

УДК 531.8

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЙ УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО СИЛЕ

ГОРИНЕВСКИЙ Д. М., ФОРМАЛЬСКИЙ А. М.

Для адаптации робота к внешней среде важна информация о силах его взаимодействия с объектами манипулирования [1–5], которая позволяет контролировать микроперемещения манипулятора в операциях сборки, при абразивной зачистке и так далее. Датчиками для измерения сил оснащены экспериментальные адаптивные манипуляторы, описанные в [3–5].

Процесс манипулирования можно, по-видимому, расчленить на ряд простых (базовых) операций. Одна из них — поддержание контакта манипулятора с предметом. В публикуемой работе изучается устойчивость процессов поддержания контакта и движения манипулятора при наличии обратной связи по силе. В отличие от [5] учитывается податливость конструкции манипулятора.

Делается попытка объяснить возникновение незатухающих колебаний манипулятора, наблюдающихся в экспериментах при некоторых значениях коэффициентов обратной связи. Подобная неустойчивость может возникнуть при наличии запаздывания в контуре управления [5], а также, как показано в публикуемой работе, при наличии упругой податливости люфтов в конструкции манипулятора.

В работе принята приближенная модель сосредоточенной упруговязкой податливости манипулятора. Модель упругости конструкции для манипуляторов широкого класса содержится, например, в [6], модель сосредоточенной податливости в шарнирах — в [7].

Информация о силах взаимодействия робота с объектом манипулирования поступает с датчика усилий. Датчик может представлять собой, например, гибкий штырь с наклеенными на него тензорезисторами [3]. В качестве датчиков могут быть использованы упругие губки захвата манипулятора [4, 5]. В этом случае они совмещают моторные (захватывание предмета) и сенсорные функции. Это может быть запястный датчик, расположенный между рукой и захватом¹. В первых двух случаях при исследовании можно пренебречь массой датчика. Если, однако, в пальцах удерживается массивный предмет, то необходимо учитывать дополнительную возникающую в системе степень свободы, связанную с его колебаниями. При использовании запястного датчика кроме удерживаемого предмета на движение влияет масса захвата.

1. Математическая модель. Манипулятор портального типа, использованный в экспериментальных исследованиях, описан в [4, 5]. Схема одной из поступательных степеней подвижности манипулятора приведена на фиг. 1 (1 — тахогенератор, 2 — двигатель, 3 — редуктор, 4 — штанга, 5 — датчик усилий, 6 — захват, 7 — предмет). Будем рассматривать одномерные движения манипулятора, т. е. считать, что работает только один привод, задающий движение по координате x . Если пренебречь индуктивностью цепи якоря электродвигателя, то, согласно [8], для развиваемой приводом силы справедливо равенство

$$f = -\beta_0 \dot{x} + b u \quad (4.1)$$

Здесь $\beta_0 > 0$ и b — постоянные величины, зависящие от конструкции

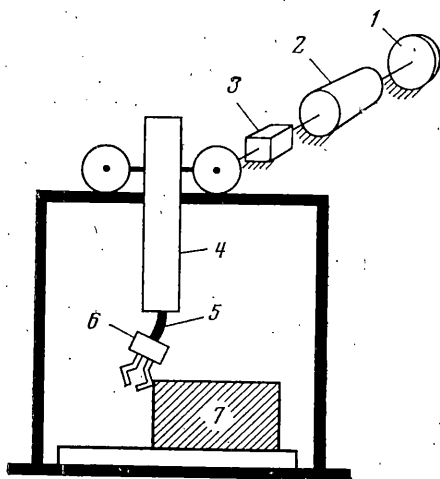
¹ Шнейдер А. Ю., Гориневский Д. М., Ленский А. В., Можжевелов С. Б. Силовые датчики для робототехнических систем. Датчики, размещаемые на манипуляторе. — Препринт Ин-та проблем передачи информации АН СССР, М., 1984. 72 с.

привода, u — напряжение, подаваемое на двигатель. Напряжение на двигателе задает система управления.

Силу, действующую на датчик, измеряют по его деформации. Обозначим через c_s и β_s коэффициенты жесткости и вязкости датчика силы соответственно.

Пусть ξ — отклонение руки робота (штанги) от задаваемой приводом координаты, возникающее в результате упругой податливости конструкции между двигателем и штангой, в частности в редукторе. Будем моделировать податливость конструкции пружиной жесткости c_c с демпфером вязкости β_c и для силы в податливом элементе примем выражение

$$F_\xi = -c_c \xi - \beta_c \dot{\xi} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Рассматриваемая механическая модель манипулятора с упругой податливостью (фиг. 2) состоит из подвижной части манипулятора «до податливости» (включая приведенную массу якоря) с массой M' , перемещение которой обозначим через x , руки «после податливости» с массой m_1 , перемещение которой относительно массы M' обозначим ξ , захвата с грузом массой m_2 , перемещение которого относительно m_1 обозначим через η . Показание F датчика усилий считаем пропорциональным упругой деформации (перемещению в упругом элементе датчика: $F = -c_s \eta$).

Кинетическую энергию системы запишем в виде

$$T = M' \dot{x}^2 / 2 + m_1 (\dot{x} + \dot{\xi})^2 / 2 + m_2 (\dot{x} + \dot{\xi} + \dot{\eta})^2 / 2 \quad (1.3)$$

Потенциальная энергия — сумма двух слагаемых

$$\Pi = c_c \xi^2 / 2 + c_s \eta^2 / 2 \quad (1.4)$$

Диссипативная функция Релея в соответствии с формулами (1.1); (1.2) имеет вид

$$R = \beta_0 \dot{x}^2 / 2 + \beta_c \dot{\xi}^2 / 2 + \beta_s \dot{\eta}^2 / 2 \quad (1.5)$$

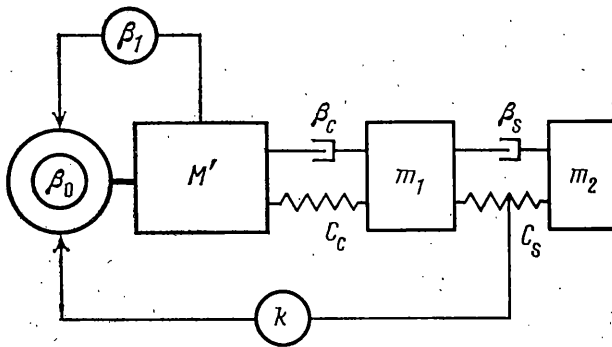
На массу M' (см. (1.1)) действует сила $Q = bu$, пропорциональная напряжению, задаваемому системой управления. Закон управления будем считать линейным по скорости \dot{x} и силе F , действующей на датчик

$$Q = -\beta_1 \dot{x} - k(F - F_g) \quad (1.6)$$

где F_g — заданное значение силы прижатия (считаем $F_g > 0$), β_1 — коэффициент обратной связи по скорости, k — по силе. Сигнал обратной связи по скорости пропорционален \dot{x} , так как скорость измеряет тахогенератор, жестко соединенный с двигателем.

Напряжение, подаваемое на двигатель, ограничено по величине $|Q| \leq |Q_0|$. Поэтому выражение (1.6) для управляющей силы перепишем в виде $Q = -\text{sat}[\beta_1 \dot{x} + k(F - F_g)]$. Здесь $\text{sat } y = y$ при $|y| \leq Q_0$, $\text{sat } y = Q_0 \text{ sign } y$ при $|y| > Q_0$. При очень больших коэффициентах усиления в обратной связи линейный участок становится малым. В этом случае можно считать управление релейным (точнее релейно-линейным) и принять

$$Q = -Q_0 \text{ sign}[\beta_1 \dot{x} + k(F - F_g)] \quad (1.7)$$



Фиг. 2

Соотношения (1.3)–(1.7) позволяют выписать уравнения движения системы.

2. Поддержание контакта с предметом. При наличии контакта с неподвижным предметом координата захвата постоянна и определяется координатой предмета x_0 , т. е. $x + \xi + \eta = x_0$. Пользуясь этим условием и формулами (1.3)–(1.5), выпишем уравнения движения при наличии контакта ($M = M' + m_1$):

$$Mx'' + m_1\xi'' + (\beta_0 + \beta_s)x' + \beta_s\xi' + c_s(x - x_0) + c_s\xi = Q \quad (2.1)$$

$$m_1x'' + m_1\xi'' + \beta_s x' + (\beta_c + \beta_s)\xi' + c_s(x - x_0) + (c_s + c_c)\xi = 0$$

Величина Q определена формулой (1.6) или (1.7), где измеряемая датчиком сила $F = c_s(x - x_0) + c_s\xi$. На участке разрыва управление (1.7) доопределим, как в [9].

Система (2.1) имеет стационарный режим, который характеризуется постоянными значениями координат x и ξ . Эти значения можно отыскать из уравнений (2.1), (1.6) при линейной или из уравнений (2.1), (1.7) при релейной обратной связи.

Будем отсчитывать координаты от их стационарных значений. Обозначения координат менять не будем. При сдвиге начала отсчета кинетическая энергия (1.3) и диссипативная функция (1.5) не изменятся. Первое из уравнений (2.1) поделим на M , второе — на m_1 и обозначим

$$\begin{aligned} \mu &= m_1/M, & \gamma &= (\beta_0 + \beta_1)/M, & \gamma_c &= \beta_c/m_1, & \gamma_s &= \beta_s/m_1 \\ \omega^2 &= (c_c + c_s)/m_1, & \omega_c^2 &= c_c/m_1, & \Omega^2 &= c_s(1+k)/M \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1), (1.6) в отклонениях от стационарного режима однородны

$$[D^2 + (\gamma + \mu\gamma_s)D + \Omega^2]x + (\mu D^2 + \mu\gamma_s D + \Omega^2)\xi = 0 \quad (2.3)$$

$$(D^2 + \gamma_s D + \omega^2 - \omega_c^2)x + [D^2 + (\gamma_c + \gamma_s)D + \omega^2]\xi = 0$$

Здесь и далее D — оператор дифференцирования по времени. Характеристическое уравнение системы (2.3) имеет вид

$$a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad (2.4)$$

$$a_0 = \Omega^2 \omega_c^2, \quad a_1 = \gamma \omega^2 + \gamma_c \Omega^2 + \mu \gamma_s \omega_c^2$$

$$a_2 = (1 - \mu) \omega^2 + \mu \omega_c^2 + \gamma (\gamma_c + \gamma_s) + \mu \gamma_c \gamma_s$$

$$a_3 = \gamma + \gamma_s + (1 - \mu) \gamma_s, \quad a_4 = 1 - \mu$$

Можно показать, что при $k=0$ рассматриваемая механическая система асимптотически устойчива. Исследуем ее устойчивость при $k>0$. Внутри области устойчивости старший определитель Гурвица должен быть положительным. Поскольку $a_1 > 0$ и $a_3 > 0$, запишем это условие в виде $a_2 > a_1 a_3 / a_3 + a_0 a_3 / a_1$

ИЛИ

$$(1-\mu)\omega^2 + \mu\omega_c^2 + \gamma(\gamma_c + \gamma_s) + \mu\gamma_c\gamma_s > \\ > \frac{(1-\mu)(\gamma\omega^2 + \gamma_c\Omega^2 + \mu\gamma_s\omega_c^2)}{\gamma + \gamma_s + (1-\mu)\gamma_s} + \frac{[\gamma + \gamma_c + (1-\mu)\gamma_s]\Omega^2\omega_c^2}{\gamma\omega^2 + \gamma_c\Omega^2 + \beta\gamma_s\omega_c^2} \quad (2.5)$$

В левой части (2.5) стоит величина, не зависящая от k , в правой — монотонно возрастающая неограниченная функция k . Значит, при значениях k , больших некоторого положительного k^0 , система станет неустойчивой, а при $0 \leq k < k^0$ — будет асимптотически устойчивой. Не выписывая получающегося для k^0 громоздкого выражения, рассмотрим подробнее некоторые предельные случаи.

Пусть $\gamma \gg \gamma_c + \gamma_s$, т. е. коэффициент обратной связи по скорости или (и) коэффициент демпфирования в двигателе велик по сравнению с коэффициентом затухания в конструкции манипулятора и в датчике.

Рассмотрим сначала случай, когда $\gamma_c + \gamma_s \sim 1$, а $\gamma \gg 1$. В этом случае произведение $\gamma(\gamma_c + \gamma_s) \gg 1$. Из условия равенства в (2.5), пренебрегая членами высшего порядка малости, получаем $(1-\mu)(\gamma_c/\gamma)^2\Omega^4 + [\omega_c^2 - \gamma_c(\gamma_c + \gamma_s)]\Omega^2 - \omega^2\gamma(\gamma_c + \gamma_s) = 0$. Отсюда найдем для k^0 приближенное выражение $(\alpha^2 = \gamma_c(\gamma_c + \gamma_s)/\omega_c^2)$

$$k^0 = (\beta_0 + \beta_1)(\gamma_c + \gamma_s)(1/c_c + 1/c_s)/(1 - \alpha^2) \text{ при } \alpha < 1 \\ k^0 = (\beta_0 + \beta_1)^2(1 + \gamma_s/\gamma_c)(1 - \alpha^{-2})/(M'c_s) \text{ при } \alpha > 1 \quad (2.6)$$

В случае, когда $\gamma \gg \gamma_c + \gamma_s$, а произведение $\gamma(\gamma_c + \gamma_s) \sim 1$, из (2.5) получаем

$$k^0 = (\beta_0 + \beta_1)(\gamma_c + \gamma_s)(1/c_c + 1/c_s) + c_c/c_s \quad (2.7)$$

При $\alpha \leq 1$ величина (2.6) совпадает с первым слагаемым в сумме (2.7)

Пусть теперь $\gamma_s \ll \gamma \ll \gamma_c$. Считая $\gamma\gamma_c \sim 1$, из (2.5) получим

$$k^0 = (\beta_0 + \beta_1)\gamma_c/[c_s(1-\mu)] + (1-\mu)/\mu \quad (2.8)$$

В случае, когда $\gamma\gamma_c \gg 1$, выражение для k^0 совпадает с первым слагаемым в (2.8).

Можно получить также приближенные формулы при условии $\gamma_s \gg \gamma$, γ_c .

Из формул (2.6)–(2.8) видно, в частности, что критическое значение k^0 , а с ним и диапазон устойчивости увеличивается с уменьшением жесткости датчика. К увеличению k^0 приводит также рост коэффициента обратной связи по скорости β_1 и (или) коэффициента демпфирования β_0 .

При релейном управлении (1.7) одно из условий асимптотической устойчивости состоит в том, что в некоторой окрестности положения равновесия фазовые траектории сходятся к плоскости переключения управления [10]. В рассматриваемой задаче оно приводит к неравенствам $\beta_1 > 0$, $F_g < Q_0$.

Второе условие — условие устойчивости положения равновесия в скользящем режиме [10]. Из соотношений (2.1), (1.7) получаем уравнения в отклонениях от стационарного режима, описывающие скользящие движения ($\dot{\vartheta} = kc_s/\beta_1$):

$$(D + \vartheta)x + \vartheta\xi = 0 \quad (2.9)$$

$$(D^2 + \gamma_s D + \omega^2 - \omega_c^2)x + [D^2 + (\gamma_c + \gamma_s)D + \omega^2]\xi = 0$$

Если $\alpha < 1$ ($\gamma_c(\gamma_c + \gamma_s) < \omega_c^2$), то система (2.9) асимптотически устойчива при $0 \leq k < k^0$, где

$$k^0 = \beta_1(\gamma_c + \gamma_s)(1/c_s + 1/c_c)/(1 - \alpha^2) \quad (2.10)$$

если $\alpha \geq 1$ — при всех $k \geq 0$. При $\beta_1 \rightarrow \infty$ из выражения (2.6) получается тот же результат. При этом предельном переходе следует иметь в виду, что

устойчивость релейной системы определяется отношением k/β_1 . В отличие от (2.6)–(2.8) формула (2.10) точная.

Из выражения (2.10) следует, что с ростом величины α диапазон устойчивости расширяется.

3. Движение с линейным управлением. Перед выходом на контакт с предметом или в результате потери контакта происходит поступательное движение манипулятора с силовой обратной связью. Колебания упругого датчика с присоединенной к нему массой могут при этом быть причиной неустойчивости системы.

Исходя из выражений (1.3)–(1.5), выпишем уравнения движения системы ($M=M'+m_1+m_2$):

$$\begin{aligned} Mx'' + (m_1+m_2)\xi'' + m_2\eta'' + \beta_0x' &= Q \\ (m_1+m_2)x'' + (m_1+m_2)\xi'' + m_2\eta'' + \beta_c\xi' + c_c\xi &= 0 \\ m_2x'' + m_2\xi'' + m_2\eta'' + \beta_s\eta' + c_s\eta &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Величина Q определена выражением (1.6) или (1.7) (дополненным в соответствии с [9]), где сила $F = -c_s\eta$.

Уравнения (3.1), (1.6) имеют стационарный режим, отвечающий движению с постоянной скоростью $x' = v_0 = F_g k / (\beta_0 + \beta_1)$, при этом $\xi + \eta = 0$.

Первое уравнение (3.1) поделим на M , второе — на m_1+m_2 , третье — на m_2 . Обозначим

$$\begin{aligned} v &= x' - v_0, \quad \mu_1 = (m_1+m_2)/M, \quad \mu_2 = m_2/(m_1+m_2) \\ \gamma &= (\beta_0 + \beta_1)/M, \quad \gamma_c = \beta_c/(m_1+m_2), \quad \gamma_s = \beta_s/m_2 \\ \omega_c^2 &= c_c/(m_1+m_2), \quad \omega_s^2 = c_s/m_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

С учетом обозначений (3.2), несколько отличающихся от (2.2), уравнения (3.1), (1.6) в отклонениях от стационарного режима станут однородными:

$$\begin{aligned} (D+\gamma)v + \mu_1 D^2 \xi + \mu_1 \mu_2 (D^2 - k\omega_s^2)\eta &= 0 \\ Dv + P_c(D)\xi + \mu_2 D^2 \eta = 0, \quad Dv + D^2 \xi + P_s(D)\eta &= 0 \\ P_c(D) = D^2 + \gamma_c D + \omega_c^2, \quad P_s(D) = D^2 + \gamma_s D + \omega_s^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Характеристическое уравнение системы (3.3) имеет вид

$$S(z) = \det \begin{vmatrix} z + \gamma & \mu_1 z^2 & \mu_1 \mu_2 (z^2 - k\omega_s^2) \\ z & P_c(z) & \mu_2 z^2 \\ z & z^2 & P_s(z) \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

Условия Гурвица для уравнения (3.4) в общем случае проанализировать сложно. Рассмотрим поэтому два предельных случая: жесткой конструкции манипулятора (при этом существенна только податливость датчика) и жесткого датчика (при этом существенна податливость конструкции, а датчик работает как акселерометр).

Жесткая конструкция. Введем большой параметр λ и будем считать, что

$$\omega_c = \lambda \omega_0, \quad \gamma_c = \lambda \gamma_0 \quad (\lambda \gg 1) \quad (3.5)$$

Такая асимптотика оправдана, если при увеличении жесткости конструкции величина γ_c изменяется пропорционально частоте ω_c . Это имеет место, если при увеличении жесткости конструкции декремент затухания колебаний в ней, как это бывает в действительности [11], меняется мало. Величина $\varepsilon = 1/\lambda$ — малый параметр.

В этом случае два корня характеристического уравнения (3.4) имеют порядок величины λ , а три других корня — порядок единицы [12].

Заменяя в детерминанте (3.4) z на λw , получим

$$\varepsilon^5 S(z) = w^3 [(1-\mu_1)(1-\mu_2)w^2 + (1-\mu_1\mu_2)(\gamma_0 w + \omega_0^2)] + O(\varepsilon) = 0 \quad (3.6)$$

Пользуясь теоремой Руше [13], можно показать, что два больших по модулю корня уравнения (3.6) с точностью до величины $O(\varepsilon)$ совпадают с нулями трехчлена, стоящего в квадратных скобках. Следовательно, два корня уравнения (3.4), имеющие порядок λ , можно представить в виде

$$z_i = \lambda w_i + O(1) \quad (i=1, 2) \quad (3.7)$$

Считая, что $|z| \sim 1$, запишем характеристическое уравнение (3.4) так:

$$\varepsilon^2 S(z) = \omega_0^2 S_1(z) + O(\varepsilon) \quad (3.8)$$

Пусть z_i' ($i=1, 2, 3$) — три корня уравнения $S_1(z) = 0$. Корни z_j ($j=3, 4, 5$) уравнения (3.8) тогда имеют вид

$$z_{i+2} = z_i' + O(\varepsilon) \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.9)$$

Поскольку действительные части корней (3.7) при больших значениях λ отрицательны, устойчивость системы определяют корни (3.9). Последние с точностью до величины $O(\varepsilon)$ совпадают с корнями характеристического уравнения при абсолютно жесткой конструкции

$$S_1(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_3 = 1 - \mu_1 \mu_2 \quad (3.10)$$

$$a_2 = \gamma + \gamma_s, \quad a_1 = \gamma \gamma_s + \omega_s^2 (1 + \mu_1 \mu_2 k), \quad a_0 = \gamma \omega_s^2$$

Все коэффициенты уравнения (3.10) заведомо положительны. Следовательно, единственное условие устойчивости: $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$. Оно выполняется при любом $k \geq 0$.

Жесткий датчик. Будем считать, что

$$\omega_s = \lambda \omega_1, \quad \gamma_s = \lambda \gamma_1 \quad (\lambda \gg 1) \quad (3.11)$$

где ω_1 и γ_1 — положительные постоянные.

В этом случае также два корня характеристического уравнения (3.4) имеют порядок величины λ , а три — порядок единицы. Первые два корня можно представить в виде (3.7), где w_i ($i=1, 2$) — нули трехчлена $(1-\mu_2)w^2 + \gamma_1 w + \omega_1^2$. Три других имеют вид (3.9), где z_i' ($i=1, 2, 3$) — корни характеристического уравнения при абсолютно жестком датчике

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_3 = 1 - \mu_1 \quad (3.12)$$

$$a_2 = \gamma + \gamma_c (1 + k \mu_1 \mu_2), \quad a_1 = \gamma \gamma_c + \omega_c^2 (1 + k \mu_1 \mu_2), \quad a_0 = \gamma \omega_c^2$$

Как и в предыдущем случае жесткой конструкции, устойчивость системы при больших значениях λ определяют корни «предельного» уравнения третьего порядка, в данном случае уравнения (3.12). При $k=0$ эти корни имеют отрицательные действительные части. Из неравенства Гурвица $a_1 a_2 > a_0 a_3$ видно, что система устойчива при любом $k > 0$.

4. Движение с релейным управлением. При релейном управлении (1.7) система (3.1) имеет стационарный режим, отвечающий движению с постоянной скоростью (считаем, что $F_g k / \beta_1 < Q_0 / \beta_0$): $\dot{x} = v_0 = F_g k / \beta_1$.

Исследуем устойчивость этого стационарного режима. В режиме скольжения

$$v = \dot{x} = \eta k c_s / \beta_1 = \eta \Phi \quad (4.1)$$

Из выражений (3.1), (3.2), (4.1) получим уравнения в отклонениях от стационарного режима, описывающие скользкие движения

$$P_c(D) \xi + (\mu_2 D^2 + \Phi D) \eta = 0, \quad D^2 \xi + (P_s(D) + \Phi D) \eta = 0 \quad (4.2)$$

Характеристическое уравнение системы (4.2) имеет вид

$$\begin{aligned} a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 &= 0 \\ a_4 &= 1 - \mu_2, \quad a_3 = \gamma_c + \gamma_s, \quad a_2 = \omega_c^2 + \omega_s^2 + \gamma_c \gamma_s + \vartheta \gamma_c \\ a_1 &= \gamma_c \omega_s^2 + \gamma_s \omega_c^2 + \vartheta \omega_c^2, \quad a_0 = \omega_c^2 \omega_s^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Выпишем старшее условие Гурвица для системы (4.3)

$$\begin{aligned} (\gamma_c \omega_s^2 + \gamma_s \omega_c^2 + \vartheta \omega_c^2) [(\omega_c^2 + \omega_s^2 + \gamma_c \gamma_s + \vartheta \gamma_c)(\gamma_c + \gamma_s) - \\ - (1 - \mu_2)(\gamma_c \omega_s^2 + \gamma_s \omega_c^2 + \vartheta \omega_c^2)] > \omega_c^2 \omega_s^2 (\gamma_c + \gamma_s)^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

При $\vartheta=0$ это неравенство выполняется. Обозначим $\alpha^2 = \gamma_c(\gamma_c + \gamma_s)/\omega_s^2$. В случае $\alpha^2 < 1 - \mu_2$ в квадратных скобках в левой части неравенства стоит монотонная, неограниченно убывающая функция ϑ . Таким образом, найдется такая величина $\vartheta^0 > 0$ ($k^0 > 0$), что при $0 \leq \vartheta < \vartheta^0$ движение устойчиво, а при $\vartheta > \vartheta^0$ — неустойчиво. В случае $\alpha^2 \geq 1 - \mu_2$ неравенство (4.4) выполняется для всех значений $\vartheta > 0$.

В некоторых предельных случаях формулу (4.4) можно упростить.

В случае (3.5) жесткой конструкции система всегда устойчива при $\alpha^2 \geq 1 - \mu_2$. При $\alpha^2 < 1 - \mu_2$ для границы области устойчивости найдем выражение

$$k^0 = \beta_1 \gamma_c / [c_s (1 - \mu_2 - \gamma_c^2 / \omega_c^2)] \quad (4.5)$$

Сравнивая этот результат со случаем линейного управления при «жесткой» конструкции (3.5), следует учесть, что при $\gamma_c \sim \lambda$ и $\omega_c \sim \lambda$ значение k^0 , в соответствии с (4.5) также имеет порядок величины λ .

В случае (3.11) жесткого датчика получим согласно неравенству (4.4), что система устойчива при всех значениях $k > 0$.

Пусть ω_c и ω_s — величины одного порядка. Будем считать, что $\omega_c \gg \gamma_c$, $\omega_s \gg \gamma_s$, т. е. декременты затухания колебаний в конструкции и в датчике малы. Предположим также, что $\mu_2 \ll 1$, т. е. масса руки робота существенно больше массы, присоединенной к датчику (массы захвата). Условие (4.4) приводит в этом случае к следующему приближенному выражению для границы области устойчивости:

$$k^0 = \beta_1 \gamma_c (\omega_s^2 / \omega_c^2 - 1) / c_s \quad \text{при } \omega_c < \omega_s \quad (4.6)$$

$$k^0 = \beta_1 \gamma_c (1 - \omega_s^2 / \omega_c^2) / c_s \quad \text{при } \omega_c > \omega_s$$

Выражение (4.6) при $\omega_c \gg \omega_s$ и малых значениях μ_2 совпадает с выражением (4.5), если в (4.5) учесть, что $\omega_c \gg \gamma_c$.

Из соотношения (4.6) видно, что при близких частотах собственных колебаний конструкции манипулятора и датчика неустойчивость может возникнуть при малых значениях коэффициента обратной связи.

Опираясь на полученные результаты, можно сделать некоторые выводы общего характера об устойчивости движений упругого манипулятора при наличии обратной связи по силе.

Из формул (2.6)–(2.8), (2.10), а также (4.5), (4.6) следует, что как при поддержании контакта манипулятора с предметом, так и при его движении в случае «мягкого» датчика диапазон устойчивости «велик». Для задачи поддержания контакта этот факт отмечен в [14].

Если при изменении жесткости конструкции декремент затухания колебаний в ней меняется мало, т. е. $\gamma_c \sim \omega_c \sim c_e^{1/2}$ [11], то из формул (2.6), (2.7), (2.10), а также (4.6) видно, что при «малой» жесткости конструкции ее увеличение приводит к уменьшению диапазона устойчивости в случае поддержания контакта манипулятора с предметом, а также при его движении.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при податливости конструкции, возникающей из-за произвольного упругодиссипа-

тивного элемента, скажем, люфта с сухим трением. Если ξ — отклонение в таком элементе, то при наличии незатухающих колебаний характеристику элемента $F_{\xi}(\xi, \dot{\xi})$ можно линеаризовать, например, методом гармонического баланса, заменив ее функцией (1.2). Используя полученные результаты, можно затем найти критическое значение k^0 , при котором возможны незатухающие колебания.

В экспериментах был использован манипулятор, описанный в [4, 5], с датчиком усилий, расположенным в запястье. Коэффициент обратной связи по скорости β_1 в следящей системе манипулятора велик ($\beta_1 \approx 4 \cdot 10^4$ с·Н/м), поэтому управление можно считать релейным.

Незатухающие колебания при поддержании контакта возникли, когда отношение k/β_1 составляло около 10^{-2} м/(с·Н). Определим теперь границу диапазона устойчивости теоретически — из выражения (2.10) для релейного управления. Жесткость датчика $c_s \approx 3,5 \cdot 10^3$ Н/м, жесткость конструкции манипулятора — на порядок больше. Параметр $\gamma_c \approx 20$ с⁻¹. Величиной затухания в датчике в данном случае можно пренебречь. Из (2.10) получаем $k^0/\beta_1 \approx 6 \cdot 10^{-3}$ м/(с·Н). Это значение близко к экспериментальному.

При поступательном движении с обратной связью по силе незатухающие колебания возникали, когда отношение k/β_1 составляло около $4 \cdot 10^{-3}$ м/(с·Н). Границу диапазона устойчивости в этом случае теоретически можно определить из выражения (4.6) для релейного управления при малых коэффициентах затухания колебаний (в нашем случае $\gamma_c \approx 20$ с⁻¹, $\gamma_s \approx 5$ с⁻¹). Частоты ω_s и ω_c составляют $\omega_s \approx 60$ с⁻¹, $\omega_c \approx 160$ с⁻¹. Из второй формулы (4.6) получаем $k^0/\beta_1 \approx 6 \cdot 10^{-3}$ м/(с·Н).

Авторы благодарят А. Б. Лизунова за помощь в проведении экспериментов с манипулятором.

ЛИТЕРАТУРА

1. Whitney D. E. Force feedback control of manipulator fine motion.— Trans. ASME. Ser. G. J. Dynam. Systems Measurement and Control, 1977, v. 99, No. 2, p. 91–97.
2. Raibert M. H., Craig J. J. Hybrid position/force control of manipulators.— Trans. ASME. Ser. G. J. Dynam. Systems Measurement and Control, 1981, v. 103, No. 2, p. 126–133.
3. Gurfinkel V. S., Devjanin E. A., Anishchenko S. A., Lensky A. V., Mozhzhevelov S. B., Shneider A. Yu. Adaptive manipulator with force sensor.— In: Proc. of the 4th CISM—IFToMM Symp.—ROMANSY-81. Warsaw: PNW. 1981, p. 327–336.
4. Gurfinkel V. S., Devjanin E. A., Lensky A. V., Mozhzhevelov S. B., Formalsky A. M., Shneider A. Yu. Controlling a manipulator using sensory motor interaction.— Robotics, 1984, v. 2, p. 155–157.
5. Гурфинкель В. С., Десянин Е. А., Ленский А. В., Можжевелов С. Б., Формальский А. М., Шнейдер А. Ю. Силловая обратная связь в системе управления манипулятором.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 6, с. 56–64.
6. Черноусько Ф. Л. Динамика управляемых движений упругого манипулятора.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 5, с. 142–152.
7. Гориневский Д. М. К динамике манипулятора с учетом податливости шарниров.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 6, с. 43–48.
8. Чиликин М. Г., Сандлер А. С. Общий курс электропривода. М.: Энергоиздат, 1981. 576 с.
9. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— Матем. сб., 1960, т. 51, вып. 1, с. 99–128.
10. Формальский А. М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.
11. Вибрации в технике. Т. 6. Защита от вибраций и ударов./Под ред. К. В. Фролова. М.: Машиностроение, 1981. 456 с.
12. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 5, с. 3–22.
13. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
14. Nevins J. L., Whitney D. E. Exploratory research in industrial modular assembly.— In: Proc. 4th Internat. Symp. on Industr. Robots, Tokyo, 1974, p. 65–78.

Москва

Поступила в редакцию
2.IV.1984