

УДК 539.3:517.946

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С ТОНКИМ ТОРОИДАЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

ЗОРИН И. С., НАЗАРОВ С. А.

Изучению свойств композиционных материалов посвящено большое количество исследований (см. библиографию в [1]). Как правило, рассмотрение проводится лишь для модели, когда матрица содержит включения эллипсоидальной формы. Ограничение (см. [1]) в значительной мере связано с тем, что здесь возможно применение известных результатов из [2].

Установлено [1], что наибольший эффект дает армирование тонкими элементами, обладающими значительно более высокой, по отношению к матрице, жесткостью. При анализе композитов с жесткими включениями естественным образом возникает задача об определении напряженно-деформированного состояния матрицы по заданным на границах включений смещениям. Подобная ситуация непосредственно реализуется, например, если тело запрессовано в среду или претерпевает изменение формы. В этом случае мерой потенциальной энергии деформации могут служить характеристики упругой задачи Робена [3, 4], являющиеся аналогами используемым в электростатике емкости и поляризации [5].

В публикуемой работе рассматривается упругое пространство с абсолютно жестким включением отличной от обычно изучаемой эллипсоидальной формы. Считается, что оно имеет вид тонкого тора, сечением которого служит произвольная двумерная область (фиг. 1, 2). При помощи метода [6] исследования решений эллиптических краевых задач в сингулярно возмущенных областях отыскивается асимптотика напряженно-деформированного состояния, а также асимптотики важнейших характеристик — тензоров упругой и поляризационной емкостей. Аналогичным задачам для уравнения Лапласа посвящены [7–9].

1. Постановка задачи. Пусть M — окружность $\{x \in R^3 : x_1^2 + x_2^2 = R^2; x_3 = 0\}$ с естественной параметризацией $\varphi \in [0, 2\pi)$. В плоскостях, нормальных к M , введем двумерные декартовы $y = (y_1, y_2)$ и полярную (r, θ) системы координат. Обозначим через $\Omega_\varepsilon = \{x \in R^3 : \varphi \in [0, 2\pi), y \in \omega_\varepsilon\}$ тонкое тороидальное тело с сечением $\omega_\varepsilon = \{y \in R^2 : \varepsilon^{-1}y \in \omega\}$ (фиг. 1). Здесь ω — некоторая фиксированная область на плоскости, имеющая единственный характерный размер и содержащая начало координат. Предположим, что отношение ε/R мало. Сделаем замену координат, будем считать, что $R=1$, а положительное число ε является малым безразмерным параметром задачи.

В области $R^3 \setminus \Omega_\varepsilon$ рассмотрим систему уравнений Ламе

$$\mu \Delta u(\varepsilon, x) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u(\varepsilon, x) - f(x) = 0 \quad (1.1)$$

с граничными условиями

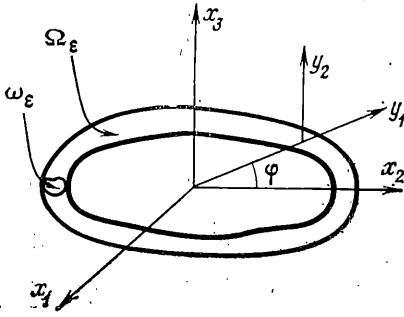
$$u(\varepsilon, x) = \psi(\varepsilon^{-1}y, \varphi) \text{ на } \partial\Omega_\varepsilon \quad (1.2)$$

и естественными условиями убывания на бесконечности

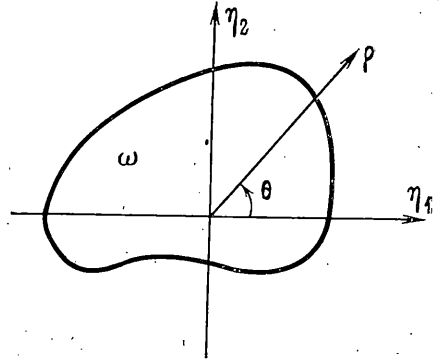
$$|u(\varepsilon, x)| \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

Здесь $u(\varepsilon, x)$ — вектор смещений, λ и μ — коэффициенты Ламе, $C^\infty(R^3) \ni f$ — массовые силы, $C^\infty(\partial\omega_\varepsilon \times M) \ni \psi$ — заданные на границе тора смещения.

2. Предварительные сведения. Обозначим через v поле смещений



Фиг. 1



Фиг. 2

в пространстве R^3 , порожденное действием массовых сил f . Классическим результатом (см., например, [4]) является следующее представление для вектор-функции $v(x)$:

$$v(x) = \int_{R^3} \Gamma(x-\xi) f(\xi) d\xi, \quad \Gamma(\eta) = \|\Gamma_{jk}(\eta)\|_{j,k=1}^3 \quad (2.1)$$

$$\Gamma_{jk}(\eta) = (8\pi\mu(\lambda+2\mu)|\eta|)^{-1} \{ (\lambda+\mu)\eta_j\eta_k|\eta|^{-2} + (\lambda+3\mu)\delta_{jk} \} \quad (2.2)$$

где $\Gamma(\eta)$ — тензор Кельвина — Соммильяны.

Из приведенных формул вытекает, что в случае, когда массовые силы f подчинены соотношению $|f(x)| = O(|x|^{\delta-2})$ при $|x| \rightarrow \infty$, где $\delta < 0$, вектор v удовлетворяет неравенству $|v(x)| \leq \text{const} (1+|x|)^{-\delta}$.

Введем матричный дифференциальный оператор $L(\partial/\partial y)$ с элементами

$$L_{jk}(\partial/\partial y) = \delta_{jk}\mu\Delta_y + (\lambda+\mu)\partial^2/\partial y_j\partial y_k \quad (j, k=1, 2) \quad (2.3)$$

$$L_{33}(\partial/\partial y) = L_{j3}(\partial/\partial y) = 0 \quad (j=1, 2), \quad L_{33}(\partial/\partial y) = \mu\Delta_y$$

и рассмотрим краевую задачу

$$L(\partial/\partial y)w(y) = 0 \text{ в } R^2 \setminus \bar{\omega}, \quad w(y) = g(y) \text{ на } \partial\omega \quad (2.4)$$

которая распадается на две: задачу двумерной теории упругости (первые две строки) и задачу антиплоского сдвига (третья строка). Сформулируем несколько известных утверждений о ее решениях.

Краевая задача (2.4) однозначно разрешима в классе ограниченных функций, а для ее решения w справедлива формула

$$w(y) = C + O(|y|^{-1}) \text{ при } |y| \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

где $C = (C_1, C_2, C_3)$ — зависящий от g постоянный вектор.

Существуют в точности три линейно-независимых решения W^j однородной ($g=0$) задачи (2.4) в классе функций, растущих на бесконечности не быстрее степени $\log |y|$. Эти решения допускают асимптотические представления

$$W_3^3(y) = (2\pi)^{-1} \log |y|^{-1} = O(1), \quad W_k^j(y) - \gamma_{jk}(y) = O(1) \\ (j, k=1, 2, |y| \rightarrow \infty)$$

$$\gamma_{jk}(y) = \frac{\lambda+3\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left\{ \delta_{jk} \log \frac{1}{|y|} + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} \frac{y_j y_k}{|y|^2} \right\} \quad (2.6)$$

где $\gamma(y)$ — двумерный тензор Соммильяны (матрица Буссинеска). Остальные компоненты W_3^j и W_j^3 ($j=1, 2$) равны нулю.

Постоянные C_j в асимптотике (2.5) решения w задачи (2.4) отыскива-

ются по вектору \mathbf{g} при помощи формул [10]:

$$C_3 = - \int_{\partial\omega} g_3(s) \frac{\partial W_3^3}{\partial n}(s) ds, \quad C_j = - \int_{\partial\omega} (g_1, g_2)(s) T_n(W_1^j, W_2^j)(s) ds \quad (j=1,2) \quad (2.7)$$

Здесь \mathbf{n} — внутренняя (по отношению к ω) нормаль к $\partial\omega$, s — координата на $\partial\omega$, $T_n(W_1^j, W_2^j)$ — вектор сил, порожденных смещениями (W_1^j, W_2^j) и действующих по площадке с нормалью \mathbf{n} .

Из (2.5) вытекает, что условием убывания на бесконечности решения задачи (2.4) является ортогональность векторов $(g_1, g_2, 0)$ и $(0, 0, g_3)$ соответственно векторам $(T_{ny1}, T_{ny2}, 0)$ (W_1^j, W_2^j) и $(0, 0, \partial W_3^3/\partial n)$ на $\partial\omega$.

Рассмотрим поле смещений \mathbf{b} , заданное равенством

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \int_M \Gamma(\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}_\tau) \boldsymbol{\beta}(\tau) d\tau \quad (2.8)$$

где $\boldsymbol{\eta}_\tau = (\cos \tau, \sin \tau, 0)$ — точка на M , $\boldsymbol{\beta}$ — гладкая вектор-функция. Поле (2.8) порождено распределенными на M с плотностью $\boldsymbol{\beta}$ сосредоточенными силами. Используя вид (2.2) тензора Кельвина — Соммильяны, можно получить следующую асимптотическую формулу (при $r \rightarrow 0$):

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \int_M \Gamma(\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}_\tau) d\tau \boldsymbol{\beta}(\varphi) + \int_M \Gamma(\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}_\tau) (\boldsymbol{\beta}(\tau) - \boldsymbol{\beta}(\varphi)) d\tau = \frac{1}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left\{ (\lambda + 3\mu) \log \frac{8}{r} \mathbf{I}(\varphi) \boldsymbol{\beta}(\varphi) + \int_0^{2\pi} \mathbf{K}(\tau, \varphi) (\boldsymbol{\beta}(\tau) - \boldsymbol{\beta}(\varphi)) d\tau \right\} + O(r) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{K}(\tau, \varphi) = \frac{1}{8 \left| \sin \frac{\tau - \varphi}{2} \right|} \begin{pmatrix} (3\lambda + 7\mu) - (\lambda + \mu) \cos(\tau + \varphi) & -(\lambda + \mu) \sin(\tau + \varphi) & 0 \\ -(\lambda + \mu) \sin(\tau + \varphi) & (3\lambda + 7\mu) + (\lambda + \mu) \cos(\tau + \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 3\mu) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi (1 + \cos^2 \theta) & \sin \varphi \cos \varphi (1 + \cos^2 \theta) & \cos \varphi \sin \theta \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \varphi (1 + \cos^2 \theta) & \sin^2 \varphi (1 + \cos^2 \theta) & \sin \varphi \sin \theta \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Отметим, что ядро $\mathbf{K}(\tau, \varphi)$ — след на M тензора (2.2). Первые два слагаемых из фигурных скобок в (2.9) суть асимптотики среднего $\Gamma(\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}_\tau)$ на M , их определение сводится к вычислению некоторых табличных [11] интегралов.

Обозначим последний интеграл из фигурных скобок в (2.9) через $\mathbf{K}\boldsymbol{\beta}(\varphi)$. Сформулируем свойства матрицы \mathbf{I} и оператора \mathbf{K} , которые понадобятся далее. При этом будут использованы операторы

$$\mathbf{\Pi}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Pi}_{(\varphi)}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

поворотов на углы $-\varphi$ и φ , соответственно, относительно оси z .

Утверждение 1. Справедливы равенства ($\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — числовой вектор):

$$\mathbf{S}(\theta) = \mathbf{\Pi}(\varphi) \mathbf{I}(\varphi, \theta) \mathbf{\Pi}^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 + \cos^2 \theta & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$Q(\alpha \exp(iq\varphi)) = \Pi(\varphi) \mathbf{K}\Pi^{-1}(\varphi) (\alpha \exp(iq\varphi)) = k^{(q)} \alpha \exp(iq\varphi)$$

$$k^{(q)} = 2 \begin{vmatrix} -(\lambda + 3\mu) a_1^{(q)} + (\lambda + \mu) a_2^{(q)} & i(\lambda + \mu) a_3^{(q)} & 0 \\ i(\lambda + \mu) a_3^{(q)} & -(\lambda + 3\mu) a_1^{(q)} - (\lambda + \mu)(a_1^{(q)} + a_2^{(q)}) & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + 3\mu) a_1^{(q)} \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

$$a_1^{(q)} = 1^{-1} + 3^{-1} + \dots + (2|q| - 1)^{-1}, \quad a_2^{(q)} = 2q^2(1 - 4q^2)^{-1}, \quad a_3^{(q)} = q(1 - 4q^2)^{-1}$$

Утверждение 2. Пусть вектор правых частей в задаче (2.4) имеет вид $(\mathbf{B}(\varphi) = \Pi(\varphi)\beta(\varphi))$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = (4\pi\mu(\nu + 2\mu))^{-1} \{ (\lambda + 3\mu) \log(8\varepsilon^{-1}|\mathbf{y}|^{-1}) \mathbf{B}(\varphi) + (\lambda + \mu) \mathbf{S}(\theta) \mathbf{B}(\varphi) + \mathbf{Q}\mathbf{B}(\varphi) \}$$

Обозначим через $\mathbf{c}(\beta)$ постоянный вектор из разложения (2.5) решения этой задачи. Тогда

$$\mathbf{c}(\beta) = (4\pi\mu(\lambda + 2\mu))^{-1} \{ (\lambda + 3\mu) \log(8\varepsilon^{-1}) \mathbf{B}(\varphi) + \mathbf{D}\mathbf{B}(\varphi) + \mathbf{Q}\mathbf{B}(\varphi) \} \quad (2.11)$$

где \mathbf{D} — числовая матрица с элементами

$$d_{ik} = \int_{\partial\omega} \{ (\lambda + 3\mu) \delta_{ki} \log \rho^{-1} + (\lambda + \mu) S_{ik}(\theta), (\lambda + 3\mu) \delta_{k2} \log \rho^{-1} + (\lambda + \mu) S_{2k}(\theta) \} \mathbf{T}_n(W_1^i, W_2^i)(s) ds, \quad d_{3j} = \int_{\partial\omega} \{ (\lambda + 3\mu) \delta_{3j} \log \rho^{-1} + (\lambda + \mu) S_{3j}(\theta) \} \frac{\partial W_3^3}{\partial n}(s) ds \quad (i=1,2; k,j=1,2,3)$$

Доказательство утверждения 1 достигается непосредственными вычислениями; при выводе формулы (2.10) использовано представление

$$\sin^{-1} \left(\frac{\varphi}{2} \right) (\exp(iq\varphi) - 1) = 2i \sum_{j=0}^{|q|-1} \exp(i(2j+1) \frac{\varphi}{2})$$

и табличные интегралы [11]. Соотношение (2.11) получается из формул (2.7) и очевидного равенства $\mathbf{C} = \mathbf{g}^\circ$ для решения задачи (2.4) при $\mathbf{g} = \mathbf{g}^\circ = \text{const}$.

Замечание 1. Пусть $\Lambda^{(j)}(\mathbf{y})$ — решения задачи (2.4), в которой $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = (\delta_{j1}, \delta_{j2}, \delta_{j3}) \log \rho^{-1}$, а $\Sigma^{(j)}(\mathbf{y})$ — решения задачи (2.4), в которой $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = (S_{1j}, S_{2j}, S_{3j})(\theta)$. Формула (2.5) для этих решений принимает вид $\Lambda^{(j)}(\mathbf{y}) = \Lambda^{(0,j)}(\mathbf{y}) + \mathbf{l}_j$, $\Sigma^{(j)}(\mathbf{y}) = \Sigma^{(0,j)}(\mathbf{y}) + \mathbf{s}_j$ ($j=1, 2, 3$), где $\Lambda^{(0,j)}$, $\Sigma^{(0,j)}$ — исчезающие на бесконечности функции, \mathbf{l}_j , \mathbf{s}_j — постоянные векторы.

Введем еще матрицы $\Lambda^{(0)}(\mathbf{y}) = (\Lambda^{(0,1)}, \Lambda^{(0,2)}, \Lambda^{(0,3)})(\mathbf{y})$, $\Sigma^{(0)}(\mathbf{y}) = (\Sigma^{(0,1)}, \Sigma^{(0,2)}, \Sigma^{(0,3)})(\mathbf{y})$, $\mathbf{I} = (\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3)$, $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$. Тогда матрицу \mathbf{D} в (2.10) можно записать в виде

$$\mathbf{D} = (\lambda + 3\mu) \mathbf{I} + (\lambda + \mu) \mathbf{s} \quad (2.12)$$

$$l_{i3} = l_{3i} = 0, \quad s_{j2} = 0 \quad (i=1, 2; j=1, 2, 3)$$

3. Асимптотика решения. Вектор-функция \mathbf{v} — решение (2.1) уравнения (1.1) в R^3 — удовлетворяет соотношениям (1.1) и (1.3), но оставляет невязку $\Psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{y}, \varphi) - \mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{y}, \varphi)) = \Psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{y}, \varphi) - \mathbf{v}(\mathbf{x}(0, \varphi)) + O(\varepsilon)$ в граничном условии (1.2). Учитывая вид (1.2), находим, что пограничный слой, компенсирующий эту невязку, должен являться решением задачи типа (2.4), параметрически зависящей от $\varphi \in [0, 2\pi)$ (получающейся [6] из системы уравнений Ламе после замены координат $\mathbf{x} \rightarrow (\boldsymbol{\eta}, \varphi) = (\varepsilon^{-1}\mathbf{y}, \varphi)$, умножения на ε^2 и перехода к $\varepsilon=0$). При этом каждое из се-

чений $R^3 \setminus \Omega_\varepsilon$ плоскостью $\{\varphi = \varphi_0\}$ трансформируется во внешность фиксированной двумерной области ω . Однако решение задачи (2.4) не всегда может служить пограничным слоем, так как, вообще говоря, оно не удовлетворяет основному условию — убыванию на бесконечности.

Следуя [6, 7], введем дополнительное поле смещений вида (2.8), порожденное распределенными на M с плотностью β сосредоточенными силами. Из (2.9) вытекает, что главный член невязки суммы $\mathbf{v} + \mathbf{b}$ в граничном условии (1.2) записывается следующим образом:

$$\Psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{y}, \varphi) - \mathbf{v}(\mathbf{x}(0, \varphi)) - (4\pi\mu(\lambda+2\mu))^{-1} \{(\lambda+3\mu) \log(8\rho^{-1}\varepsilon^{-1}) \mathbf{1}\beta(\varphi) + (\lambda+\mu) \mathbf{I}(\varphi, \theta)\beta(\varphi) + \mathbf{K}\beta(\varphi)\} + O(\varepsilon). \quad (3.1)$$

Плотность β найдем из условия убывания на бесконечности пограничного слоя, компенсирующего невязку (3.1). В силу утверждений 1 и 2 это условие после перехода к системе координат, повернутой относительно исходной на угол $-\varphi$ в плоскости $\{z=0\}$, принимает вид интегрального уравнения

$$\{(\lambda+3\mu) \log(8\varepsilon^{-1}) \mathbf{1} + \mathbf{D} + \mathbf{Q}\} \mathbf{B}(\varphi) = 4\pi\mu(\lambda+2\mu) \mathbf{\Pi}(\varphi) \times (\Psi(\varphi) - \mathbf{v}(\mathbf{x}(0, \varphi))) \quad (3.2)$$

Здесь $\Psi(\varphi)$ — вектор \mathbf{C} из формулы (2.5) для решения задачи (2.4) с правой частью $\mathbf{g} = \Psi$, т. е. $L(\partial/\partial\eta)\mathbf{h}(\eta, \varphi) = 0$ в $R^2 \setminus \bar{\omega}$, $\mathbf{h}(\eta, \varphi) = \Psi(\eta, \varphi)$ на $\partial\omega$, $\mathbf{h}(\eta, \varphi) = \mathbf{h}^\circ(\eta, \varphi) + \Psi(\varphi)$, $\mathbf{h}^\circ(\eta, \varphi) = O(|\eta|^{-1})$ при $|\eta| \rightarrow \infty$.

Согласно сказанному, будем искать главный член асимптотики поля смещений \mathbf{u} в виде

$$\mathbf{u}(\varepsilon, \mathbf{x}) \sim \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) + \zeta(r) \mathbf{H}(\varepsilon^{-1}\mathbf{y}, \varphi) = \mathbf{u}^\varepsilon(\varepsilon, \mathbf{x}) \quad (3.3)$$

где \mathbf{v} — решение (1.4) уравнения (1.1) в R^3 , \mathbf{b} — поле смещений, найденное по некоторой плотности β , подлежащей дальнейшему определению, \mathbf{H} — убывающее на бесконечности решение краевой задачи (2.4) (функция пограничного слоя):

$$\mathbf{H}(\eta, \varphi) = \mathbf{h}^\circ(\eta, \varphi) - (4\pi\mu(\lambda+2\mu)) \mathbf{\Pi}^{-1}(\varphi) \{(\lambda+3\mu) \Lambda^{(0)}(\mathbf{y}) + (\lambda+\mu) \Sigma^{(0)}(\mathbf{y})\} \mathbf{\Pi}(\varphi) \beta(\varphi) \quad (3.4)$$

(см. замечание 1 и (3.2)), ζ — срезающая функция: $\zeta \in C_0^\infty(R^1)$, $\zeta(t) = 1$ при $|t| < 1/3$, $\zeta(t) = 0$ при $|t| > 2/3$.

Итак, остается найти вектор β из интегрального уравнения (3.2). С этой целью разложим правую часть в ряд Фурье

$$\mathbf{G}(\varphi) = 4\pi\mu(\lambda+2\mu) \mathbf{\Pi}(\varphi) \{\Psi(\varphi) - \mathbf{v}(\mathbf{x}(0, \varphi))\} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(q)} \exp(iq\varphi) \quad (3.5)$$

Так как $\mathbf{G} \in C^\infty(M)$, то справедливы неравенства

$$|\mathbf{G}^{(q)}| \leq c_N |q|^{-N} \quad (c_N = \text{const}) \quad (3.6)$$

для любого натурального N . Вектор-функцию $\mathbf{B}(\varphi)$ также ищем в виде ряда Фурье

$$\mathbf{B}(\varphi) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \mathbf{B}^{(q)} \exp(iq\varphi) \quad (3.7)$$

Подставляя (3.5), (3.7) в (3.2) и используя утверждение 1, получим

$$(\lambda+3\mu) \log(8\varepsilon^{-1}) \mathbf{B}^{(q)} + \mathbf{D} \mathbf{B}^{(q)} + \mathbf{k}^{(q)} \mathbf{B}^{(q)} = \mathbf{G}^{(q)} \quad (q=0, \pm 1, \dots) \quad (3.8)$$

где $\mathbf{k}^{(q)}$ и \mathbf{D} — матрицы (2.10) и (2.12) соответственно.

Замечание 2. При $q \rightarrow \infty$ матрица $-(\lambda+3\mu)^{-1} \mathbf{k}^{(q)} / a_1^{(q)}$ поэлементно стремится к единичной. Так как $a_1^{(q)} = \log(2(|q|)^{1/2}) + c + o(1)$ при $q \rightarrow \infty$ (c — постоянная Эйлера), то собственные числа матриц $\mathbf{k}^{(q)}$, а следова-

тельно, и $\mathbf{D}+\mathbf{k}^{(q)}$, суть величины $O(-\log |q|)$. Поэтому система (3.2) интегральных уравнений разрешима не для всех малых $\varepsilon > 0$.

Следуя [6, 7], найдем асимптотическое решение, удовлетворяющее (3.2) с точностью $O(\varepsilon^N)$ при любом N , а именно:

$$\mathbf{V}^\varepsilon(\varphi) = \sum_{|q| \leq 1/\varepsilon^{1/2}} \mathbf{V}^{(q)} \exp(iq\varphi),$$

$$\mathbf{V}^{(q)} = [(\lambda + 3\mu) \log(8\varepsilon^{-1}) \mathbf{1} + \mathbf{D} + \mathbf{k}^{(q)}]^{-1} \mathbf{G}^{(q)} \quad (3.9)$$

При достаточно малом ε и $|q| \leq 1/\varepsilon^{1/2}$ в силу сказанного в замечании 2 относительно собственных чисел указанной матрицы последняя обратима. Имеем

$$(\lambda + 3\mu) \log \frac{8}{\varepsilon} \mathbf{V}^\varepsilon(\varphi) + \mathbf{D} \mathbf{V}^\varepsilon(\varphi) + \mathbf{Q} \mathbf{V}^\varepsilon(\varphi) = \sum_{|q| \leq 1/\varepsilon^{1/2}} \mathbf{G}^{(q)} \exp(iq\varphi)$$

Поэтому невязка вектор-функции $\mathbf{V}^\varepsilon(\varphi)$ в уравнении (3.2) представима в виде $\sum \mathbf{G}^{(q)} \exp(iq\varphi)$ и при $|q| > 1/\varepsilon^{1/2}$, согласно (3.6), допускает оценку

$$\left| \sum_{|q| > 1/\varepsilon^{1/2}} \mathbf{G}^{(q)} \exp(iq\varphi) \right| \leq c_N \sum_{|q| > 1/\varepsilon^{1/2}} |q|^{-N} |\exp(iq\varphi)| \leq C_N \varepsilon^{N/2-1}$$

при любом N и, следовательно, сверхстепенным образом убывает при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Разность $\mathbf{U} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^\varepsilon$ решения задачи (1.1)–(1.3) и вектора (3.5) удовлетворяет краевой задаче

$$\mu \Delta \mathbf{U}(\varepsilon, \mathbf{x}) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{U}(\varepsilon, \mathbf{x}) - \mathbf{f}^\varepsilon(\varepsilon, \mathbf{x}) = 0 \text{ в } R^3 \setminus \Omega_\varepsilon$$

$$\mathbf{U}(\varepsilon, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\psi}^\varepsilon(\varepsilon, \mathbf{y}, \varphi) \text{ на } \partial\Omega_\varepsilon, \quad |\mathbf{U}(\varepsilon, \mathbf{x})| \rightarrow 0 \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$$

Непосредственными вычислениями находим, что $\mathbf{f}^\varepsilon(\varepsilon, \mathbf{x}) = 0$ при $r > 2/3$ и справедливы оценки ($p, q, n = 0, 1, \dots$):

$$\left| \frac{\partial^{p+n+q} \boldsymbol{\psi}^\varepsilon}{\partial y_1^p \partial y_2^q \partial \varphi^n}(\varepsilon, \mathbf{y}, \varphi) \right| = O(\varepsilon^{1-p-q}),$$

$$\left| \frac{\partial^{p+n+q} \mathbf{f}^\varepsilon}{\partial y_1^p \partial y_2^q \partial \varphi^n}(\varepsilon, \mathbf{y}, \varphi) \right| = O(\varepsilon |\mathbf{y}|^{2-p-q})$$

Поэтому при помощи стандартной схемы (см. [6]) из энергетической оценки, неравенств Корна и Харди получаем, что $\Pi(\mathbf{u} - \mathbf{u}^\varepsilon) = O(\varepsilon^2 |\log \varepsilon|^3)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где Π — функционал упругой энергии.

4. Вычисление тензоров упругой и поляризационной емкостей. Эти важные интегральные характеристики композиционного материала вводятся аналогично широко используемым в электростатике емкости и поляризации [5] и могут быть найдены из решения упругой задачи Робена [3]. Отметим, что тензоры упругой и поляризационной емкостей для шара и эллипсоида приведены в [4].

Рассмотрим поля смещений $\mathbf{e}^{(j)}$ и $\mathbf{e}^{(k)} \times \mathbf{x} (\mathbf{e}^{(i)} = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}))$, а также решения \mathbf{Y}^j и \mathbf{Z}^k задачи (1.1)–(1.3) в отсутствие массовых сил ($\mathbf{f} = 0$) при $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{e}^{(j)}$ и $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{e}^{(k)} \times \mathbf{x}$ соответственно. Тензоры с компонентами $C_{jk}^e = \Pi(\mathbf{Y}^j, \mathbf{Y}^k)$, $C_{jk}^{e,p} = \Pi(\mathbf{Y}^j, \mathbf{Z}^k)$, $C_{jk}^p = \Pi(\mathbf{Z}^j, \mathbf{Z}^k)$ с точностью до нормирующего множителя совпадают с упоминавшимися тензорами упругой и поляризационной емкостей.

В рассматриваемом случае, как уже отмечалось, $\mathbf{f} = 0$, а интегральное

уравнение (3.2) решается явно. Поэтому асимптотика (3.3) полей смещений Y^j и Z^j приобретает особо простой вид. Обозначим через $\beta^{c,h}$ и $\beta^{p,h}$ отвечающие Y^h и Z^h плотности. Окружим теперь включение сферой S_d^2 диаметра d и применим к указанным выше векторам формулу Бетти. Переходя к пределу при $d \rightarrow \infty$, находим

$$C_{jk}^c(\omega_\varepsilon) = \int_M e^{(j)} \beta^{c,h}(\tau) d\tau + O(\varepsilon |\log \varepsilon|),$$

$$C_{jk}^p(\omega_\varepsilon) = \int_M (e^{(j)} \times \eta_c) \beta^{p,h}(\tau) d\tau + O(\varepsilon |\log \varepsilon|) \quad (4.1)$$

$$C_{jk}^{c,p}(\omega_\varepsilon) = \int_M (e^{(j)} \times \eta_c) \beta^{c,h}(\tau) d\tau + O(\varepsilon |\log \varepsilon|) = \int_M e^{(j)} \beta^{p,h}(\tau) d\tau + O(\varepsilon |\log \varepsilon|)$$

Приращение удельной потенциальной энергии деформации, вызванное в отсутствие массовых сил перемещением и поворотом включения ($\psi = c + p \times x$, c и p — постоянные векторы), может быть представлено теперь согласно формуле Клапейрона в виде

$$2^{-1}(c^c c + 2c^c p + p^c p) \quad (4.2)$$

В то же время выражения

$$F = C^c c + C^c p, \quad M = C^p p + C^c p c \quad (4.3)$$

имеют механический смысл главного вектора и главного момента контактных усилий, приведенных к началу координат. Эти обстоятельства и дают основание трактовать емкостные характеристики как меру потенциальной энергии упругой деформации композиционного материала.

5. *Примеры.* 1. В простейшем случае, когда область ω_ε представляет собой круг $\{y \in R^2 : |y| \leq d\}$, непосредственно проверяется, что в формуле (2.12) для матрицы D первое слагаемое обращается в нуль, а s — диагональная матрица $s = 2^{-1} \text{diag}(3, 0, 1)$. Несложные вычисления, использующие соотношения (4.1), показывают, что $(C^c, p = 0)$:

$$C^c = 4\pi^2 \mu R (\lambda + 2\mu) \text{diag} \left(\frac{a_{11} + a_{22}}{a_{11} a_{22} + b^2}, \frac{a_{11} + a_{22}}{a_{11} a_{22} + b^2}, \frac{2}{a_{33}^\circ} \right)$$

$$C^p = 4\pi^2 \mu R^3 (\lambda + 2\mu) \text{diag} (a_{33}^{-1}, a_{33}^{-1}, 2(a_{22}^\circ)^{-1}), \quad (5.1)$$

$$a_{11} = (\lambda + 3\mu) (\log(8Rd^{-1}) - 2)^{+1/3} (\lambda + \mu)$$

$$a_{22} = (\lambda + 3\mu) (\log(8Rd^{-1}) - 2)^{+2/3} (\lambda + \mu), \quad a_{33} = (\lambda + 3\mu) (\log(8Rd^{-1}) - 2)^{+1/2} (\lambda + \mu)$$

$$b = -2/3, \quad a_{22}^\circ = (\lambda + 3\mu) \log(8Rd^{-1}), \quad a_{33}^\circ = (\lambda + 3\mu) \log(8Rd^{-1}) + 1/2 (\lambda + \mu)$$

2. Допустим, что сечение области Ω_ε есть отрезок длины $2d$, расположенный симметрично относительно начала системы координат $y_1 O y_2$ и наклоненный под углом γ к оси y_1 . В этом случае легко убедиться, что $l = \log 2 \text{diag}(1, 1, 1)$, $s_{11} = 1 + \cos^2 \gamma$, $s_{33} = \sin^2 \gamma$, $s_{13} = s_{31} = \cos \gamma \sin \gamma$, $s_{2j} = s_{j2} = 0$ ($j = 1, 2, 3$). Выражения (4.1) для тензоров C^c , C^p и $C^{c,p}$ приобретают вид

$$C^c = 4\pi^2 \mu R (\lambda + 2\mu) \text{diag} \left(\frac{(a_{11} + a_{22}) a_{33} - a_{13}^2}{(a_{11} a_{22} + b^2) a_{33} - a_{22} a_{13}^2}, \frac{(a_{11} + a_{22}) a_{33} - a_{13}^2}{(a_{11} a_{22} + b^2) a_{33} - a_{22} a_{13}^2}, \frac{2a_{11}^\circ}{a_{11}^\circ a_{33}^\circ - (a_{13}^\circ)^2} \right)$$

$$C^p = 4\pi^2 \mu R^3 (\lambda + 2\mu) \text{diag} \left(\frac{a_{11} a_{22} + b^2}{(a_{11} a_{22} + b^2) a_{33} - a_{22} a_{13}^2}, \frac{a_{11} a_{22} + b^2}{(a_{11} a_{22} + b^2) a_{33} - a_{22} a_{13}^2}, \frac{2}{a_{22}^\circ} \right)$$

$$C^{c,p} = 4\pi^2 \mu R^2 (\lambda + 2\mu) \frac{2a_{22} a_{13}}{(a_{11} a_{22} + b^2) a_{33} - a_{22} a_{13}^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

В формулах (5.2) выражения a_{ij}° , a_{ij} и b имеют тот же смысл, что и в первом примере: $a_{11} = (\lambda + 3\mu) (\log(16Rd^{-1}) - 2) + (\lambda + \mu) (\cos^2 \gamma - 1/3)$, $a_{22} = (\lambda + 3\mu) (\log(16Rd^{-1}) - 2) - 2/3(\lambda + \mu)$, $a_{33} = (\lambda + 3\mu) (\log(16Rd^{-1}) - 2) + (\lambda + \mu) \sin^2 \gamma$, $a_{13} = a_{13}^{\circ} = (\lambda + \mu) \sin \gamma \cos \gamma$, $b = -2/3$, $a_{11}^{\circ} = (\lambda + 3\mu) \log(16Rd^{-1}) + (\lambda + \mu) (1 + \cos^2 \gamma)$; $a_{22}^{\circ} = (\lambda + 3\mu) \log(16Rd^{-1})$, $a_{33}^{\circ} = (\lambda + 3\mu) \log(16Rd^{-1}) + (\lambda + \mu) \sin^2 \gamma$.

Отметим, наконец, что в примере 1 эквивалентным (по средней упругой емкости) рассмотренному тору является шар радиуса $\pi(2\lambda + 5\mu) / ((a_{11} + a_{22})(a_{11}a_{22} + b^2))^{-1} + (a_{33})^{-1} / 9$. Объем этого шара имеет порядок $O(|\log(R/d)|^{-3})$, в то время как объем тора $2\pi^2 R d^2$ значительно меньше. В примере 2 тензор $C^{\circ, p}$ отличен от нуля и, следовательно, найти эквивалентный такому тороидальному включению шар невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
2. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
3. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
4. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
5. Полюа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
6. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: изд-во Тбил. ун-та. 1981. 206 с.
7. Федорюк М. В. Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения. — В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск: Наука, 1980, № 1, с. 113—131.
8. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Об асимптотике решений задачи Дирихле в трехмерной области с вырезанным тонким телом. — Докл. АН СССР, 1981, т. 256, № 1, с. 37—39.
9. Федорюк М. В. Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1981, т. 45, № 1, с. 167—186.
10. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. — Math. Nachr., 1977, В. 76, S. 29—60.
11. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1974. 1108 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
27.II.1984