МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1985

УДК 539.3

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

КУНТАШЕВ П. А., НЕМИРОВСКИЙ Ю. В.

Процедура метода возмущений широко применяется для решения разнообразных задач физики и механики [1, 2]. Однако вопросы обоснования применимости метода рассмотрены недостаточно полно. В [3] доказана сходимость решения по методу возмущений для случая плоской задачи теории упругости неоднородных тел, используя представления гармонических функций через интегралы со слабой особенностью и многомерных сингулярных интегралов. В [4] сравнивается известное точное решение и решение, построенное по методу возмущений для одного частного случая плоской задачи, и отмечается их совпадение в области сходимости.

В публикуемой работе доказана сходимость в метрике энергетического пространства решения смешанной задачи теории упругости для изотропного трехмерного неоднородного тела, исходя из общих свойств положительной определенности оператора теории упругости.

Рассмотрим линейно-упругое изотропное тело, занимающее конечную область V с поверхностью A, на части A_1 которой смещения равны нулю, а на остальной части A_2 поверхностные силы равны нулю. Тело находится в равновесии под действием объемных сил $\mathbf{X}(\cdots)$ и дисторсии $\varepsilon_{ij}{}^0(\cdots)$, $(\cdots)\in V$ [5] (например, температурной дисторсии $\varepsilon_{ij}{}^0=\alpha(T-T_0)\delta_{ij}$).

В результате в нем возникают смещения $\mathbf{u}$, деформации ε_{ij} и напряжения σ_{ij}. Будем считать, что свойства материала и деформированное состояние тела позволяют применить соотношения линейной теории упругости [5]:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})={}^1/_2(u_{i,\,j}+u_{j,\,i})\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3)\tag{1}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}(\mathbf{u})=(2\mu\delta_{ik}\delta_{jl}+\lambda\delta_{ij}\delta_{kl})\,\varepsilon_{kl}(\mathbf{u})-\eta_{ij}{}^0,\\ \eta_{ij}{}^0=2\mu\varepsilon_{ij}{}^0+\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}{}^0\end{gathered}\tag{2}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера; запятая указывает на частное дифференцирование по соответствующей координате; по повторяющимся индексам производится суммирование; λ, μ — упругие параметры Ламе.

Задача о равновесии тела сводится к определению смещения $\mathbf{u}$, удовлетворяющего уравнению

$$-\sigma_{ji,\,j}(\mathbf{u})=\mathbf{X}_i(\cdots),\quad (\cdots)\in V\tag{3}$$

и граничным условиям

$$\sigma_{ji}(\mathbf{u})n_j=0,\quad (\ldots)\in A_2;\qquad \mathbf{u}=0,\quad (\ldots)\in A_1\tag{4}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор единичной внешней нормали к поверхности A.

Уравнения равновесия (3) можно записать в виде

$$A(\mathbf{u})=\mathbf{X}^0\tag{5}$$

$$(A(\mathbf{u}))_i=-((2\mu\delta_{ik}\delta_{jl}+\lambda\delta_{ij}\delta_{kl})\,\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}))_{,j},\quad X_i^0=X_i-\eta_{ji,\,j}{}^0$$

Упругие свойства изотропного тела V будем характеризовать заданием вектор-функции $\mathbf{E}(\cdots)=(\lambda(\cdots),\ \mu(\cdots))$, полагая, что она принадлежит множеству строго положительных гладких функций

$$M_+=\{\mathbf{E}(\cdots)=(\lambda(\cdots),\ \mu(\cdots))\,|\,\lambda(\cdots)\in C^1(V),$$
$$\mu(\cdots)\in C^1(V),\ \lambda(\cdots)>0,\ \mu(\cdots)>0,\ \forall(\cdots)\in V\} \tag{6}$$

В качестве области определения $D(A)$ оператора A введем пространство дважды непрерывно дифференцируемых смещений, удовлетворяющих граничным условиям (4):

$$D(A)=\{\mathbf{u}(\cdots)\,|\,u_i(\cdots)\in C^2(V),\ \mathbf{u}(\cdots)=0,$$
$$(\cdots)\in A_1,\ \sigma_{ji}(\mathbf{u})n_j(\cdots)=0,\ (\cdots)\in A_2\} \tag{7}$$

Относительно внешней нагрузки $\mathbf{X}$ и дисторсии $\varepsilon_{ij}{}^0$ примем, что вектор эквивалентной нагрузки $\mathbf{X}^0$ принадлежит пространству $L_2(V)$:

$$\|\mathbf{X}^0\|^2=(\mathbf{X}^0,\mathbf{X}^0)=\int_V X_i{}^0X_i{}^0\,dV<\infty \tag{8}$$

Учитывая [6], на $D(A)$ можно ввести так называемое энергетическое скалярное произведение и соответствующую норму

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}]_E=(A\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_V(2\mu\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})+\lambda\varepsilon_{kk}(\mathbf{u})\varepsilon_{nn}(\mathbf{v})\,dV,\quad \|\mathbf{u}\|_E=\sqrt{[\mathbf{u},\mathbf{u}]_E} \tag{9}$$

(пополнение $D(A)$ называют энергетическим пространством H). $D(A)\subset\subset H\subset L_2(V)$ и энергетическая норма $\|\mathbf{u}\|_E$ по непрерывности продолжается на все H, а также при определенных условиях гладкости на границу A тела имеет место неравенство положительной определенности [7]:

$$[\mathbf{u},\ \mathbf{u}]_E\geqslant\gamma(\mathbf{u},\ \mathbf{u})\quad(\gamma=\text{const}>0,\ \forall\mathbf{u}\in H) \tag{10}$$

Введем понятие обобщенного решения $\mathbf{u}$ задачи теории упругости

$$\mathbf{u}\in H:\ [\mathbf{u},\ \mathbf{v}]_E=(\mathbf{X}^0,\ \mathbf{v}),\quad \forall\mathbf{v}\in H \tag{11}$$

В [6] доказывается, что в предположениях (8) обобщенное решение (11) существует и единственно. В частном случае, когда $\mathbf{u}\in D(A)$, оно удовлетворяет системе (3), (4) в обычном смысле.

Часто практическое решение задачи теории упругости для неоднородного тела бывает связано с большими вычислительными трудностями. В этом случае удобно воспользоваться процедурой метода возмущений, которая сводит задачу теории упругости неоднородного тела к серии задач теории упругости для однородного тела.

Разобъем заданное неоднородное распределение упругих модулей $\mathbf{E}\in\in M_+$ на сумму однородного распределения $\mathbf{E}_0$ и возмущающей добавки $-t\mathbf{E}_1$ так, чтобы

$$\begin{gathered}\mathbf{E}(\cdots)=\mathbf{E}_0-t\mathbf{E}_1(\cdots),\quad \mathbf{E}_0=(\mu_0,\ \lambda_0),\quad \mathbf{E}_1(\cdots)=(\mu_1(\cdots),\ \lambda_1(\cdots))\\ (0<t<1,\ 0<\mu_1(\cdots)<\mu_0,\ 0<\lambda_1(\cdots)<\lambda_0)\end{gathered} \tag{12}$$

Это всегда можно сделать взяв, например, для фиксированного числа t, λ_0, μ_0 так, что

$$\begin{gathered}1-r<t<1,\quad a_1<\lambda_0<(1-t)^{-1}b_1,\quad a_2<\mu_0<(1-t)^{-1}b_2\\ r=\min_{i=1,2} b_ia_i^{-1},\quad a_1=\max_{(\ldots)\in V}\lambda,\quad b_1=\min_{(\ldots)\in V}\lambda,\quad a_2=\max_{(\ldots)\in V}\mu,\quad b_2=\min_{(\ldots)\in V}\mu\end{gathered} \tag{13}$$

Обобщенное решение задачи теории упругости (11) будем искать в виде ряда по степеням t:

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\sum_{k=1}^{\infty} t^k\mathbf{u}_k,\quad \mathbf{u}_k\in H\quad (k=0,1,2,\ldots)\tag{14}$$

Подставив представления (12), (14) в (11), сгруппировав и приравняв нулю члены при одинаковых степенях t, получим серию задач для определения $\mathbf{u}_k$:

$$\mathbf{u}_0\in H:\ [\mathbf{u}_0,\ \mathbf{v}]_{E_0}=(\mathbf{X}^0,\ \mathbf{v}),\ \ \forall\mathbf{v}\in H\tag{15}$$

$$\mathbf{u}_{k+1}\in H:\ [\mathbf{u}_{k+1},\ \mathbf{v}]_{E_0}=[\mathbf{u}_k,\ \mathbf{v}]_{E_1},\ \ \forall\mathbf{v}\in H\ \ (k=0,1,\ldots)\tag{16}$$

Как видно из (15), $\mathbf{u}_0$ – решение исходной задачи теории упругости (11) для однородного тела $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0$. Соотношения (16) дают рекуррентную последовательность задач, в которых решение $\mathbf{u}_k$ определяется предыдущим решением $\mathbf{u}_{k-1}$. Ниже будет показано, что решения $\mathbf{u}_k\in H$ существуют и единственны. Предварительно проведем некоторые оценки.

В неравенстве $|[\mathbf{v},\ \mathbf{w}]_{E_1}|\leqslant{}^1/_2[\mathbf{v},\ \mathbf{v}]_{E_1}+{}^1/_2[\mathbf{w},\ \mathbf{w}]_{E_1}$, следующем из неотрицательности нормы, правая часть не превосходит ${}^1/_2[\mathbf{v},\ \mathbf{v}]_{E_0}+{}^1/_2[\mathbf{w},\ \mathbf{w}]_{E_0}$, что следует из (12) и свойства $[\mathbf{v},\ \mathbf{v}]_{E_0-E_1}\geqslant 0$. Поэтому

$$|[\mathbf{v},\ \mathbf{w}]_{E_1}|\leqslant{}^1/_2[\mathbf{v},\ \mathbf{v}]_{E_0}+{}^1/_2[\mathbf{w},\ \mathbf{w}]_{E_0}\tag{17}$$

Покажем, что линейные функционалы $l_k(\mathbf{v})=[\mathbf{u}_k,\ \mathbf{v}]_{E_1}$ из (16) ограничены в H. Предположим, что $\mathbf{u}_k\in H$, тогда, используя (17), имеем

$$\|l_k\|_{E_0}=\sup_{\|\mathbf{v}\|_{E_0}=1}|l_k(\mathbf{v})|=\sup_{\|\mathbf{v}\|_{E_0}=1}|[\mathbf{u}_k,\mathbf{v}]_{E_1}|\leqslant\sup_{\|\mathbf{v}\|_{E_0}=1}({}^1/_2[\mathbf{u}_k,\mathbf{u}_k]_{E_0}+$$
$$+{}^1/_2[\mathbf{v},\mathbf{v}])_{E_0})={}^1/_2[\mathbf{u}_k,\mathbf{u}_k]_{E_0}+{}^1/_2<\infty$$

Поскольку $\mathbf{u}_0\in H$, то ограниченность всех линейных функционалов l_k в H следует по индукции. Существование и единственность решения $\mathbf{u}_{k+1}$ (16) получаем из теоремы Риса [8] о том, что существует единственный элемент $\mathbf{u}_{k+1}$ из гильбертова пространства H, который представляет заданный ограниченный линейный функционал $l_k(\mathbf{v})=[\mathbf{u}_k,\ \mathbf{v}]_{E_1}$ в виде скалярного произведения (16). Тем самым установлено, что однозначно определено каждое слагаемое ряда (14) для смещений в неоднородном теле.

Докажем, что ряд (14) сходится в энергетической метрике H; в силу полноты H для этого достаточно проверить, что

$$\left[\sum_{k=m}^{n} t^k\mathbf{u}_k,\sum_{k=m}^{n} t^k\mathbf{u}_k\right]_{E_0}\to 0\quad\text{при}\quad m\to\infty,\quad n\to\infty\tag{18}$$

Установим предварительно некоторые свойства функций $\mathbf{u}_k$. Возьмем соотношения (16) для функций $\mathbf{u}_m$, $\mathbf{u}_n$: $[\mathbf{u}_m,\ \mathbf{v}_1]_{E_0}=[\mathbf{u}_{m-1},\ \mathbf{v}_1]_{E_1}$, $\forall\mathbf{v}_1\in H$; $[\mathbf{u}_n,\ \mathbf{v}_2]_{E_0}=[\mathbf{u}_{n-1},\ \mathbf{v}_2]_{E_1}$, $\forall\mathbf{v}_2\in H$. Принимая $\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_{n-1}$, $\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_{m-1}$ и вычитая из первого соотношения второе, получим $[\mathbf{u}_m,\ \mathbf{u}_{n-1}]_{E_0}=[\mathbf{u}_n,\ \mathbf{u}_{m-1}]_{E_0}$.

Применяя это свойство p раз, будем иметь

$$[\mathbf{u}_m,\ \mathbf{u}_n]_{E_0}=[\mathbf{u}_{m-p},\ \mathbf{u}_{n+p}]_{E_0}\quad (m>p)\tag{19}$$

Положим в соотношении (16) для $\mathbf{u}_{k+1}$ функцию $\mathbf{v}=\mathbf{u}_{k+1}$; используя неравенство (17), найдем

$$[\mathbf{u}_{k+1},\ \mathbf{u}_{k+1}]_{E_0}=[\mathbf{u}_k,\ \mathbf{u}_{k+1}]_{E_1}\leqslant{}^1/_2[\mathbf{u}_k,\ \mathbf{u}_k]_{E_0}+{}^1/_2[\mathbf{u}_{k+1},\ \mathbf{u}_{k+1}]_{E_0}$$

откуда $[\mathbf{u}_{k+1},\ \mathbf{u}_{k+1}]_{E_0}\leqslant[\mathbf{u}_k,\ \mathbf{u}_k]_{E_0}$; эта цепочка неравенств для $k=0,\ 1,\ 2\ldots$ дает другое свойство

$$[\mathbf{u}_k,\ \mathbf{u}_k]_{E_0}\leqslant[\mathbf{u}_0,\ \mathbf{u}_0]_{E_0}\quad (k=1,\ 2,\ldots)\tag{20}$$

Обобщением (20) является следующее неравенство:

$$|[\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_p]_{E_0}| \leqslant [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0]_{E_0} \qquad (21)$$

которое вытекает из неравенства Шварца с учетом (20): $|[\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_p]_{E_0}| \leqslant \leqslant \|\mathbf{u}_k\|_E \|\mathbf{u}_p\|_E \leqslant \|\mathbf{u}_0\|_E \|\mathbf{u}_0\|_E$.

Для доказательства свойства (18) сходимости ряда смещений (14) построим следующую цепочку неравенств, используя последовательно свойства (19), (21):

$$\left[\sum_{k=m}^{n} t^k \mathbf{u}_k, \sum_{k=m}^{n} t^k \mathbf{u}_k\right]_{E_0} = \sum_{p=2m}^{2n} t^p \sum_{i\geqslant m, j\geqslant m, i+j=p} [\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j]_{E_0} =$$

$$= \sum_{p=2m}^{2n} t^p (p-2m+1) [\mathbf{u}_{p-1}, \mathbf{u}_1]_{E_0} \leqslant \sum_{p=2m}^{2n} t^p (p-2m+1) |[\mathbf{u}_{p-1}, \mathbf{u}_1]_{E_0}| \leqslant$$

$$\leqslant [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0]_{E_0} \sum_{p=2m}^{2n} (p-2m+1) t^p \leqslant [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0]_{E_0} \sum_{p=2m}^{2n} p t^p$$

При принятом условии $0<t<1$ числовой ряд $\sum pt^2$ $(p=1, 2, \ldots)$ является сходящимся, поэтому последовательность его частных сумм является фундаментальной: $\sum pt^p \to 0$ $(p=n, n+1, \ldots, m)$ при $m\to\infty$, $n\to\infty$. Поэтому в полученной выше цепочке неравенств последнее выражение стремится к нулю при $m\to\infty$, $n\to\infty$. Свойство сходимости ряда (14) доказано.

Итак, решение задачи теории упругости (3), (4) для неоднородного тела можно искать в виде ряда $\mathbf{u} = \sum t^k \mathbf{u}_k$ $(k=0, 1, \ldots)$, который является сходящимся в метрике энергетического пространства. При этом функции $\mathbf{u}_k \in H$ однозначно определяются из рекуррентной цепочки (15), (16) задач теории упругости для однородного тела. На основе неравенства (10) построенный таким образом ряд сходится также и в метрике пространства $L_2(V)$ квадратично суммируемых функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
2. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных сред. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.
3. *Mazilu P.* Sur un probleme plan de la theorie de l'elasticite des milieux heterogenes.– C. r. Acad. sci. Ser. A, B, 1969, v. 268, № 14, p. 778–781.
4. *Ломакин В. А., Шейнин В. И.* О применимости метода малого параметра для оценки напряжений в неоднородных упругих средах.–Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3, с. 33–39.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
7. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.– Л.: Гостехиздат, 1952. 216 с.
8. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.

Красноярск

Поступила в редакцию
1.VII.1983