

УДК 531.8

О ВЛИЯНИИ УПРУГОЙ ПОДАТЛИВОСТИ КОНСТРУКЦИИ РОБОТОВ НА ИХ ДИНАМИКУ

ГРАДЕЦКИЙ В. Г., ГУКАСЯН А. А., ГРУДЕВ А. И.,
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л.

При исследовании динамики промышленных роботов-манипуляторов и при создании для них системы управления обычно используется механическая модель роботов в виде систем абсолютно твердых тел (стержней), соединенных идеальными шарнирами [1]. Однако при движении реальных механических управляемых систем, предназначенных для перемещения грузов в пространстве, в ряде случаев существенное значение имеет упругая податливость конструкции. Упругость конструкции приводит к появлению дополнительных степеней свободы, соответствующих колебательным движениям. Нежелательные колебательные процессы влияют на качество и скорость выполнения рабочих операций.

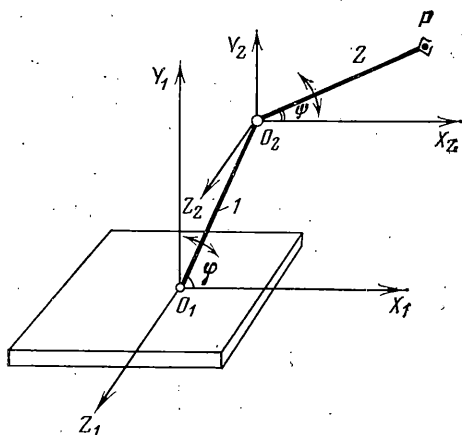
Упругость конструкции манипулятора обусловлена разными факторами, которые можно разделить на две группы: упругая податливость шарниров (узлов, соединений) и упругая податливость звеньев. К упругой податливости шарниров отнесены все факторы податливости, действующие в узлах соединений и редукторах, упругость прокладок и уплотнений, зазоры между отдельными деталями. Таким образом, упругость узлов носит сосредоточенный характер. Упругость же звеньев манипулятора распределена по всей длине звеньев. Проведенные экспериментальные исследования показывают, что для большинства промышленных роботов основной вклад в упругую податливость конструкции вносит упругость узлов (шарниров).

Исследованию динамики и управления движением роботов с учетом упругости их элементов посвящен ряд работ, например [2-8]¹. В публикуемой работе используется метод, разработанный в [2, 3], и проводится решение задачи кинематического управления для промышленных роботов с упругоподатливыми узлами. Методом асимптотического разделения движений получены явные выражения, определяющие движения упругой модели манипулятора, а также усилия двигателей, необходимые для реализации заданных движений упругой модели. На примерах конкретных промышленных роботов с учетом проведенных экспериментальных исследований показано совпадение данных теоретических расчетов и результатов динамических экспериментов.

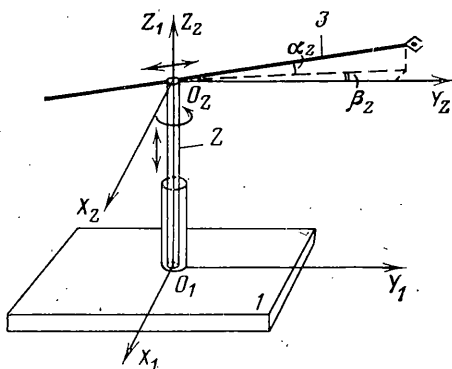
1. Для иллюстрации решения задачи кинематического управления методом асимптотического разделения движений [2, 3] с использованием результатов экспериментальных исследований выбраны две модели промышленных роботов с различным количеством упругих шарниров и разным числом степеней свободы.

Первая модель — двузвенный плоский манипулятор, кинематическая схема которого представлена на фиг. 1 и аналогична схеме промышленного робота РПМ-25. Манипулятор состоит из звена 1 (O_1O_2), соединенного с неподвижным основанием цилиндрическим шарниром O_1 , и звена 2 (O_2P) со схватом на конце. Длины звеньев 1 и 2 равны соответственно l_1 и l_2 . Звенья манипулятора являются в рассматриваемой модели абсолютно жесткими стержнями, соединенными цилиндрическим шарниром O_2 . Управление системой по степеням свободы, отвечающим поворотам звень-

¹ Черноусько Ф. Л., Градецкий В. Г., Гукасян А. А., Вешников В. Б., Самвелян К. В., Степанов В. П., Шушко Д. А. Анализ упругой податливости конструкции манипуляционных роботов.— Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1984. 66 с.



Фиг. 1



Фиг. 2

ев вокруг осей шарниров O_1 и O_2 , осуществляется при помощи моментов сил $M_1(t)$ и $M_2(t)$, приложенных к осям шарниров O_1 и O_2 соответственно.

Для описания движения манипулятора вводится инерциальная, связанная с основанием, система координат $O_1X_1Y_1Z_1$. Ось O_1Z_1 перпендикулярна плоскости движения манипулятора и совпадает с осью первого шарнира (O_1). Система координат $O_2X_2Y_2Z_2$ (фиг. 1) является подвижной. Ее начало координат находится на оси второго шарнира (O_2), ось O_2Z_2 совпадает с осью второго шарнира, а оси O_2X_2 и O_2Y_2 параллельны осям O_1X_1 и O_1Y_1 . Обобщенными координатами, отвечающими управляемым степеням подвижности абсолютно жесткой модели, являются угловые переменные $\varphi(t)$ — угол между звеном 1 и осью O_1X_1 и $\psi(t)$ — угол между звеном 2 и осью O_2X_2 . Угловые переменные, отвечающие упругой податливости первого и второго шарниров (дополнительному вращению в плоскости $O_1X_1Y_1$), обозначим соответственно $\alpha_1(t)$ и $\beta_1(t)$. Обозначим m_1 и m_2 массы звеньев, L_1 и L_2 — расстояния от осей шарниров O_1 и O_2 до центров масс первого и второго звеньев, c_1 и c_2 — жесткость соединительных шарниров O_1 и O_2 , I_1 и I_2 — моменты инерции звеньев 1 и 2 относительно шарниров O_1 и O_2 соответственно.

Вторая модель — модель промышленного робота, кинематическая схема которого совпадает со схемой робота «Универсал-5» (фиг. 2). Робот состоит из неподвижного основания 1, вертикально ориентированной стойки 2 и стрелы 3 со схватом. Все части являются абсолютно твердыми телами. Стрела связана со стойкой цилиндрическим шарниром, обладающим упругой податливостью. Манипулятор имеет три степени подвижности, отвечающие движению стойки 2 по вертикали, выдвигению стрелы в горизонтальной плоскости и повороту ее вокруг вертикальной оси. Управление манипулятором осуществляется при помощи момента сил $M(t)$, приложенного к оси вращения, вертикально направленной силы $F_1(t)$, приложенной к стойке, и горизонтально направленной силы $F_2(t)$, приложенной к стреле манипулятора.

Для описания движений второй модели манипулятора вводится инерциальная система координат $O_1X_1Y_1Z_1$, связанная с основанием 1, ось O_1Z_1 которой совпадает с осью вращения стрелы, и вращающаяся система координат $O_2X_2Y_2Z_2$, ось O_2Z_2 которой совпадает с осью O_1Z_1 . Ось O_2Y_2 при недеформированном состоянии манипулятора совпадает с нейтральной линией стрелы, а ось O_2X_2 дополняет систему до правой прямоугольной.

Введем следующие обозначения: c — жесткость соединительного шарнира O_2 (эксперимент показывает, что жесткости узла O_2 в горизонтальной и вертикальной плоскостях имеют близкие значения), l — длина стрелы манипулятора, $L(t)$ — расстояние от центра масс стрелы до шарнира O_2 ,

$x(t)$ — длина выдвинутой части стрелы (расстояние от схвата до шарнира O_2), m — масса стрелы, $\chi(t)$ — угол поворота стрелы (в случае абсолютно жесткой модели), $z(t)$ — расстояние между плоскостями $O_1X_1Y_1$ и $O_2X_2Y_2$, $I(t) = I_0 + mL^2(t)$ — момент инерции стрелы относительно оси O_1Z_1 , а I_0 — относительно оси, проходящей через центр масс параллельно оси O_1Z_1 , $\alpha_2(t)$ и $\beta_2(t)$ — углы поворота в шарнире O_2 , обусловленные упругой податливостью в вертикальной и горизонтальной плоскостях соответственно. Величины $L(t)$, l и $x(t)$ для однородной стрелы связаны соотношением $L(t) = x(t) - l/2$.

Предполагается, что упругие смещения звеньев манипулятора малы по сравнению с его линейными размерами. Это предположение эквивалентно утверждению о том, что периоды собственных упругих колебаний манипулятора малы по сравнению с характерным временем T выполнения рабочих операций [2, 3, 8]. Управляющие моменты и силы считаются величинами ограниченными (порядка единицы).

Кинетическая энергия T_1 движения первой модели манипулятора и кинетическая энергия T_2 движения стрелы второй модели имеют вид

$$T_i = 1/2 (\dot{\Phi}_i, A_i \dot{\Phi}_i) + T_i' \quad (i=1, 2) \quad (1.1)$$

Значения индекса i отвечают соответственно первой и второй моделям манипуляторов. посредством Φ_i обозначен вектор-столбец упругих смещений, через A_i — соответствующая матрица кинетической энергии

$$A_1 = \begin{vmatrix} I_1 + m_2 l_1^2 & m_2 l_1 L_2 \cos \delta \\ m_2 l_1 L_2 \cos \delta & I_2 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix}$$

$$\Phi_i = \begin{vmatrix} \alpha_i(t) \\ \beta_i(t) \end{vmatrix}, \quad I = I_0 + mL^2, \quad \delta = \varphi - \psi$$

Точка в (1.1) означает производную по времени t , а через T_i' обозначена та часть кинетической энергии, которая не является квадратичной формой по скоростям $\dot{\Phi}_i$.

Для упрощения записи в (1.1) и в последующих формулах явная зависимость величин от времени опускается.

Потенциальные энергии Π_1 , Π_2 первой и второй моделей манипуляторов соответственно равны сумме потенциальных энергий сил тяжести и сил, обусловленных упругой податливостью соединительных шарниров

$$\Pi_i = 1/2 (\Phi_i, C_i \Phi_i) + \Pi_i' \quad (i=1, 2) \quad (1.2)$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}$$

$$\Pi_1' = m_1 g L_1 \sin(\alpha_1 + \varphi) + m_2 g [l_1 \sin(\alpha_1 + \varphi) + L_2 \sin(\beta_1 + \psi)]$$

$$\Pi_2' = mg(z + L \sin \alpha_2)$$

C_1 и C_2 — матрицы жесткости конструкций первой и второй моделей манипуляторов соответственно.

В силу предположений о малости упругих смещений и конечности управляющих сил и моментов выполняются следующие соотношения (ε — малый параметр):

$$\Phi_i = \varepsilon^2 \Phi_{i*}, \quad C_i = \varepsilon^{-2} C_{i*}, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (1.3)$$

$$\Phi_{i*} \sim 1, \quad C_{i*} \sim 1 \quad (i=1, 2)$$

Рассматривается следующая задача кинематического управления: пусть заданы законы изменения $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$, $z(t)$, $x(t)$ для первой и второй моделей рассматриваемых манипуляторов. Требуется определить движение упругих манипуляторов с учетом податливости в шарнирах,

а также управляющие силы и моменты, обеспечивающие заданные законы движения для упругого манипулятора.

Составим уравнения Лагранжа для колебаний манипуляторов, принимая в качестве обобщенных координат углы α_i и β_i с учетом предположений (1.3):

$$\varepsilon^2 (d/dt) [A_i(t) \Phi_{i*}'(t)] + C_{i*} \Phi_{i*} + B_i = 0 \quad (1.4)$$

В соответствии с (1.1), (1.2) получаются следующие выражения для B_i :

$$B_1 = \left\| \begin{array}{l} (I_1 + m_2 l_1^2) \varphi'' + m_2 l_1 L_2 (\psi'' \cos \delta + \psi'^2 \sin \delta) + g \cos \varphi (m_1 L_1 + m_2 l_1) \\ I_2 \psi'' + m_2 l_1 L_2 (\varphi'' \cos \delta - \varphi'^2 \sin \delta) + m_2 g L_2 \cos \psi \end{array} \right\|$$

$$B_2 = \left\| \begin{array}{l} mLz' + mLz'' + mgL \\ I(t) \chi'' + 2mLL\chi' \end{array} \right\|, \quad I = I_0 + mL^2$$

Решение уравнения (1.4) в первом приближении будем искать в виде суммы двух слагаемых (см. [2, 3])

$$\Phi_{i*}(t) = \Phi_i^0(t) = \theta_i(\tau), \quad \tau = \varepsilon^{-1}t \quad (1.5)$$

где τ — «быстрое время». Слагаемое $\Phi_i^0(t)$ описывает медленно меняющиеся (квазистатические) смещения, для которых характерное время изменения порядка единицы, т. е. порядка времени выполнения рабочей операции манипулятора. Второе слагаемое $\theta_i(\tau)$ описывает быстрые упругие колебания элементов манипулятора с частотами порядка ε^{-1} .

Подставляя решение (1.5) в уравнение (1.4) и опуская члены порядка $O(\varepsilon^2)$, получим

$$\left\{ \frac{d}{d\tau} \left[A_i(t) \frac{d}{d\tau} \theta_i(\tau) \right] + C_{i*} \theta_i(\tau) \right\} + \left\{ C_{i*} \Phi_i^0(t) + B_i(t) \right\} = 0 \quad (i=1,2) \quad (1.6)$$

В первые фигурные скобки заключены «быстрые» слагаемые, описывающие упругие колебания манипулятора. Вторые фигурные скобки объединяют медленные квазистатические смещения. Производ от представления решения в виде суммы (1.5) исчезает, если потребовать, чтобы каждое из выражений в фигурных скобках (1.6) равнялось нулю. Такое требование вытекает из того, что при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. при бесконечно большой жесткости шарниров (случай абсолютно жесткой модели), уравнение движения представляет собой равенство нулю второй фигурной скобки (подробнее см. в [3]). Таким образом, приравнивая нулю выражение во вторых фигурных скобках, получаем

$$\Phi_i^0(t) = -C_{i*}^{-1} B_i(t) \quad (i=1,2) \quad (1.7)$$

Поскольку вектор $B_i(t)$ определяется из динамики жесткой модели манипулятора, которая в случае кинематического управления задается законом движения, а матрица C_i может быть определена из статического эксперимента, то тем самым однозначно определяются квазистатические смещения $\Phi_i^0(t)$ манипулятора, обусловленные упругой податливостью шарниров.

Приравнивая нулю выражение, стоящее в первых фигурных скобках уравнения (1.6), получаем

$$\frac{d}{d\tau} \left[A_i(t) \frac{d}{d\tau} \theta_i(\tau) \right] + C_{i*} \theta_i(\tau) = 0 \quad (i=1,2) \quad (1.8)$$

Эта система дифференциальных уравнений описывает быстрые упругие колебания манипулятора. Дифференциальные уравнения с медленно меняющимися параметрами типа (1.8) исследуются при помощи асимптотического метода усреднения [9].

Поскольку система (1.8) линейна, то ее общее решение в первом приближении представляется в виде суммы одночастотных решений [2, 3, 9]:

$$\theta_i(\tau) = \sum_{k=1}^2 X_{ik}(t) d_{ik}(t) \cos \gamma_{ik}, \quad d_{ik}(t) = d_{ik}^0 \left[\frac{m_{ik}(0) \omega_{ik}(0)}{m_{ik}(t) \omega_{ik}(t)} \right]^{1/2} \quad (1.9)$$

$$\gamma_{ik} = \varepsilon^{-1} \int_0^t \omega_{ik}(\xi) d\xi + \gamma_{ik}^0, \quad m_{ik}(t) = (X_{ik}, A_i(t) X_{ik}) \quad (i, k=1, 2)$$

Здесь ω_{ik} , X_{ik} , d_{ik} , γ_{ik} — частоты, собственные векторы, амплитуды и фазы колебаний. Первый индекс $i=1, 2$ отвечает рассматриваемой модели манипулятора, а второй $k=1, 2$ — номеру собственных колебаний. Произвольные постоянные d_{ik}^0 и γ_{ik}^0 могут быть определены из начальных условий. Пусть при $t=0$ заданы углы упругих смещений $\Phi_i(0)$ и начальные скорости их изменения $\Phi_i'(0)$. Тогда из (1.5), (1.7) и (1.9) получаем

$$\begin{aligned} \Phi_i^0(0) + \sum_{k=1}^2 X_{ik}(0) d_{ik}^0 \cos \gamma_{ik}^0 &= \varepsilon^{-2} \Phi_i(0), \\ - \sum_{k=1}^2 X_{ik}(0) \omega_{ik}(0) d_{ik}^0 \sin \gamma_{ik}^0 &= \varepsilon^{-1} \Phi_i'(0) \end{aligned} \quad (1.10)$$

В левой части второго равенства (1.10) опущен член $\Phi_i'^0(0)$. Это возможно потому, что скорость изменения квазистатического смещения порядка единицы, а колебательного — порядка ε^{-1} . Из (1.10) видно, что начальные данные должны иметь следующие порядки малости: $\Phi_i(0) \sim \varepsilon^2$, $\Phi_i'(0) \sim \varepsilon$.

Величины $\omega_{ik}(t)$, входящие в (1.9), определяются из характеристического уравнения

$$\det \| C_{ik} - \omega_{ik}^2 A_i(t) \| = 0 \quad (i, k=1, 2) \quad (1.11)$$

Величины $\omega_{ik}(t)$ можно интерпретировать как мгновенные (при фиксированном t) значения собственных частот упругих колебаний.

Собственные векторы колебаний X_{ik} , отвечающие частотам ω_{ik} , суть ненулевые решения системы алгебраических уравнений $\| C_{ik} - \omega_{ik}^2 A_i(t) \| X_{ik} = 0$ ($i, k=1, 2$).

Итак, определяя квазистатические смещения и быстрые упругие колебания при заданном законе движения жесткой модели манипулятора, можно определить реальные движения упругого манипулятора.

Из кинематических соотношений на примере первой модели манипулятора имеем

$$\mathbf{q}(t) = \begin{vmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1(t) \\ \beta_1(t) \end{vmatrix} \quad (1.12)$$

где $\mathbf{q}(t)$ — координатный вектор упругого манипулятора, причем $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ предполагаются заданными.

Перейдем к определению управляющих усилий, обеспечивающих заданное движение манипулятора. Принимая $\mathbf{q}(t)$ и $\Phi_1(t)$ за обобщенные координаты упругой модели манипулятора, можно вычислить работу δW всех сил на виртуальных перемещениях с учетом (1.12):

$$\begin{aligned} \delta W &= M_1 \delta \varphi + M_2 \delta \psi - c_1 \alpha_1 \delta \alpha_1 - c_2 (\beta_1 - \alpha_1) \delta (\beta_1 - \alpha_1) - \delta \Pi_1' = \\ &= [M_1 - m_1 g L_1 \sin q_1 - m_2 g l_1 \sin q_1] \delta q_1 + [M_2 - m_2 g L_2 \sin q_2] \delta q_2 + \\ &+ [-M_1 - c_1 \alpha_1 + c_2 (\beta_1 - \alpha_1)] \delta \alpha_1 + [-M_2 - c_2 (\beta_1 - \alpha_1)] \delta \beta_1 \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа, соответствующие обобщенным координатам α_1 и β_1 , вырождены и имеют вид $M_1 = -(c_1 + c_2)\alpha_1 + c_2\beta_1$, $M_2 = -c_2(\beta_1 - \alpha_1)$, или в векторной форме $M^1 = \begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \end{vmatrix} = -C_1 \Phi_1$, где Φ_1 определено соотношениями (1.3), (1.5), (1.7), (1.9).

Аналогично для второй модели манипулятора получаем

$$q'(t) = \begin{vmatrix} q_1'(t) \\ q_2'(t) \\ q_3'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \chi(t) \\ z(t) \\ L(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_2(t) \\ \alpha_2(t)L(t) \\ 0 \end{vmatrix} \quad (1.13)$$

$$M^2 = \begin{vmatrix} F_1 \\ M \end{vmatrix} = -\Lambda C_2 \Phi_2, \quad \Lambda = \begin{vmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.14)$$

Сила $F_2 = mL''$, необходимая для выдвигания стрелы, одинакова для жесткой и упругой моделей.

Управляющие силы и моменты, необходимые для реализации заданного закона движения упругого манипулятора, можно представить в виде суммы двух слагаемых, отвечающих медленным смещениям и быстрым колебаниям манипулятора.

Для первой и второй моделей соответственно

$$M^1 = M_i^1 + M_\tau^1, \quad M_i^1 = B_1(t), \quad M_\tau^1 = -C_{1*} \theta_1(\tau) \quad (1.15)$$

$$M^2 = M_i^2 + M_\tau^2, \quad M_i^2 = \Lambda B_2(t), \quad M_\tau^2 = -\Lambda C_{2*} \theta_2(\tau)$$

Индексы t и τ означают соответственно медленные и быстрые слагаемые.

Следовательно, в случае кинематического управления упругим манипулятором определены дополнительные угловые перемещения $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(t)$ ($i=1, 2$), обусловленные упругими податливостями шарниров, а также управляющие усилия, необходимые для реализации заданных движений. Углы упругих смещений и выражения для управляющих сил и моментов состоят из двух слагаемых (квазистатических и колебательных), для которых получены явные выражения. Для определения медленных слагаемых необходимо знать матрицу жесткости конструкции манипулятора, геометрические и массовые характеристики, а также закон движения жесткой модели, а для определения быстрых слагаемых — еще и собственные упругие колебания манипулятора.

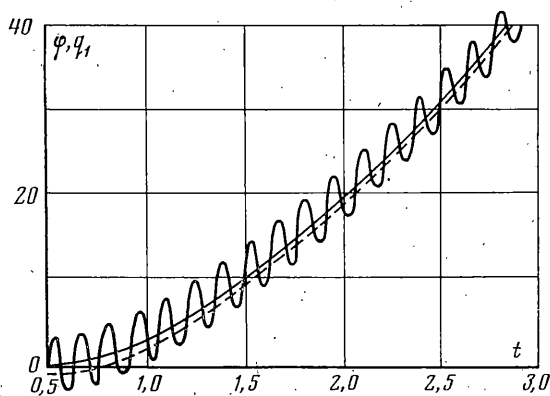
2. Выполненные экспериментальные исследования упругой податливости роботов состояли из двух частей: статических и динамических испытаний².

Цель этих испытаний заключалась в оценке влияния упругой податливости, возникающей в шарнирах, на точность позиционирования. Полученные экспериментальные данные использовались для расчета упругих смещений (медленных, квазистатических и быстрых, колебательных), а также для вычисления усилий, необходимых для реализации заданного закона движения.

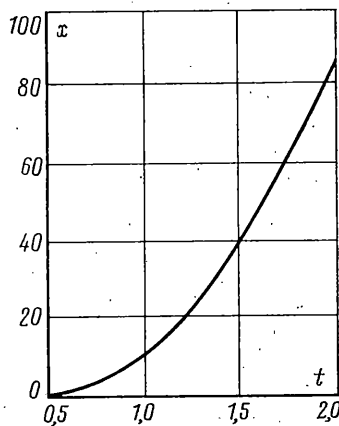
Статические испытания заключались в том, что к схвату или другим узлам робота, находящегося в покое при определенной конфигурации, прикладывались статические нагрузки, изменявшиеся в некоторых допустимых пределах. При помощи датчика смещений (индикаторной головки) с точностью 0,01 мм измерялись упругие смещения характерных точек робота в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Обычно усредненные значения упругих смещений малы и линейно зависят от приложенной нагрузки, что дает возможность пользоваться для расчетов линейной теорией упругости и, в частности, теорией малого изгиба тонких прямолинейных стержней. Для определения жесткостных характеристик роботов проводился расчет равновесия робота при данной конфигурации, нагрузках и способе закрепления индикаторной головки. В этом расчете звенья рассматриваются как абсолютно жесткие или упругие стержни (если осуществляется учет упругой податливости звеньев). Схемы нагружения, варианты размещения индикаторной головки и методика расчета жесткостных характеристик зависят от конкретного вида манипулятора.

В результате проведения серии статических экспериментов были получены значения элементов матриц жесткостей упругих шарниров (Н·м): для робота РПМ-25

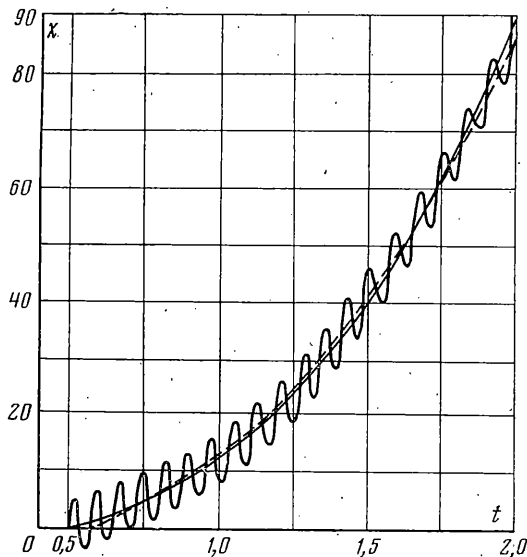
² См. указ. публ. с. 63.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

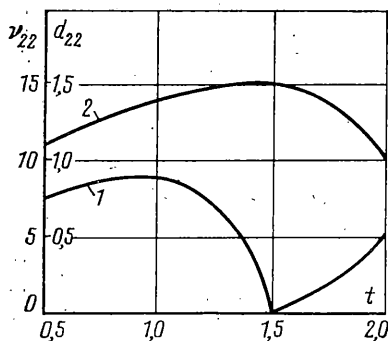
$c_1=32 \cdot 10^4$, $c_2=39 \cdot 10^4$; для робота «Универсал-5» $c=2 \cdot 10^4$. Погрешность определения величин жесткости не превышает 15%.

При проведении расчетов были приняты следующие геометрические и инерционные характеристики элементов конструкции роботов: для РПМ-25 $m_1=68$ кг, $m_2=154$ кг, $L_1=0,45$ м, $L_2=0$, $l_1=0,9$ м, $I_1=32$ кг·м², $I_2=64$ кг·м²; а для «Универсал-5» $m=12$ кг, $l=0,84$ м, $I_0=0,48$ кг·м².

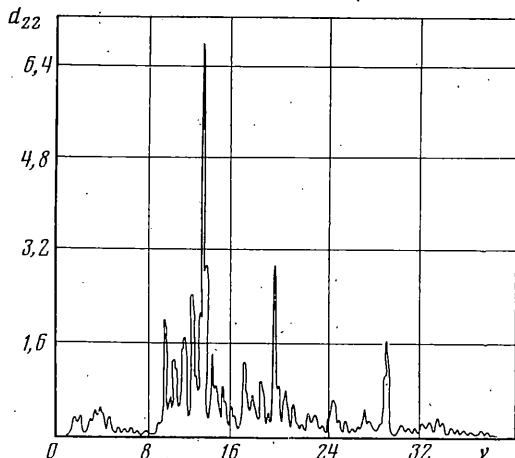
Динамические исследования роботов проводились для получения экспериментальной информации о колебательных процессах, происходящих в отдельных элементах конструкции (схвате, руке, корпусе) во время выполнения роботом различных движений. На роботе устанавливались акселерометры, сигналы с выхода которых в виде напряжения в аналоговой форме записывались на ленту магнитографа для проведения дальнейшей обработки с использованием самописцев, пленочных осциллографов или ЭВМ. Вибрации каждого узла и схвата робота исследовались при помощи трех датчиков, измеряющих ускорения по трем взаимно перпендикулярным осям.

3. Сравнение расчетных данных и результатов испытаний проводилось для ряда частных случаев движений роботов, которые можно рассматривать как базовые в технологических процессах.

Предполагается, что во время движения манипулятора РПМ-25 разность углов φ и ψ постоянна, т. е. $\delta=\varphi-\psi=\delta_0=\text{const}$ (это соответствует отсутствию управления моментом M_2). При этом звенья могут поворачиваться друг относительно друга лишь на малый угол $\beta_2(t)$. В этом случае матрица A_1 не зависит от времени и имеет диагональный вид. Используя результаты статических испытаний и инерционные харак-



Фиг. 6



Фиг. 7

теристики роботов, из уравнения (1.11) находим, что $\nu_{11} = \omega_{11}/2\pi = 7$ Гц, $\nu_{12} = 16$ Гц. Из уравнения (1.9) следует, что быстрые упругие колебания звеньев манипулятора в этом случае имеют низшие собственные частоты 7 и 16 Гц. Из (1.15) видно, что управляющие моменты, отвечающие быстрым колебаниям, также являются быстро осциллирующими.

Закон движения жесткой модели, задаваемый кинематически, можно определить экспериментально. Например, в [10] установлена зависимость углов $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ от времени для манипулятора РИМ-25, а также зависимость от времени длины стрелы $x(t)$ и угла поворота $\chi(t)$ для манипулятора «Универсал-5».

Зависимости $\varphi(t)$ (в град.), $x(t)$ (в см.), $\chi(t)$ (в град.) от времени (в сек.) представлены сплошными линиями на фиг. 3–5 соответственно. Экспериментальные кривые аппроксимировались параболоми. Проводя аппроксимацию по пяти точкам методом наименьших квадратов, получим

$$\varphi(t) = 3,6t^2 + 3,7t - 0,8, \quad x(t) = 34,2t^2 - 29,1t + 6, \quad \chi(t) = 30t^2 - 15,6t - 1 \quad (3.1)$$

Для рассматриваемого случая ($\delta = \delta_0 = \text{const}$), определяя квазистатические смещения $\alpha_1^0(t)$ и $\beta_1^0(t)$ для робота РИМ-25 по формуле (1.7), получаем, что $\alpha_1^0(t)$ и $\beta_1^0(t)$ постоянны и соответственно равны $0,3^\circ$ и $0,4^\circ$. Рассчитав квазистатические упругие смещения звеньев по формулам $u_1 = l_1 \alpha_1^0$ и $u_2 = l_2 \beta_1^0$, где u_i — смещения концов звеньев, получим, что $u_1 = 3$ мм, $u_2 = 4$ мм, а упругое смещение схвата может достигать 7 мм при нагрузке, в пять раз превышающей номинальную.

Движение манипулятора РИМ-25 сопровождается также быстрыми колебаниями с частотами 7 и 16 Гц. Следовательно, выражение (1.12), определяющее обобщенные координаты упругой модели манипулятора, в данном случае имеет вид

$$\begin{vmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3,6t^2 + 3,7t - 0,8 \\ -0,3 \\ -0,4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A^0 \sin 7t \\ B^0 \sin 16t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \delta_0 \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

Через A^0 и B^0 обозначены амплитуды быстрых упругих колебаний, определяемые из начальных условий.

На фиг. 3 сплошной линией представлена зависимость $\varphi(t)$, задаваемая формулой (3.1), штриховой линией — с учетом квазистатического упругого смещения $\alpha_1^0(t)$. На этой же фигуре дана зависимость $q_1(t)$ (в град.), имеющая колебательный характер в соответствии с формулой (3.2).

Для робота «Универсал-5» рассчитан нестационарный колебательный процесс в режиме одновременного поворота и выдвигания стрелы (фиг. 4.5). Процесс сопровождается упругими колебаниями с переменной частотой и амплитудой. Зависимости амплитуды колебаний d_{22} (в мм) центра масс стрелы в горизонтальной плоскости при начальном отклонении $d_{22}^0 = 4^\circ$ (см. (1.9)) и частоты ν_{22} (в Гц) этих колебаний от времени (в сек) представлены на фиг. 6. (кривые 1 и 2 соответственно). Определяя квазистатические упругие смещения по формуле (1.7) и быстрые колебания стрелы по формуле (1.9) при одновременном выдвигении и повороте стрелы, можно согласно (1.13) найти движения стрелы в рамках упругой модели. На фиг. 5 представлено изменение $q_1'(t)$ (в град.) и $\chi(t)$, пунктирной линией изображено влияние квазистатического упругого смещения. При этом для наглядности колебательное и квазистатическое смещения увеличены в пять раз.

Аналогично можно исследовать динамику роботов с учетом упругих свойств их конструкции при других заданных движениях.

Был выполнен цикл динамических испытаний промышленных роботов, подробно описанный в работе³. На фиг. 7 для примера приводится спектр колебаний робота «Универсал-5» в горизонтальной плоскости при одновременном повороте и выдвигании стрелы манипулятора. Дана зависимость амплитуды колебаний d_{22} (в мм) схвата от частоты (в Гц). Из фиг. 7 видно, что низшая резонансная частота равна 13 Гц, что хорошо согласуется с расчетным значением 14 Гц, полученным из формулы (1.11).

Таким образом, в результате проведенных теоретических и экспериментальных исследований получено описание динамики промышленных роботов с учетом упругих свойств их конструкции. Полученные результаты позволяют рассчитать частоты и амплитуды упругих колебаний роботов и тем самым оценить динамическую точность выполнения рабочих операций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. А. Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978, с. 398.
2. Черноусько Ф. Л. Динамика управляемых движений упругого манипулятора. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 5, с. 142—152.
3. Черноусько Ф. Л. Динамика систем с упругими элементами большой жесткости. — Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 101—113.
4. Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими свойствами. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1984, № 5, с. 131—141.
5. Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н. Об управляемом вращении упругого стержня. — ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 587—595.
6. Гукасян А. А. Исследование управляемых движений упругого манипулятора с тремя степенями подвижности. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1983, т. 36, № 3, с. 13—20.
7. Вукобратович М., Потконяк В. Численный метод моделирования динамики манипулятора с упругими свойствами. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 5, с. 131—141.
8. Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Исследование динамики манипулятора с упругими звеньями. — Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 51—58.
9. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. с. 432.
10. Каплунов А. А. Оптимизация движений манипуляторов с кинематической избыточностью. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1984, № 1, с. 158—166.

Москва

Поступила в редакцию
17.1.1984