевого сечения поверхности вращения f выберем сечение, определяемое напряжениями $\sigma_{11}=-\sigma_{22} \neq 0$, $\sigma_{12} \neq 0$ (остальные $\sigma_{ij}=0$). Это сечение характерно тем, что как γ_{ij} , так и $d\varepsilon_{ij}$ принадлежат к одной и той же плоской деформации, что и предварительный пластический сдвиг $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_0 \delta_{i1} \delta_{j2}$. Поэтому каждый из сдвигов γ_{ij}'' и $d\varepsilon_{ij}$ сводится к соответствующему одному главному сдвигу и, следовательно, второе условие в (2.2) означает только условие совпадения направлений этих двух главных сдвигов.

Для этого сечения f имеем $\sigma_{11}''=-\sigma_{22}'' \equiv \sigma \neq 0$, $\sigma_{12}'' \equiv \tau \neq 0$, и поэтому $\gamma_{11}''=-\gamma_{22}''=2\Phi_2 \sigma$, $\gamma_{12}''=2(\Phi_2+\varepsilon_0^2 \Phi_3) \tau$ ($\varepsilon_u=2^{1/2} \varepsilon_0$). На фиг. 2 по оси x отложим σ , а по оси y — τ . Тогда $\sigma=|s''| \cos(\alpha+\beta)/2^{1/2}$, $\tau=|s''| \sin(\alpha+\beta)/2^{1/2}$. Но с учетом (2.3) можно получить $\sin(\alpha+\beta)=p^{-1/2} \cos \beta$, $\cos(\alpha+\beta)=- (1+n)p^{-1/2} \sin \beta$, где $p=1+n(2+n) \sin^2 \beta$. Используя далее известные формулы преобразования компонента тензора при повороте системы координат на угол ω , находим площадку ω главного упругого сдвига γ_{ij}'' : $\text{tg } 2\omega = (1+\varepsilon_0^2 \Phi_3/\Phi_2)^{-1} \text{tg } \beta$. Теперь, решая (2.4) как квадратное уравнение, получим $\varepsilon_0^2 \Phi_3/\Phi_2 = -1 + (1+n)^{1/2}$ (знак минус перед корнем не подходит, так как при $n=0$ должно быть $\Phi_3=0$ и наоборот). Поэтому $\text{tg } 2\omega = (1+n)^{1/2} \text{tg } \beta$.

Для рассматриваемого сечения имеет место $d\varepsilon_{11}=-d\varepsilon_{22} \equiv d\varepsilon \neq 0$, $d\varepsilon_{12} \neq 0$ (остальные $d\varepsilon_{ij}=0$). Поэтому $\cos \theta = \varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij} / |\varepsilon| |d\varepsilon| = d\varepsilon_{12} (d\varepsilon^2 + d\varepsilon_{12}^2)^{-1/2}$. Но, согласно тем же формулам преобразования, площадка ω_1 главного пластического сдвига $d\varepsilon_{ij}$ определяется выражением $\cos 2\omega_1 = d\varepsilon_{12} (d\varepsilon^2 + d\varepsilon_{12}^2)^{-1/2}$, поэтому $\theta = 2\omega_1$.

Итак, требование совпадения направлений главных сдвигов γ_{ij}'' и $d\varepsilon_{ij}$ (т. е. $\omega_1 = \omega$) дает окончательно

$$\text{tg } \theta = (1+n)^{1/2} \text{tg } \beta \quad (2.5)$$

Теперь определим $z(\beta)$. Из фиг. 2 видно, что координаты точек A и B определяются выражениями

$$\begin{aligned} x_a &= -z \cos \beta - \psi(\varepsilon) \cos(\alpha+\beta), & y_a &= z \sin \beta + \psi \sin(\alpha+\beta) \\ x_b &= x_a + 2\varphi(\varepsilon) \cos(\alpha+\beta), & y_b &= y_a - 2\varphi \sin(\alpha+\beta) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь уже учтены данные ψ и φ из (1.1). В точках A и B кривой f должно быть выполнено еще неиспользованное последнее условие из (1.1). Поэтому имеем

$$\text{tg } \theta = -y_a'(\beta) / x_a'(\beta) = -y_b'(\beta) / x_b'(\beta) \quad (2.7)$$

где штрих означает производную по аргументу. Из (2.7) и (2.6) следует система уравнений

$$z'(\sin \beta - \cos \beta \text{tg } \theta) + z(\cos \beta + \sin \beta \text{tg } \theta) = - \left(\frac{\psi \cos \beta}{\sqrt{p}} \right)'_{\beta}$$

$$\begin{aligned}
& - (1+n) \operatorname{tg} \theta \left(\frac{\psi \sin \beta}{\sqrt{p}} \right)'_{\beta} \\
z'(\sin \beta - \cos \beta \operatorname{tg} \theta) + z(\cos \beta + \sin \beta \operatorname{tg} \theta) &= \left[\frac{(2\varphi - \psi) \cos \beta}{\sqrt{p}} \right]'_{\beta} + \\
& + (1+n) \operatorname{tg} \theta + \left[\frac{(2\varphi - \psi) \sin \beta}{\sqrt{p}} \right]'_{\beta}
\end{aligned} \quad (2.8)$$

Заметим, что полученная в [3] система дифференциальных уравнений приводится к (2.8), если учесть формулу (2.5).

Приравняв правые части (2.8), с учетом (2.5) находим $\varphi_{\beta}'(\varepsilon)/\varphi(\varepsilon) = 0,5(1+n)^{3/2}((1+n)^{1/2}-1)\sin 2\beta/(pq)$

$$(q=1+[(1+n)^{3/2}-1]\sin^2\beta) \quad (2.9)$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид $\varphi=c(p/q)^{1/2}$, где $c=\text{const}$. Но при $\beta=0$ имеем $\varphi=\varphi_1=\varphi(\varepsilon_0)$, поэтому $c=\varphi_1$, т. е.

$$\varphi=\varphi_1(p/q)^{1/2} \quad (2.10)$$

Теперь, учитывая (2.10), (2.5) и соотношения $\varepsilon'(\theta)\theta'(\beta)=\varphi_{\beta}'/\varphi=\psi_{\beta}'/\psi$, из любого уравнения (2.8) получим уравнение

$$z'(\beta) + z \frac{1 + \sqrt{1+n} \operatorname{tg}^2 \beta}{(1 - \sqrt{1+n}) \operatorname{tg} \beta} = \left(\frac{1+n}{p} \right)^{3/2} \left(\varphi \frac{\psi'}{\varphi'} - \psi \right) = \Omega \quad (2.11)$$

решение которого имеет вид

$$z(\beta) = [\cos \beta \operatorname{tg}^m \beta]^{-1} \left\{ \int_0^{\beta} \Omega(t) \cos t \operatorname{tg}^m t dt + c \right\} \quad (m = (1 - \sqrt{1+n})^{-1}) \quad (2.12)$$

где $c=\text{const}$ определяется из естественного граничного условия $z(0)=0$ (см. фиг. 2). Но для этого требуется проанализировать характер функционального коэффициента $K(\beta)$ и подынтегральной функции $F(t)$ в (2.12), которые имеют особенность в нуле и $\pi/2$.

3. Видно, что $p>0$, $q>0$ и $\varphi>0$. Из (2.9) следует, что $\varphi_{\beta}'=0$ только при $\beta=0$ и $\pi/2$. Поэтому при $0<\beta<\pi/2$ (когда и $0<\theta<\pi/2$) φ является монотонной функцией, т. е. $\varphi'(\varepsilon)\neq 0$. Также и $\varepsilon'(\theta)\neq 0$ ($\varphi_{\beta}'=\varphi'(\varepsilon)\varepsilon'(\theta)\theta'(\beta)$). Так как ε_0 — произвольна, то $\varphi'(\varepsilon)\neq 0$ всюду, кроме, быть может, точки $\varepsilon=0$. Покажем, что $\varphi'(0)=0$.

Для известных материалов $\varphi<\infty$, $\psi<\infty$, $\psi'(\varepsilon)>0$. Можно ожидать, что $\psi'(\varepsilon)<\infty$ и $z'<\infty$. Тогда из (2.11) имеем

$$z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 - \sqrt{1+n}}{(1+n)^2} (\varphi\psi') \Big|_{\beta=0=\pi/2} \lim_{\beta \rightarrow \pi/2} \frac{(1/\operatorname{tg} \beta)}{\varphi'(\varepsilon)} \quad (3.1)$$

Согласно известным f_0° , имеет место $0 < z(\pi/2) < \infty$. Поэтому из (3.1) следует $\varphi'(\varepsilon)=0$ при $\beta=\pi/2$. Но $\varphi'(\varepsilon)\neq 0$ при $\varepsilon\neq 0$, следовательно, $\varepsilon(\pi/2)=0$, $\varphi'(0)=0$. Итак, при $0\leq\beta\leq\pi/2$ имеем $\varepsilon_0\geq\varepsilon\geq 0$, причем $\varepsilon'(\theta)<0$ при $\theta\neq 0$ и $\varepsilon'(0)=0$, что следует из $\varphi_{\beta}'=0$ при $\beta=0$. Таким образом, $\varepsilon(\theta)$ — монотонно убывающая функция.

Раскрывая далее неопределенность в (3.1), находим

$$z(\pi/2) = (\sqrt{1+n}-1)(1+n)^{-2}\varphi(0)\psi'(0)[\varphi''(0)\varepsilon'(\pi/2)\theta'(\pi/2)]^{-1} \quad (3.2)$$

Отсюда в силу $0 < z(\pi/2) < \infty$ имеем $\varphi''(0)\neq 0$ и ввиду $\varepsilon'(\pi/2)<0$ или $\varphi''(0)<0$ (при $n>0$), или $\varphi''(0)>0$, если $n<0$. Таким образом, $\varphi(\varepsilon)$ вблизи нуля имеет характер квадратичной параболы ($\varphi=\varphi(0)+b\varepsilon^2$, $b\neq 0$).

Используя (2.9), из (2.11) можно получить $z(\pi/2) = -\psi_{\beta}' \Big|_{\beta=\pi/2} =$

$= -\psi'(0) \varepsilon'(\pi/2) \theta'(\pi/2)$. Поэтому из (3.2) следует

$$z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\psi'(0)}{1+n} \left[\frac{\varphi(0)}{2b} (1 - \sqrt{1+n}) \right]^{1/2}, \quad (2b = \varphi''(0)) \quad (3.3)$$

При $\beta = \pi/2$ из (2.10) находим

$$n = (\varphi_0/\varphi_1)^4 - 1, \quad (\varphi_0 = \varphi(0)) \quad (3.4)$$

т. е. $n(\varepsilon_u)$ можно определить не только по изменениям упругих свойств согласно формуле (2.4), но и по величине эффекта Баушингера. Это можно было ожидать, так как изменение модуля разгрузки (при изменении допуска) связано с изменением величины эффекта Баушингера.

Покажем теперь, что всегда $n < 0$, и определим постоянную c в (2.12). Очевидно, $n > -1$. Пусть $-1 < n < 0$. При $t < \pi/2$ подинтегральная функция $F(t)$ в (2.12) является ограниченной функцией, и поэтому при $\beta < \pi/2$ интеграл в (2.12) сходится и стремится к нулю при $\beta \rightarrow 0$. Но при $\beta \rightarrow 0$ в (2.12) коэффициент $K(\beta) \rightarrow \infty$. Поэтому для выполнения $z(0) = 0$ необходимо, чтобы было $c = 0$. Это является и достаточным условием, в чем легко убедиться путем раскрытия неопределенности ($\infty \cdot 0$) в (2.12). При $\beta \rightarrow \pi/2$ имеем $K(\beta) \rightarrow 0$, как $x^*(x = (1+n)^{1/2}m)$ при $x \rightarrow 0$. Поэтому для выполнения $0 < z(\pi/2) < \infty$ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(\varepsilon)$ вблизи нуля имела характер квадратной параболы (это совпадает с полученным результатом).

Пусть $n > 0$. Тогда $K(\beta) \rightarrow \infty$ при $\beta \rightarrow \pi/2$. Для выполнения $z(\pi/2) < \infty$ необходимо, чтобы выражение в скобке в (2.12) обращалось в нуль при $\beta = \pi/2$. Поэтому постоянная c в (2.12) будет равна интегралу от нуля до $\pi/2$. Но $F(t) \rightarrow \infty$ при $t = 0$ и $\pi/2$, поэтому этот интеграл расходится, т. е. $c = \infty$, что не имеет смысла. Поэтому всегда $n < 0$, т. е. $\varphi(\varepsilon)$, согласно (3.4), может быть только монотонно возрастающей функцией.

В силу того что ψ и φ — однозначные и монотонно возрастающие функции, для любого β по известной из (2.10) величине $\varphi(\beta)$ однозначно определяются ψ и $\varphi_\beta' = \psi'/\varphi'$. Поэтому вся подинтегральная функция в (2.12) однозначно определяется и без знания $\varepsilon(\theta)$. Таким образом, для построения f нет необходимости знать $\varepsilon(\theta)$.

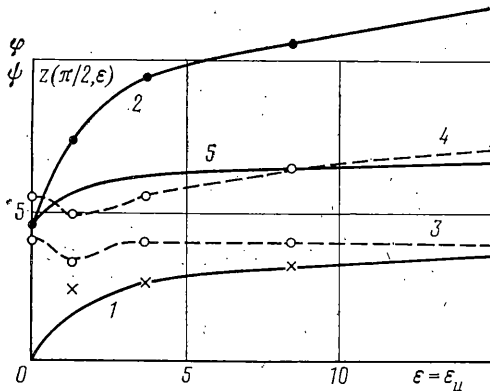
4. Из равенства $\varepsilon(\pi/2) = 0$ следует, что наибольшая упругая протяженность поверхности f в поперечном к ε_{ij} направлении не зависит от ε_0 и равна $2\varphi(0)$, т. е. так называемый поперечный эффект Баушингера отсутствует. Этот результат совпадает с главным выводом экспериментальных работ [4, 5]. Данные других экспериментальных работ, где определяются поверхности f_0^δ , только приблизительно указывают на отсутствие поперечного эффекта Баушингера, что и следовало ожидать ввиду зависимости f_0^δ от допуска δ . Заметим, что отсутствие поперечного эффекта Баушингера кажется правдоподобным, так как при ортогональном к ε_{ij} нагружении в силу (2.1) в закон Гука функция Φ_3 не входит.

Из (2.6) $x_a'(0) = (1+n)\psi'(\varepsilon_0) - z'(0) \neq 0$, $y_a'(0) = \psi_\beta'|_{\beta=0}(\varepsilon) = \psi'(\varepsilon_0)\varepsilon'(0)\theta'(0)$, так как $\varepsilon'(0) = 0$. Поэтому в точке простого нагружения f является регулярной. Этого следовало и ожидать, так как используются только данные ψ и φ , которые не содержат никаких сведений о наличии угловой точки на f и тем более о величине этого угла. Теория течения, использующая только функции ψ и φ , не может, вообще говоря, допустить нерегулярность f .

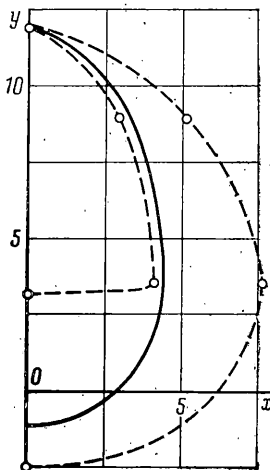
Как видно из изложенного, для определения функций z , α , θ нужно знать величину $n(\varepsilon_u)$. Эту функцию n можно было бы определить или по формуле (2.4) или по (3.4). Однако эти значения n (которые должны совпадать) сильно зависят от величины допуска δ . Поэтому для однозначного построения f воспользуемся одним замечательным экспериментальным фактом. Из данных [6] видно, что величина $z(\pi/2, \varepsilon)$ не зависит от допуска δ . Этот факт заслуживает, по-видимому, доверия.

Действительно, для ортогонального к ε_{ij} нагружения s_{ij}'' в закон Гука не входит Φ_3 , т. е. сопротивление к нагружению s'' подобно сопротивлению изотропного тела. К тому же, при $\beta = \pi/2$ имеем $\theta = \pi/2$, $\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{ij} = 0$, т. е. векторы s_{ij}'' и $d\varepsilon_{ij}$ совпадают по направлению. Это обстоятельство в силу непрерывности сохранится в пределах малого догружения $ds_{ij}'' = d\lambda s_{ij}''$, величина которого покрывает определенный диапазон допусков.

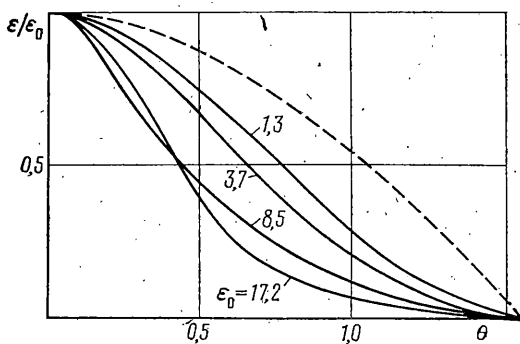
В силу независимости $z(\pi/2, \varepsilon)$ от допусков ее легко определить в экспериментах. Зная эту функцию, из (3.3) можно определить $n(\varepsilon)$, если известны постоянные $\varphi(0)$, $\varphi''(0)$ и $\psi'(0)$. Тогда из (3.4) будет определена вся кривая $\varphi(\varepsilon)$. Функция $\psi(\varepsilon)$ зависит, вообще говоря, от допуска δ , так как ε зависит от принятого определения



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

пластической деформации, т. е. от δ . Но эта зависимость ψ от δ слабая, и поэтому можно считать, что ψ не зависит от δ (хотя эту зависимость можно было бы учесть путем последовательного приближения в расчетной процедуре). Выбрав какое-либо значение $\psi(0) = \psi(\delta)$ (начальный предел текучести, тоже зависящий от допуска), можно довольно точно определить $\psi'(0)$, которая, как и $\psi''(0)$, влияет только на малый (поперечный) участок поверхности f . Поэтому величины $\psi'(0)$ и $\psi''(0)$ легко уточнить расчетным путем. Здесь главным является подходящий выбор $\psi(0)$, от которой зависят значения $n(\epsilon)$ и вся кривая $\psi(\epsilon)$.

Выбор постоянной $\psi(0)$ (тем самым и всей кривой $\psi(\epsilon)$), как показывают конкретные расчеты на ЭВМ, нетрудно осуществить, если следить за выполнением естественных неравенств (которые должны иметь место при движении точек A и B по кривой f):

$$x_a'(\beta) \geq 0, \quad y_a'(\beta) \leq 0, \quad x_b'(\beta) \leq 0, \quad y_b'(\beta) \geq 0 \quad (4.1)$$

где знак равенства имеет место при $\beta=0$ или $\pi/2$. При этом нужно иметь в виду, что согласно данным f_0^δ острая часть f направлена в сторону предварительного нагружения. Отсюда следует требование

$$z(\pi/2, \epsilon) < \psi(\epsilon) - \psi(0) \quad (4.2)$$

Отметим, что выбор $\psi(0)$ методом пробных расчетов не является чрезмерной работой, поскольку она производится только один раз для определения приемлемой материальной функции $\psi(\epsilon)$ из слоя f_0^δ .

5. Здесь не приводится большое количество поверхностей f_0^δ , полученных в [6] при различных значениях ϵ_0 , и все соответствующие теоретические поверхности текучести f . На фиг. 3 показаны экспериментальные точки функций $\psi(\epsilon)$, $z(\pi/2, \epsilon)$ (кривая 1) и аппроксимация $\psi(\epsilon)$ (кривая 2) гладкой кривой с помощью известного сплайн-метода. Этот метод видоизменен только тем, что вместо нулевой кривизны ψ и ψ' в начальной точке задаются величины $\psi'(0) = \text{const}$ и $\psi''(0) = 0$ (см. п. 3). Заметим, что для соблюдения $\psi'(\epsilon) \neq 0$ при $\epsilon \neq 0$ следует увеличить число опорных точек

аппроксимации по сплайн-методу, особенно при малых ϵ , когда часто нарушаются неравенства (4.1).

Принятые в [6] допуски δ весьма малы и находятся в интервале $(20-200) \cdot 10^{-6}$. При $\delta=20 \cdot 10^{-6}$ величина $z(\pi/2, \epsilon)$ резко отличается от постоянного при других δ значениях $z(\pi/2, \epsilon)$, и поэтому за минимальный допуск следует принять $\delta=40 \cdot 10^{-6}$. На фиг. 3 изображены границы полосы экспериментальных кривых φ_0^δ , соответствующие допускам $\delta=40 \cdot 10^{-6}$ (кривая 3) и $\delta=200 \cdot 10^{-6}$ (кривая 4). Очевидно, δ_{\max} можно увеличить и тогда эта полоса расширится (вероятно, условие $z(\pi/2, \delta)=\text{const}$ можно использовать как критерий для определения допустимых значений δ_{\min} и δ_{\max}). Там же изображена найденная расчетным путем зависимость $\varphi(\epsilon)$ (кривая 5), при которой выполняются неравенства (4.1) и (4.2). Естественно, эта кривая не изображает точно искомую функцию $\varphi(\epsilon)$, так как она найдена численно путем последовательного приближения. Но можно ожидать, что имеет место непрерывная и нелинейная зависимость f от φ (это подтверждается в конкретных расчетах), что позволяет с достаточной точностью определить φ и по ней f . Поэтому можно говорить об однозначном выборе $\varphi(\epsilon)$ и построении f .

На фиг. 4 приведены теоретическая поверхность f и границы слоя f_0^δ [6] для использованного в [6] максимального значения $\epsilon_u=17,2\%$.

Отметим, что все теоретические кривые f (для различных значений ϵ_u) содержат внутри себя начало координат. Это подтверждает неоднократно высказанное А. А. Ильюшиным замечание о невозможности случая, когда начало координат не содержится в f (такое утверждение основано, видимо, на предположении, что при отличных от нуля упругих деформациях одного знака не могут появиться пластические деформации другого знака).

Из останавливаясь подробно, отметим лишь, что грубая оценка среднего модуля упругости по полученным значениям $n(\epsilon_u)$ дает вполне приемлемые результаты 10–20% (точная оценка невозможна, так как известна только одна величина n).

На фиг. 5 изображены кривые $\epsilon(\theta)/\epsilon_0=\eta(\theta, \epsilon_0)$ для различных значений ϵ_0 и кривая $\cos \theta$ (штриховая); пластический сдвиг на площадке, определяемой углом θ , от предварительного кручения до ϵ_0 равен $\epsilon(\theta)=\epsilon_0 \cos \theta$. Как видно, η существенно отличается от $\cos \theta$. Этот результат можно было и ожидать, поскольку изотропное состояние поликристаллического агрегата было нарушено направленным воздействием ϵ_{ij} . Функция η может оказаться полезной при исследовании сложного нагружения.

Из (2.9) с учетом (2.5) можно получить дифференциальное уравнение первого порядка относительно $\epsilon(\theta)$, содержащее $\varphi(\epsilon)$ и $\varphi'(\epsilon)$. Кривые η на фиг. 5 являются по существу решениями этого уравнения. При $n=0$ это уравнение допускает произвольное решение. Поэтому для случая $n=0$ (т. е. $\varphi=\text{const}$) можно положить $\epsilon(\theta)=\epsilon_0 \cos \theta$. Далее можно показать, что f — сфера постоянного радиуса и этот случай имеет место только для материала с линейным упрочнением: $\psi(\epsilon)=\psi(0)+\psi'(0)\epsilon$. Таким образом, теория А. Ю. Ишлинского [2], где одновременно предполагаются неизменность упругих свойств ($\Phi_3=0$, т. е. $n=0$), линейность упрочнения и сферичность f (неизменного радиуса) с точки зрения предлагаемого в данной работе подхода, является внутренне непротиворечивой теорией.

Отметим, что в базовых нагружениях изотропно-трансляционной теории течения кроме (1.1) также выполняются $\gamma_{ij}^0=s_{ij}^0$, $d\epsilon_{ij}^0=s_{ij}^0$, которые, однако, нельзя использовать для определения f , так как они не позволяют учесть возникающую деформационную анизотропию и, кроме того, в этом нет никакой необходимости. Других характерных особенностей реакции материала в этих базовых нагружениях нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением.— Укр. матем. ж., 1954, т. 6, вып. 3, с. 314–325.
3. Мансуров Р. М. Теория пластического течения с функцией текучести, определяемой системой дифференциальных уравнений.— Изв. Каз. ССР. Сер. физ.-матем., 1979, № 1, с. 37–41.
4. Ivey H. J. Plastic stress-strain relations and yield surfaces for aluminium alloys.— J. Mech. Engng Sci., 1961, v. 3, No. 1, p. 15–31.— Рус. перев.: Механика. Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1958, № 6(52), с. 115–127.
5. Naghdi P. M., Essenburg F., Koff W. An experimental study of initial and subsequent yield surfaces in plasticity.— J. Appl. Mech., 1958, v. 25, No. 2, p. 201–209.— Рус. перев.: Механика. Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1962, № 3(73), с. 137–168.
6. Williams I. F., Swenson N. L. Effect of tensile prestrain on the yield locus of 1000-F aluminium.— J. Strain Analysis, 1970, v. 5, No. 2, p. 128–139.

Москва

Поступила в редакцию
24.IX.1984