МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1985

УДК 539.375

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

НОВИКОВ В. Г., ТУЛИНОВ Б. М.

Задачи теории упругости для бесконечного изотропного тела, ослабленного двоякопериодической системой прямолинейных трещин, рассматривались в [1—11]. Вопросы, связанные с моделированием тела с двоякопериодической системой трещин сплошной анизотропной средой, исследовались в [12]. В [1—11] двоякопериодическая задача для тела с трещинами сведена к численному решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений или сингулярного интегрального уравнения. В публикуемой работе построено замкнутое решение задачи для двоякопериодической системы прямолинейных трещин продольного сдвига, образующих прямоугольную решетку. Определяется макроскопический модуль сдвига среды с данной системой трещин.

1. Постановка и решение двоякопериодической задачи. Известно [13], что решения задач продольного сдвига сводятся к определению аналитической в области, занятой телом, функции $F(z)$, где $z=x+iy$. При этом компоненты напряжений σ_{xz}, σ_{yz} и смещение w определяются по формулам (μ_0 — модуль сдвига):

$$\sigma_{xz}-i\sigma_{yz}=\mu_0 F(z),\quad w=\operatorname{Re} f(z),\quad F(z)=f'(z) \tag{1.1}$$

Пусть бесконечная упругая плоскость xOy ослаблена двоякопериодической системой прямолинейных разрезов $|x-2na|<l$, $y=2md$ (n, $m=0$, ±1, $\pm2,\ldots$). На берегах разрезов задана одинаковая в конгруэнтных точках самоуравновешенная нагрузка

$$\sigma_{yz}=-T(x),\quad |x|<l,\quad y=0 \tag{1.2}$$

Обозначим через $2g(x)$ разрыв смещений при переходе через разрез: $2g(x)=w(x,+0)-w(x,-0)$. Пусть приложенная нагрузка $T(x)$ — четная функция координаты x. Тогда $T(x)=T(-x)$ и в силу граничных условий и геометрии задачи функция $F(z)$ является четной двоякопериодической функцией с периодами $2a$ и $2d$. Можно показать [14, 15], что $F(z)$ выражается через производную функции $g(x)$ следующим образом:

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int_0^l \frac{g'(t)P'(t)}{P(t)-P(z)}\,dt \tag{1.3}$$

где $P(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса; штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Из граничного условия (1.2) получаем для функции $g'(t)$ уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_0^l \frac{g'(t)P'(t)}{P(t)-P(x)}\,dt=-\frac{T(x)}{\mu_0} \tag{1.4}$$

Обозначив $P(t)$ через новую переменную, приводим уравнение (1.4) к задаче обращения интеграла типа Коши, решение которой известно [15]. Опуская промежуточные выкладки, приводим решение уравнения (1.4):

$$g'(t)=\frac{1}{\pi\mu_0\sqrt{P(t)-P(l)}}\left[C+P(t)\int_0^l\frac{\sqrt{P(x)-P(l)}P'(x)}{(P(x)-P(t))P(x)}T(x)\,dx\right] \quad (1.5)$$

Из (1.1), (1.3) и (1.5) получаем распределение напряжений в виде

$$\sigma_{xz}-i\sigma_{yz}=\frac{1}{\pi\sqrt{P(z)-P(l)}}\left[C+P(z)\int_0^l\frac{\sqrt{P(t)-P(l)}P'(t)}{(P(t)-P(z))P(t)}T(t)\,dt\right] \quad (1.6)$$

Формулы (1.5), (1.6) содержат постоянную C, значение которой определяется из условия двоякой периодичности смещения $w(x, y)$. Можно показать, что w является периодической функцией координаты x, а из условия периодичности смещения по координате y следует выражение для C:

$$C=-\int_0^l\frac{P'(t)T(t)}{\sqrt{P(t)-P(l)}}\left[\frac{P(l)}{P(t)}+\frac{(e_1-P(l))\Pi(n,k)}{(P(t)-e_1)K(k)}\right]dt \quad (1.7)$$

$$n=\frac{(e_1-e_2)[P(t)-P(l)]}{[P(l)-e_2][P(t)-e_1]},\quad k^2=\frac{(e_1-e_2)[P(l)-e_3]}{(e_1-e_3)[P(l)-e_2]}$$

$$e_1=P(a),\ e_2=P(a+id),\ e_3=P(id)$$

где $K(k)$ и $\Pi(n, k)$ — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода соответственно [16].

Из асимптотического поведения функции $g'(x)$ при $x\to l$ с учетом (1.5), (1.7) получаем для коэффициента интенсивности напряжений [17] выражение

$$K=\sqrt{\frac{2}{|P'(l)|}}\frac{[e_1-P(l)]}{\pi K(k)}\int_0^l\frac{\Pi(n,k)P'(t)T(t)\,dt}{[P(t)-e_1]\sqrt{P(t)-P(l)}} \quad (1.8)$$

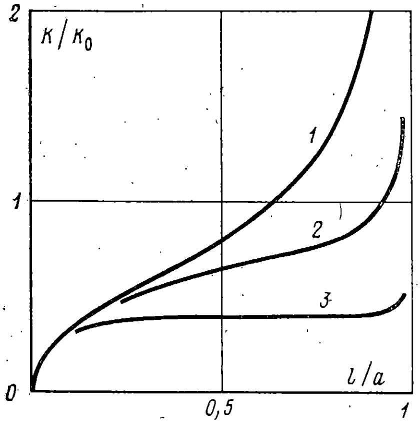
В случае однородной нагрузки $T(x)=\tau_0$ соотношение (1.8) приводится к виду

$$\frac{K}{K_0}=\sqrt{\frac{2[P(l)-e_2]}{a|P'(l)|}}\frac{K(k_1)}{K(k_2)} \quad (1.9)$$

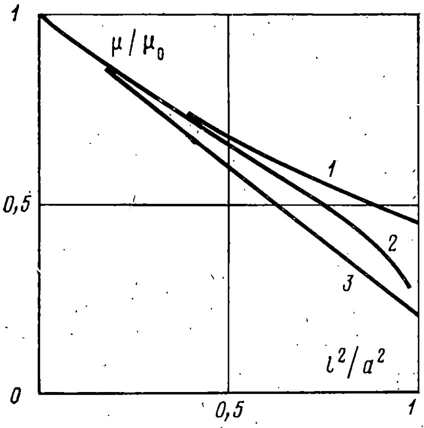
$$K_0=\tau_0\sqrt{a},\quad k_1^2=\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3},\quad k_2^2=\frac{k_1^2[P(l)-e_1]}{P(l)-e_2}$$

Зависимость K/K_0 от безразмерной длины трещины l/a приведена на фиг. 1. Кривым *1—3* соответствуют значения $d/a=\infty$ (периодическая система коллинеарных трещин) 1 и $1/4$. С увеличением длины трещины коэффициент интенсивности напряжений монотонно возрастает. При малых значениях d/a кривые K/K_0 имеют пологий участок, на котором значение K остается почти постоянным и равно $\tau_0(2d/\pi)^{1/2}$ — коэффициенту интенсивности напряжений для системы параллельных полубесконечных трещин. В случае $a\to\infty$ из (1.9) получаем известное выражение для коэффициента интенсивности напряжений для периодической системы параллельных трещин [18]: $K=\tau_0[2d\,\mathrm{th}\,{}^1/_2(\pi l/d)/\pi]^{1/2}$, а в случае периодической системы коллинеарных трещин [19]: $K=\tau_0[2a\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2(\pi l/a)/\pi]^{1/2}$.

2. Макроскопические параметры решетки трещин. Определим связь между средними деформациями $\langle\varepsilon_{yz}\rangle$ и напряжениями $\langle\sigma_{yz}\rangle$ в среде, содержащей описанную выше решетку трещин, берега которых свободны от нагрузок. Пусть $\langle\varepsilon_{yz}\rangle=\gamma_0$, где γ_0 — постоянная. При отсутствии трещин та-



Фиг. 1



Фиг. 2

кая деформация создала бы в среде напряжение $\sigma_{yz}=\tau_0$, где $\tau_0=\mu_0\gamma_0$. Для среды с трещинами имеем $\langle\sigma_{yz}\rangle=\mu\langle\varepsilon_{yz}\rangle$, где μ — макроскопический модуль сдвига. В результате получаем

$$\mu/\mu_0=\langle\sigma_{yz}\rangle/\tau_0 \tag{2.1}$$

Вычисляя $\langle\sigma_{yz}\rangle$, определим из соотношения (2.1) значение μ/μ_0. Для среднего напряжения $\langle\sigma_{yz}\rangle$ имеем

$$\langle\sigma_{yz}\rangle=\frac{1}{4ad}\int\limits_S \sigma_{yz}(x,y)\,dx\,dy \tag{2.2}$$

где S — основной параллелограмм периодов, $\sigma_{yz}(x, y)$ — микроскопическое распределение напряжений, получаемое из решения двоякопериодической задачи.

Представим $\sigma_{yz}(x, y)$ в виде $\sigma_{yz}(x, y)=\tau_0+\tau(x, y)$. Тогда для $\tau(x, y)$ получаем краевую задачу (1.1), (1.2), решение которой дается формулами (1.6)—(1.8), где следует положить $T(x)=\tau_0$. Подставляя значение $\tau(x, y)$ из (1.6) в соотношения (2.1), (2.2), можно определить макроскопический модуль сдвига μ. Опуская промежуточные выкладки, приводим конечный ответ для случая квадратной решетки ($d=a$):

$$\frac{\mu}{\mu_0}=1-\frac{1}{K(k_0)K(1/\sqrt{2})}\int\limits_0^{m_0}\frac{t}{1-t^2}K\left[t\sqrt{\frac{k_0^2(2-t^2)-1}{2(1-t^2)}}\right]dt \tag{2.3}$$

$$k_0^2={}^1/_2(P(l)+e_1)/P(l),\quad m_0=2e_1/(P(l)+e_1)$$

Из (2.3) получаем асимптотические выражения (C=1,47855):

$$\mu/\mu_0\simeq1-{}^1/_4\pi l^2/a^2,\quad l\ll a \tag{2.4}$$

$$\mu/\mu_0\simeq-C/\ln(1-l^2/a^2),\quad l\to a$$

Предложенный в [20, 21] подход, основанный на приближенном учете взаимодействия трещин, в случае квадратной решетки трещин дает для макроскопического модуля сдвига значение

$$\mu/\mu_0=\exp\left(-{}^1/_4\pi l^2/a^2\right) \tag{2.5}$$

Зависимости (2.5), (2.3) и (2.4) приведены на фиг. 2 (кривые *1*, *2* и *3* соответственно). Все кривые имеют при $l\ll a$ одинаковое асимптотическое поведение, которое дается выражением (2.4). Зависимость (2.5) в целом лучше аппроксимирует соотношение (2.3), чем зависимость (2.4). При

$l^2/a^2=0{,}9$ отклонение приближенных выражений (2.4) и (2.5) от точного (2.3) составляет около 30%. Это означает, что приближенный подход [20, 21] применим с хорошей степенью точности почти до момента полного разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон В. З.* Об одной оценке взаимного упрочнения трещин при их шахматном расположении.– ПМТФ, 1965, № 5, с. 94–97.
2. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Первая основная задача теории упругости для двоякопериодической системы разрезов.– В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972, с. 251–258.
3. *Фильштинский Л. А.* Взаимодействие двоякопериодической системы прямолинейных трещин в изотропной среде.– ПММ, 1974, т. 38, вып. 5, с. 906–914.
4. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.
5. *Delameter W. R., Herrmann G., Barnett D. M.* Weakening of an elastic solid by a rectangular array of cracks.– Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1975, v. 42, No. 1, p. 74–80.
6. *Саврук М. П.* Двоякопериодическая система трещин продольного сдвига в упругом теле.– Прикл. механика, 1975, т. 11, вып. 12, с. 113–117.
7. *Линьков А. М.* Интегральное уравнение плоской задачи теории упругости о двоякопериодической системе разрезов, нагруженных самоуравновешенными нагрузками.– Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2, с. 70–74.
8. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Двоякопериодическая задача теории трещин.– Проблемы прочности, 1976, № 12, с. 63–68.
9. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
10. *Тусупов М. Т., Алдамжаров К. Б.* К решению задачи теории упругости для плоскости с двоякопериодической системой щелей.– Вестн. АН КазССР, 1979, № 1, с. 48–54.
11. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.
12. *Фильштинский Л. А.* К теории упругих неоднородных сред с регулярной структурой.– ПММ, 1973, т. 37, вып. 2, с. 262–273.
13. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О хрупких трещинах продольного сдвига.– ПММ, 1961, т. 25, вып. 6, с. 1110–1119.
14. *Чибрикова Л. И.* О краевой задаче Римана для автоморфных функций.– Уч. зап. Казан. ун-та, 1956, т. 116, № 4, с. 59–110.
15. *Гахов Д. Ф.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
16. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.
17. *Саврук М. П.* Система произвольно ориентированных трещин продольного сдвига в упругом теле.– ПММ, 1975, т. 39, вып. 4, с. 717–723.
18. *Smith E.* The spread of plasticity from stress concentrations.– Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1964, v. 282, No. 1390, p. 422–432.
19. *Irwin G. R.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate.– J. Appl. Mech., 1957, v. 24, No. 3, p. 361–364.
20. *Вавакин А. С., Салганик Р. Л.* Об эффективных характеристиках неоднородных сред с изолированными неоднородностями.– Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, с. 65–75.
21. *Вавакин А. С., Салганик Р. Л.* Эффективные упругие характеристики тел с изолированными трещинами, полостями и жесткими неоднородностями.– Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 2, с. 95–107.

Москва

Поступила в редакцию
9.VII.1983