УДК 531.395

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АМОРТИЗАТОРОВ

БАЛАНДИН Д. В.

Рассматриваются задачи определения оптимальных параметров нелинейных амортизаторов ударных воздействий по критерию минимума максимальной перегрузки при ограничении на ход амортизации и по критерию минимума хода амортизации при ограничении на максимальную перегрузку. Аналогичные задачи, но для другого вида характеристик демпфера и упругого элемента амортизатора, решены в [1, 2].

Уравнения динамики системы «объект – амортизатор» имеют вид

$$x^{\bullet}=y, \quad y^{\bullet}=-qf(y)-\varphi(kx), \quad x(0)=0, \quad y(0)=y_0 \tag{1}$$

Здесь f, φ – характеристики демпфера и упругого элемента соответственно, q, k – параметры.

Пусть $q, k>0$, а f, φ – непрерывные на R^1 функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{gathered} f, \ \varphi\in C^2(R^1\setminus\{0\}) \\ f(y)=-f(-y), \quad \varphi(kx)=-\varphi(-kx), \quad \frac{df}{dy}>0, \quad \frac{d\varphi}{dx}>0 \\ (d^2f/dy^2)y-df/dy\geqslant 0, \quad (d^2\varphi/dx^2)\operatorname{sign}x\geqslant 0 \end{gathered} \tag{2}$$

Этим условиям удовлетворяют, например, амортизаторы с характеристиками $f(y)=|y|^\alpha \operatorname{sign} y$, $\varphi(kx)=|kx|^\beta \operatorname{sign} x$ при $\alpha\geqslant 2$, $\beta\geqslant 1$ (случай $f(y)=y^2 \operatorname{sign} y$, $\varphi(kx)=kx$ (см. в [3]).

Рассмотрим следующие оптимизационные задачи: для заданных f, φ, удовлетворяющих (2), при дифференциальных связях (1), найти q^0, k^0, такие, что (задача 1):

$$\min_{q,k>0}\max_{t\in[0,\infty)}|y^{\bullet}(t,q,k)|=\max_{t\in[0,\infty)}|y^{\bullet}(t,q^0,k^0)|, \qquad \max_{t\in[0,\infty)}|x(t,q^0,k^0)|\leqslant S_0$$

(задача минимизации перегрузки при ограничении на ход амортизации), или такие, что (задача 2):

$$\min_{q,k>0}\max_{t\in[0,\infty)}|x(t,q,k)|=\max_{t\in[0,\infty)}|x(t,q^0,k^0)|, \qquad \max_{t\in[0,\infty)}|y^{\bullet}(t,q^0,k^0)|\leqslant a$$

(задача минимизации хода амортизации при ограничении на перегрузку). Здесь S_0, $a>0$ – заданные величины.

Из первых семи соотношений (2) по аналогии с [3] следует, что

$$G(q,k)=\max_{t\in[0,\infty)}|y^{\bullet}(t,q,k)|=\max_{t\in[0,T)}|y^{\bullet}(t,q,k)|,$$

$$S(q,k)=\max_{t\in[0,\infty)}|x(t,q,k)|=|x(T,q,k)|$$

где T – время достижения первого экстремума решением $x(t, q, k)$ системы (1) $(y(t, q, k)=0)$. Кроме того, имеет место следующее утверждение: при f, φ, удовлетворяющих условиям (2): $G(q, k)=\max\{Y_1(q, k), Y_2(q, k)\}$, $Y_1(q, k)=|y^{\bullet}(0, q, k)|=q|f(y_0)|$, $Y_2(q, k)=|y^{\bullet}(T, q, k)|=\varphi(kS(q, k))$.

Доказательство. Зададим произвольным образом параметры q, k и рассмотрим поведение функции $y^{\bullet}(t)$ на $[0, T]$ (здесь и в дальнейшем изложении доказательства будем иметь в виду $y^{\bullet}(t)\equiv y^{\bullet}(t, q, k)$). Пусть $y_0>0$, тогда $y^{\bullet}(t)<0$ при $t\in[0, T]$. Дифференцируя $y^{\bullet}(t)$ по t, определим $y^{\bullet\bullet}(t)$, $y^{\bullet\bullet\bullet}(t)$ и с учетом двух последних неравенств (2) получим

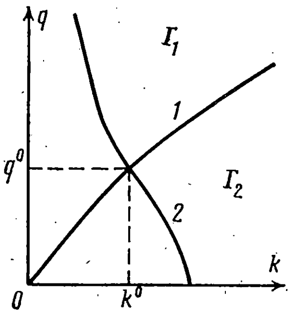
$$y^{\bullet\bullet\bullet}(t)>0\rightarrow y^{\bullet\bullet}(t)<0 \tag{3}$$

Необходимо показать, что

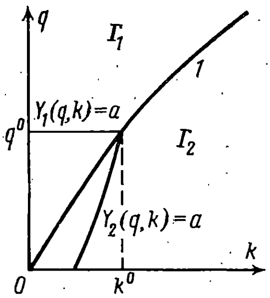
$$\forall t\in(0, T) \ \min\{y^{\bullet}(0), y^{\bullet}(T)\}\leqslant y^{\bullet}(t) \tag{4}$$

Предположим противное: пусть $\exists t^*\in(0, T)$, $\min\{y^{\bullet}(0), y^{\bullet}(T)\}>y^{\bullet}(t^*)$, тогда $\exists t_1^*\in(0, T)$, $\forall t\in[0, T]$, $y^{\bullet}(t_1^*)\leqslant y^{\bullet}(t)$ и $y^{\bullet\bullet}(t_1^*)=0$. Далее предположим, что $\exists t_2^*\in(t_1^*, T)$, $y^{\bullet\bullet}(t_2^*)>0$, тогда $\exists t_3^*\in[t_1^*, t_2^*)$, $\forall t\in(t_3^*, t_2^*]$ $y^{\bullet\bullet}(t)>0$ и $y^{\bullet\bullet}(t_3^*)=0$; $y^{\bullet\bullet}(t_2^*)-y^{\bullet\bullet}(t_3^*)=y^{\bullet\bullet\bullet}(\theta_1)(t_2^*-t_3^*)$, где $\theta_1\in(t_3^*, t_2^*)$, откуда получим $y^{\bullet\bullet\bullet}(\theta_1)>0$, значит, в силу (3) $y^{\bullet\bullet}(\theta_1)<0$, но с другой стороны, $y^{\bullet\bullet}(\theta_1)>0$. Следовательно, остается предположить, что $\forall t\in(t_1^*, T)$, $y^{\bullet\bullet}(t)\leqslant 0$. Тогда $y^{\bullet}(T)-y^{\bullet}(t_1^*)=y^{\bullet\bullet}(\theta_2)(T-t_1^*)$, где $\theta_2\in(t_1^*, T)$, а значит, $y^{\bullet}(T)-y^{\bullet}(t_1^*)\leqslant 0$, следовательно, $y^{\bullet}(T)\leqslant y^{\bullet}(t^*)$. Полученное противоречие и доказывает (4).

Ранее полагалось $y_0>0$. Если $y_0<0$, то заменой $x_1=-x$, $y_1=-y$ с учетом нечетности функций f и φ получим систему (1) для переменных x_1, y_1 с начальными



Фиг. 1



Фиг. 2

условиями $x_1(0)=0$, $y_1(0)=-y_0>0$, для которой полностью справедливы рассуждения, проведенные выше. Утверждение доказано.

Всю область значений параметров q, k разобьем на две подобласти Γ_1, Γ_2:

$$q,\ k\in\Gamma_1: Y_1(q,\ k)\geqslant Y_2(q,\ k);\quad q,\ k\in\Gamma_2: Y_1(q,\ k)\leqslant Y_2(q,\ k)$$

так, что при $\forall q$, $k\in\Gamma_1$ справедливо $G(q,\ k)=Y_1(q,\ k)$, а при q, $k\in\Gamma_2$ $G(q,\ k)=Y_2(q,\ k)$. Таким образом, задачи оптимизации сводятся к следующим задачам: найти q^0, k^0, такие, что (задача 1):

$$G(q^0,\ k^0)=\min\left\{\min_{\substack{q,\ k\in\Gamma_1\\ S(q,\ k)\leqslant S_0}} Y_1(q,k),\quad \min_{\substack{q,\ k\in\Gamma_2\\ S(q,\ k)\leqslant S_0}} Y_2(q,k)\right\}$$

или (задача 2):

$$S(q^0,k^0)=\min\left\{\min_{\substack{q,\ k\in\Gamma_1\\ Y_1(q,\ k)\leqslant a}} S(q,k),\quad \min_{\substack{q,\ k\in\Gamma_2\\ Y_2(q,\ k)\leqslant a}} S(q,k)\right\}$$

Проанализируем поведение функций $S(q,\ k)$, $Y_1(q,\ k)$, $Y_2(q,\ k)$.

Применяя методы качественного исследования динамических систем на плоскости [4], можно показать, что увеличение параметра q при постоянном значении параметра k дает поворот векторного поля системы (1) на отрицательный угол (поворот по часовой стрелке), увеличение параметра k при постоянном значении параметра q также дает поворот векторного поля системы (1) на отрицательный угол. Отсюда следует, что

$$\partial S(q,\ k)/\partial q<0,\qquad \partial S(q,\ k)/\partial k<0 \tag{5}$$

Применяя подобные рассуждения к системе $z^{\bullet}=ky$, $y^{\bullet}=-qf(y)-\varphi(z)$, $z(0)=0$, $y(0)=y_0$, полученной из (1) заменой $z=kx$, будем иметь

$$\partial(kS(q,\ k))/\partial k>0 \tag{6}$$

Из неравенств (5), (6) и выражений для $Y_1(q,\ k)$, $Y_2(q,\ k)$ получим

$$\begin{gathered}\partial Y_1(q,\ k)/\partial q=|f(y_0)|>0,\quad \partial Y_1(q,\ k)/\partial k=0\\ \partial Y_2(q,\ k)/\partial q=d\varphi(z)/dz\ k\ \partial S(q,\ k)/\partial q<0\\ \partial Y_2(q,\ k)/\partial k=d\varphi(z)/dz\ \partial(kS(q,\ k))/\partial k>0\end{gathered} \tag{7}$$

Из неравенств (5), (7) следует решение задач оптимизации параметров. Для задачи 1:

$$G(q^0,k^0)=\min_{\substack{q,\ k\in\Gamma_1\\ S(q,\ k)\leqslant S_0}} Y_1(q,k)=\min_{\substack{q,\ k\in\Gamma_2\\ S(q,\ k)\leqslant S_0}} Y_2(q,k)$$

q^0, k^0 – решение системы уравнений

$$Y_1(q,\ k)=Y_2(q,\ k),\quad S(q,\ k)=S_0 \tag{8}$$

причем $\forall S_0>0$ существует единственное решение (8). Единственность решения системы (8) вытекает из того, что уравнения $Y_1(q,k)=Y_2(q,k)$ (кривая *1*) и $S(q,k)=S_0$ (кривая *2*) неявно задают соответственно монотонно возрастающую и монотонно убывающую функции аргумента q (фиг. 1). Это следует из неравенств (5), (7) и формулы для производной функции, заданной неявно. Для задачи 2:

$$S(q^0,k^0)=\min_{\substack{q,\ k\in\Gamma_1\\ Y_1(q,\ k)\leqslant a}} S(q,k)=\min_{\substack{q,\ k\in\Gamma_2\\ Y_2(q,\ k)\leqslant a}} S(q,k)$$

q^0, k^0 – решение системы уравнений

$$Y_1(q,\ k)=a,\quad Y_2(q,\ k)=a \tag{9}$$

причем $\forall a>0$ существует единственное решение (9). Единственность решения системы (9) вытекает из того, что уравнения $Y_1(q,\ k)=a$ и $Y_2(q,\ k)=a$ неявно задают соответственно постоянную и монотонно возрастающую функцию аргумента k (фиг. 2). Это следует из неравенств (7) и формулы для производной функции, заданной неявно. Существует простой алгоритм отыскания решений уравнений (8), (9). Исключая из этих уравнений q, получим уравнения

$$S\left(\frac{\varphi(kS_0)}{|f(y_0)|},\ k\right)=S_0,\qquad \varphi\left(kS\left(\frac{a}{|f(y_0)|},\ k\right)\right)=a \tag{10}$$

Явные выражения для функции $S(q,\ k)$, а также выражения для производных $\partial S(q,\ k)/\partial q$, $\partial S(q,\ k)/\partial k$ найти не удается. Значения функции $S(q,\ k)$ могут быть найдены лишь путем численного интегрирования системы (1) при различных значениях параметров q, k. Поэтому для решения уравнений (10) целесообразно воспользоваться численным методом, не требующим вычисления производных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотник Н. Н.* Оптимизация параметров некоторых механических колебательных систем.– Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 5, с. 27–33.
2. *Болотник Н. Н.* Оптимизация параметров механической колебательной системы с сухим трением.– Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 5, с. 56–58.
3. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
4. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.

Горький

Поступила в редакцию
8.VI.1983