

УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ АМОРТИЗИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

КУЛАГИН В. В., ПРОУРЗИН В. А.

В задачах оптимальной амортизации, поставленных как задачи оптимального управления (см., например, [1-7]), обычно рассматривается система с одной степенью свободы. За показатели качества приняты максимум модуля отклонения амортизируемой массы от подвижного основания (или, иначе, ход) и максимум модуля абсолютного ускорения амортизируемой массы (перегрузка). Выбором амортизирующего усилия (управления) минимизируют либо ход при ограниченной перегрузке, либо перегрузку при ограниченном ходе.

Обобщение этих задач на системы с несколькими степенями свободы требует введения новых показателей качества. В данной работе на основе введенных величин: ход по направлению и перегрузка по направлению; задача оптимальной амортизации ставится для случая пространственного движения. Рассмотрен пример оптимального управления движением прямоугольного прибора в прямоугольном контейнере, вращающемся по закону удара.

1. В качестве объекта управления рассматривается система амортизации, состоящая из прибора, помещенного в движущийся по закону удара контейнер, и амортизаторов, осуществляющих силовую связь прибора с контейнером. Амортизаторы считаются безынерционными, прибор и контейнер — абсолютно жесткими телами. Внешнее ударное воздействие задается в виде ускорения контейнера. Главный вектор сил \mathbf{F} и главный момент сил \mathbf{M} , приложенные к прибору со стороны амортизаторов, задают силовую реакцию некоторого обобщенного амортизатора. Закон изменения векторов \mathbf{F} и \mathbf{M} , или динамическая характеристика обобщенного амортизатора, подлежит выбору и называется управлением.

Обозначим $oxyz$, $c\xi\eta\zeta$ системы координат, связанные с контейнером и прибором соответственно, причем начало отсчета s лежит в центре масс прибора; \mathbf{r}_q , ρ_q — радиус-векторы некоторой точки q в системах координат $oxyz$, $c\xi\eta\zeta$; $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ — вектор-столбец эйлеровых углов поворота прибора относительно основания, ω , Ω — векторы абсолютных угловых скоростей прибора и контейнера, ω_r — вектор угловой скорости прибора относительно контейнера, \mathbf{u}_c — абсолютное ускорение центра масс прибора, σ_s — абсолютное ускорение начала отсчета системы $oxyz$, \mathbf{u}_θ , σ_ψ — абсолютные угловые ускорения прибора и контейнера, m — масса прибора, A — матрица моментов инерции прибора в системе $c\xi\eta\zeta$, $\sigma = (\sigma_s, \sigma_\psi)$ — внешнее воздействие, $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_c, \mathbf{u}_\theta) = (m^{-1}\mathbf{F}, A^{-1}\mathbf{M})$ — управление, или динамическая характеристика обобщенного амортизатора.

При необходимости уточнения системы координат, в которой задается вектор, он снабжается индексом в верхней позиции: k — для системы $oxyz$, π — для системы $c\xi\eta\zeta$. Например $\mathbf{u}_c^k = (u_c^x, u_c^y, u_c^z)$, $\mathbf{u}_c^\pi = (u_c^\xi, u_c^\eta, u_c^\zeta)$. Следуя [8], выпишем уравнения движения прибора относительно контейнера:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c^{\pi\pi} \mathbf{u}_c^k - \Omega^k(t) \times (\Omega^k(t) \times \mathbf{r}_c) - \sigma_\psi^k(t) \times \mathbf{r}_c - 2\Omega^k \times \mathbf{r}_c^{\cdot} - \sigma_s^k(t), \\ \omega_r^{\pi\pi} = \mathbf{u}_\theta^{\pi\pi} + A^{-1}(A\omega^\pi \times \omega^\pi) + \omega_r^\pi \times \Omega^\pi(t) - \sigma_\psi^\pi(t) \\ \dot{\varphi}_1^k = (\omega_r^\xi \sin \varphi_3 + \omega_r^\eta \cos \varphi_3) / \sin \varphi_2, \quad \dot{\varphi}_2^k = \omega_r^\xi \cos \varphi_3 - \omega_r^\eta \sin \varphi_3 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\varphi_3 = \omega_r^t - (\omega_r^s \sin \varphi_3 + \omega_r^n \cos \varphi_3) \operatorname{ctg} \varphi_2$$

2. Для вывода функционалов, оценивающих относительные смещения и перегрузки в системе амортизации, введем обозначения: P — множество точек прибора, P_W — множество точек из P , чувствительных к ударам, $\mathbf{r}(t; p, \mathbf{u})$ — радиус-вектор точки $p \in P$ в системе $oxyz$ в момент t при управлении \mathbf{u} , $R(t; \mathbf{u}) = \bigcup_{p \in P} \mathbf{r}(t; p, \mathbf{u})$ — положение прибора в контейнере в мо-

мент t , $\mathbf{w}(t; p, \mathbf{u})$ — абсолютное ускорение точки p , заданное в системе $e\xi\eta\zeta$. Заметим, что $\mathbf{r}(t; p, \mathbf{u}) = \mathbf{r}_c(t; \mathbf{u}) + \rho_p^h$, $\mathbf{w}(t; p, \mathbf{u}) = \mathbf{u}_c^{\pi} + \mathbf{u}_0^{\pi} \times \rho_p + \omega^{\pi} \times (\omega^{\pi} \times \rho_p)$.

Рассмотрим множества

$$T(\mathbf{u}) = \bigcup_t R(t; \mathbf{u}), \quad W(\mathbf{u}) = \bigcup_t \bigcup_{p \in P_W} \mathbf{w}(t; p, \mathbf{u})$$

называемые траекторией прибора в контейнере и зоной перегрузок прибора.

Для оценки этих множеств введем понятие уклонения множества X от множества Y по направлению \mathbf{g} в виде (см. фиг. 1, а):

$$S_g(X, Y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \langle x - y, \mathbf{g} \rangle$$

Здесь X, Y — компактные множества векторов из евклидова n -мерного пространства E_n , \mathbf{g} — вектор единичной длины из E_n , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в E_n .

Отметим некоторые свойства уклонения $S_g(X, Y)$. Можно показать, что (см. [9, с. 323–327] и [10, с. 27]):

$$S_g(X, Y) = \max_{x \in X} \langle x, \mathbf{g} \rangle - \max_{y \in Y} \langle y, \mathbf{g} \rangle \quad (2.1)$$

$$S_g(X, Y) = S_g(\operatorname{co} X, \operatorname{co} Y) \quad (2.2)$$

Здесь $\operatorname{co} X, \operatorname{co} Y$ — выпуклые оболочки множеств X, Y (выпуклая оболочка множества X — наименьшее выпуклое множество, содержащее X , см. [11, с. 28]).

Пусть $E(X)$ — совокупность крайних точек выпуклого множества X (см. [11, с. 178]). В частности, если X — многогранник, то $E(X)$ — совокупность его вершин. Для невыпуклого множества X примем $E(X) = E(\operatorname{co} X)$. С учетом того, что $\operatorname{co} E(X) = \operatorname{co} X$ (см. [11, с. 184]), и свойств (2.1), (2.2), получим

$$S_g(X, Y) = S_g(E(X), E(Y)) \quad (2.3)$$

Введем теперь функционалы $J_g(\mathbf{u}) = S_g(T(\mathbf{u}), R(t; \mathbf{u})|_{t=0})$, $I_\gamma(\mathbf{u}) = S_\gamma(W(\mathbf{u}), \mathbf{0})$, называемые ходом прибора по направлению \mathbf{g} и перегрузкой прибора по направлению γ , где \mathbf{g}, γ — единичные векторы, задающие направления в контейнере и приборе, $\mathbf{0}$ — нулевой вектор в системе $e\xi\eta\zeta$.

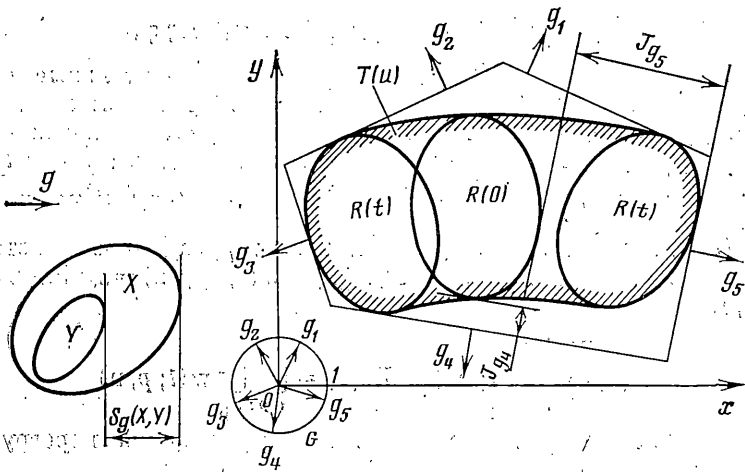
Функционалы $J_g(\mathbf{u}), I_\gamma(\mathbf{u})$ могут быть выписаны с учетом (2.1), (2.3) через переменные системы (1.1) в виде

$$J_g(\mathbf{u}) = \max_t [\max_{p \in E(P)} \langle \mathbf{r}(t; p, \mathbf{u}), \mathbf{g} \rangle - \langle \mathbf{r}^g, \mathbf{g} \rangle],$$

$$I_\gamma(\mathbf{u}) = \max_t \max_{p \in E(P_W)} \langle \mathbf{w}(t; p, \mathbf{u}), \gamma \rangle$$

Вектор \mathbf{r}^g находится из условия $\langle \mathbf{r}^g, \mathbf{g} \rangle = \max_{p \in E(P)} \langle \mathbf{r}(t; p, \mathbf{u})|_{t=0}, \mathbf{g} \rangle$.

Можно видеть, что J_g определяет расстояние между плоскостями, имеющими общую нормаль \mathbf{g} , и касательными к множествам $\operatorname{co} T(\mathbf{u})$, $\operatorname{co} R(t; \mathbf{u})|_{t=0}$, а величина I_γ — расстояние от начала координат системы $e\xi\eta\zeta$ до касательной к множеству $\operatorname{co} W(\mathbf{u})$ плоскости с нормалью γ (стро-



Фиг. 1

го говоря, речь идет об опорных плоскостях к выпуклым множествам, см. [11, с. 115, 116]). Оценим траекторию $T(\mathbf{u})$ и зону перегрузок $W(\mathbf{u})$ с помощью описанных вокруг них выпуклых многогранников $C_T(\mathbf{u})$ и $C_W(\mathbf{u})$:

$$T(\mathbf{u}) \subset C_T(\mathbf{u}), \quad C_T(\mathbf{u}) = \{\mathbf{r} | \langle \mathbf{r} - \mathbf{r}^g, \mathbf{g} \rangle \leq J_g(\mathbf{u}), \mathbf{g} \in G\}$$

$$W(\mathbf{u}) \subset C_W(\mathbf{u}), \quad C_W(\mathbf{u}) = \{\mathbf{w} | \langle \mathbf{w}, \boldsymbol{\gamma} \rangle \leq I_\gamma(\mathbf{u}), \boldsymbol{\gamma} \in \Gamma\} \quad (2.4)$$

Грани многогранников задаются единичными векторами $\mathbf{g} \in G$, $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$ как нормальными и принадлежат плоскостям, касательным к множествам $T(\mathbf{u})$, $W(\mathbf{u})$ (фиг. 1, б). Множества векторов G , Γ считаются заданными.

Количественно траекторию $T(\mathbf{u})$ и зону перегрузок $W(\mathbf{u})$ оценим функционалами

$$J(\mathbf{u}) = \max_{\mathbf{g} \in G} J_g(\mathbf{u}), \quad I(\mathbf{u}) = \max_{\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma} I_\gamma(\mathbf{u}) \quad (2.5)$$

имеющими смысл хода и перегрузки прибора в случае пространственного движения системы амортизации. В случае поступательного движения прибора и контейнера вдоль некоторой оси Z функционалы (2.5), как легко проверить, есть обычные ход и перегрузка [1]: $J(\mathbf{u}) = \max |z(t; \mathbf{u})|$,

$I(\mathbf{u}) = \max |u(t)|$ при любых G, Γ , содержащих положительное и отрица-

тельное направления оси Z . Здесь z и u — проекции относительного смещения и абсолютного ускорения центра масс прибора на ось Z .

Рассмотрим следующую задачу оптимальной амортизации. Пусть многогранник C_W^0 задает зону допустимых перегрузок прибора, т. е. включение $W(\mathbf{u}) \subset C_W^0$ есть условие сохранности прибора. Требуется выбором допустимого (обеспечивающего сохранность прибора) управления оптимизировать многогранник $C_T(\mathbf{u})$ в смысле минимума хода $J(\mathbf{u})$.

Многогранник $C_T(\mathbf{u})$ трактуется как внутренность контейнера, содержащая в себе траекторию прибора. Множество G нормалей к граням многогранника $C_T(\mathbf{u})$ задается исходя из условий проектирования контейнера и содержит необходимую информацию о количестве граней последнего и их направленности. Например, если G состоит из одного направления, то контейнер — плоское основание, если G — множество положительных и отрицательных ортов системы $oxyz$, то контейнер — параллелепипед и т.д. Таким образом, множество G определяет класс контейнеров, из которого и выбирается оптимальный.

Пусть $C_w^0 = \{w | \langle w, \gamma \rangle \leq \alpha_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$, где Γ — заданное множество единичных векторов, характеризующих удароопасные направления в приборе, α_γ — заданные числа, или допустимые перегрузки прибора в направлениях $\gamma \in \Gamma$. Ограничение $W(u) \subset C_w^0$ перепишем с учетом (2.4) в виде $I_\gamma(u) \leq \alpha_\gamma, \gamma \in \Gamma$; это означает, что многогранник $C_w(u)$ включен в многогранник C_w^0 .

Задача об оптимальном контейнере примет вид следующей задачи оптимального управления: найти управление u^* , такое, что $J(u^*) = \min J(u), u \in U, U = \{u | I_\gamma(u) \leq \alpha_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$. Оптимизация контейнера обеспечивает минимум наибольшему из зазоров между гранями контейнера и начальным положением прибора.

Аналогично можно поставить задачу об оптимальной зоне перегрузок при ограничениях на ход по направлениям.

3. Рассмотрим плоское движение прямоугольного прибора в прямоугольном контейнере, вращающемся по закону углового ускорения $\sigma_\psi(t)$. Обозначим (см. фиг. 2, а): $oxy, c\xi\eta$ — соответственно, связанные с контейнером и прибором системы координат, φ — угол поворота прибора относительно контейнера, c — центр масс прибора — лежит в центре прямоугольника.

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} x_c'' &= u_\xi \cos \varphi - u_\eta \sin \varphi + x_c \Omega^2(t) + y_c \sigma_\psi(t) + 2y_c \Omega(t) \\ y_c'' &= u_\xi \sin \varphi + u_\eta \cos \varphi + y_c \Omega^2(t) - x_c \sigma_\psi(t) - 2x_c \Omega(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\varphi'' = u_\theta - \sigma_\psi(t), \quad \Omega(t) = \int_0^t \sigma_\psi(\tau) d\tau$$

Здесь $r_c = (x_c, y_c)$ — положение точки c в контейнере, $u_c^x = (u_\xi, u_\eta)$ — абсолютное ускорение точки c , начальные условия имеют вид $r_c(0) = \dot{r}_c(0) = 0, \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$.

Все точки прибора чувствительны к ударам, т. е. $P_w = P$. Пусть $G = \{g_1, \dots, g_4\}$ и $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_4\}$ — множества единичных векторов, ориентированных, соответственно, вдоль осей oxy и $c\xi\eta$. Перегрузки по направлениям $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ ограничены величинами $\alpha_1, \dots, \alpha_4$, что задает зону допустимых перегрузок C_w^0 (см. фиг. 2, б). Множество $E(P)$ угловых точек прибора состоит из четырех точек, радиус-векторы которых в системе $c\xi\eta$ имеют вид $\rho_k = (\xi_k, \eta_k) = (\pm a, \pm b)$ ($k=1, \dots, 4$). Для определенности считается $a \geq b > 0$.

Рассмотрим задачу об оптимальном контейнере: найти управление $u^* = (u_\xi^*, u_\eta^*, u_\theta^*)$, такое, что

$$J(u^*) = \min J(u), \quad u \in U \quad (3.2)$$

$$U = \{u | I_j(u) \leq \alpha_j, j=1, \dots, 4\}; \quad J(u) = \max_{i=1, \dots, 4} J_i(u)$$

$J_i(u)$ — ход по направлению $g_i \in G, I_j(u)$ — перегрузка по направлению $\gamma_j \in \Gamma$.

Каждому управлению $u = (u_\xi, u_\eta, u_\theta)$ поставим в соответствие управление $u_0 = (0, 0, u_\theta)$, положив u_ξ, u_η равными нулю. Справедливы утверждения:

$u_0 \in U$ при любом $u \in U$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_3, \alpha_2 = \alpha_4$;

Для любого u и соответствующего ему u_0 будет $J(u) \geq J(u_0)$.

Для доказательства первого утверждения выпишем проекции абсолютного ускорения точки p на оси $c\xi\eta$:

$$w_\xi(t; p, u) = u_\xi(t) - \eta u_\theta(t) - \xi \omega^2(t)$$

$$w_\eta(t; p, u) = u_\eta(t) + \xi u_\theta(t) - \eta \omega^2(t)$$

$$J_2(u_0) = J_4(u_0) = d - b \quad \text{при} \quad \Phi(u_0) \geq \beta, \quad \Phi(u_0) = \max_t |\varphi(t; u_0)|$$

Из неравенства $a \geq b$ следует $J_2(u_0) \geq J_1(u_0)$, $J(u_0) = J_2(u_0)$. Окончательно получим

$$J(u) \geq \max\{J_2(u), J_4(u)\} \geq \max(|y_c| + d \sin(\delta + |\varphi|)) - b \geq J_2(u_0) = J(u_0)$$

Утверждение доказано.

В дальнейшем рассматривается случай $\alpha_1 = \alpha_3$, $\alpha_2 = \alpha_4$. Пусть $u^* = (u_\xi^*, u_\eta^*, u_\theta^*)$ — решение задачи (3.2), тогда, по доказанному, управление $u_0^* = (0, 0, u_\theta^*)$ будет допустимо и $J(u_0^*) \leq J(u^*)$, т. е. u_0^* также оптимально. Тем самым доказано, что оптимальным движением прибора будет вращение вокруг неподвижной точки c по закону углового ускорения $u_\theta^*(t)$. Из выражения (3.3) для значения $J(u_0)$ видно, что u_θ^* можно определить как решение задачи: найти u_θ^* , такое, что

$$\Phi(u_\theta^*) = \min \Phi(u_\theta), \quad u_\theta \in U_\theta \quad (3.4)$$

$$U_\theta = \{U_\theta | b|u_\theta| + a\omega^2 \leq \alpha_1, \quad a|u_\theta| + b\omega^2 \leq \alpha_2, \quad t \geq 0\}$$

Ограничения, задающие множество допустимых управлений U_θ , можно переписать в виде $|\dot{\omega}| \leq v^+(\omega)$, $v^+(\omega) = \min\{v_1(\omega), v_2(\omega)\}$, $v_1(\omega) = (\alpha_1 - a\omega^2)/b$, $v_2(\omega) = (\alpha_2 - b\omega^2)/a$. Рассмотрим функцию $\omega^+(t)$ — решение дифференциального уравнения $\dot{\omega} = v^+(\omega)$ при начальном условии $\omega(0) = 0$. С учетом неравенства $a \geq b$ возможны три случая:

а) $\alpha \geq a\alpha_2/b$, тогда $v^+(\omega) = v_1(\omega)$,

$$\omega^+(t) = \sqrt{\alpha_1/a} \operatorname{th}(\sqrt{a\alpha_1/b}t);$$

б) $\alpha_1 \leq b\alpha_2/a$, тогда $v^+(\omega) = v_2(\omega)$,

$$\omega^+(t) = \sqrt{\alpha_2/b} \operatorname{th}(\sqrt{b\alpha_2/a}t);$$

в) $(b\alpha_2/a) < \alpha_1 < (a\alpha_2/b)$, тогда $v^+(\omega) = v_1(\omega)$ при $\omega \leq \omega_*$,

$$v^+(\omega) = v_2(\omega) \quad \text{при} \quad \omega > \omega_*, \quad \omega^+(t) = \sqrt{\alpha_1/a} \operatorname{th}(\sqrt{a\alpha_1/b}t)$$

при $t \leq \tau_*$, $\omega^+(t) = \sqrt{\alpha_2/b} \operatorname{th}(\sqrt{b\alpha_2/a}(t - \tau_*)) +$

$$2^{-1} \ln |(1 + \omega_* \sqrt{b/\alpha_2}) / (1 - \omega_* \sqrt{b/\alpha_2})| \quad \text{при} \quad t > \tau_*,$$

$$\omega_* = \sqrt{\frac{\alpha_1 a - \alpha_2 b}{a^2 - b^2}}, \quad \tau_* = \frac{b}{2\sqrt{a/\alpha_1}} \ln \left| \frac{1 + \omega_* \sqrt{a/\alpha_1}}{1 - \omega_* \sqrt{a/\alpha_1}} \right|$$

Рассмотрим управление $u_\theta^+(t) = v^+(\omega^+(t))$, при котором векторы ускорений крайних точек прибора достигают максимальных величин, допускаемых ограничениями. На фиг. 2, б изображен случай $(b\alpha_2/a) < \alpha_1 < (a\alpha_2/b)$. Цифрами 1, 2 обозначены векторы ускорений точек p_1, p_2 в момент $t=0$ при управлении u_θ^+ . Изломы годографов этих векторов соответствуют моменту $t = \tau_*$. Векторы ускорений точек p_3, p_4 не изображены — они дают симметричную картину.

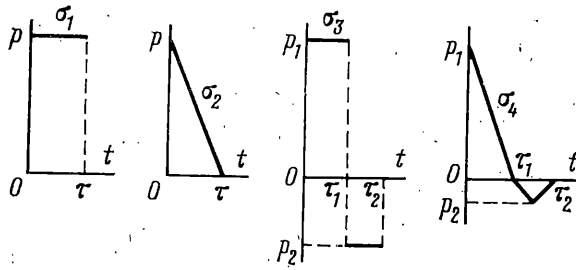
Зададим класс внешних воздействий Σ . Воздействие σ_φ принадлежит Σ , если найдется момент $t_1 \geq 0$, такой, что $\Omega(t) > \omega^+(t)$ при $0 < t < t_1$ и $|\sigma_\varphi(t)| \leq u_\theta^+(t)$ при $t \geq t_1$.

Справедливо утверждение: для каждого $\sigma_\varphi \in \Sigma$ решение задачи (3.4) имеет вид

$$u_\theta^*(t) = \begin{cases} u_\theta^+(t) & \text{при} \quad 0 \leq t < t^* \\ \sigma_\varphi(t) & \text{при} \quad t \geq t^* \end{cases} \quad (3.5)$$

где момент $t^* \geq t_1$ определяется из решения уравнения $\omega^+(t) - \Omega(t) = 0$.

Для доказательства рассмотрим любое допустимое управление u_θ и его интеграл ω . Пусть найдется момент $\tau > 0$, такой, что $\omega(\tau) > \omega^+(\tau)$. Тогда в силу непрерывности $\omega(t)$, $\omega^+(t)$ существует момент $t_1 \leq \tau$, такой,



Фиг. 3

что $\omega(\tau_1) > \omega^+(\tau_1)$, $u_0(\tau_1) > u_0^+(\tau_1)$, что противоречит ограничениям. Тем самым показано, что $\omega(t) \leq \omega^+(t)$. В силу определения функций u_0^+ , $\sigma_\psi \in \Sigma$ и с учетом неравенства $\omega(t) \leq \omega^+(t)$ запишем

$$\begin{aligned} \Phi(u_0^*) &= \max_t \left| \int_0^t (\omega^*(\tau) - \Omega(\tau)) d\tau \right| = \int_0^t (\Omega(\tau) - \omega^+(\tau)) d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t (\Omega(\tau) - \omega(\tau)) d\tau \leq \max_t \left| \int_0^t (\omega(\tau) - \Omega(\tau)) d\tau \right| = \Phi(u_0), \\ \omega^*(t) &= \int_0^t u_0^*(\tau) d\tau \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение.

Управление $u_0^* = (0, 0, u_0^*)$ решает задачу (3.2), при этом минимальные длина L и ширина H контейнера равны $L = 2d \sin(\beta + \Phi(u_0^*))$, $H = 2d \sin(\delta + \Phi(u_0^*))$. Если $\Phi(u_0^*) \geq \beta$, то оптимальное управление — любое допустимое управление $u_0 = (0, 0, u_0)$, в частности $u_0 = (0, 0, 0)$, а оптимальный контейнер — квадрат со стороной $2d$.

Для воздействия σ_ψ из Σ , взятого с обратным знаком, соответственно меняется знак и у функции $u_0^+(t)$ в выражении (3.5). В случае воздействий из расширенного таким образом множества Σ оптимальное управление $u_0^*(t)$ совпадает с выражением $v^+(\omega(t)) \text{sign}(-\dot{\varphi}(t))$, пока относительная угловая скорость $\dot{\varphi}(t) \neq 0$, и принимает значение $\sigma_\psi(t)$, как только $\dot{\varphi}(t) = 0$. Это означает, что, заменив в системе (3.1) управление u_0 функцией

$$v^*(\omega, \dot{\varphi}, \sigma_\psi) = \begin{cases} -v^+(\omega) \text{sign} \dot{\varphi} & \text{при } \dot{\varphi} \neq 0 \\ \sigma_\psi & \text{при } \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

получим систему, решение которой оптимально при каждом внешнем воздействии из заданного класса Σ .

На фиг. 3 изображены некоторые простейшие воздействия из класса Σ . Обозначим $\lambda = 0,77 \max\{\sqrt{a\alpha_1^3/b^2}, \sqrt{b\alpha_2^3/a^2}\}$, $\mu = \min\{\alpha_1/b, \alpha_2/a\}$, тогда $\sigma_1 \in \Sigma$ при $p \geq \mu$, $\sigma_2 \in \Sigma$ при $p/\tau \geq \lambda$, $\sigma_3 \in \Sigma$ при $p_1 \geq \mu$, $p_1\tau_1 + p_2(\tau_2 - \tau_1) \geq \omega^+(\tau_2)$, $\sigma_4 \in \Sigma$ при $p_1/\tau_1 \geq \lambda$, $p_1\tau_1 + p_2(\tau_2 - \tau_1) \geq 2\omega^+(\tau_2)$.

В качестве другого примера воздействий из класса Σ можно привести воздействия σ , графики которых лишь однажды попадают в полосу между линиями $\pm u_0^+(t)$, т. е. такие, что $|\sigma(t)| > u_0^+(t)$ при $t \leq \tau$, $|\sigma(t)| \leq u_0^+(t)$ при $t \geq \tau$, $\tau \geq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурецкий В. В. Об одной задаче оптимального управления. — Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 1, с. 159–162.
2. Коловский М. З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 319 с.

3. *Троицкий В. А.* Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л.: Машиностроение, 1976. 248 с.
4. *Маноиленко В. Д., Рутман Ю. Л.* Упругая аналогия оптимального управления амортизируемым объектом при минимизации наибольших перегрузок. — Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 6, с. 3—11.
5. *Бологник Н. Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983, 256 с.
6. *Черноустье Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
7. *Виноградова Т. К., Кулагин В. В.* Синтез оптимального управления как принцип оптимальности в задачах с неполной информацией. — В кн.: Моделирование и математическое обеспечение систем управления. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982, с. 243—252.
8. *Дурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Гостехиздат, 1961. 824 с.
9. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
10. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
11. *Рокаффеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
17.XI.1983