МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1985

УДК 534.014

К ВОПРОСУ ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УСРЕДНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ФОККЕРА — ПЛАНКА — КОЛМОГОРОВА

НГУЕН ДОНГ АНЬ

Получено одно условие интегрируемости усредненных уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова, при выполнении которого удается записать частное решение исследуемых уравнений в квадратурах. Это частное решение удовлетворяет дополнительным так называемым условиям нулевых потоков вероятности и может не совпадать с истинным решением, которое действительно имеет место на практике. С использованием указанного условия интегрируемости рассматриваются различные квазилинейные системы второго порядка с периодическим и случайным возбуждением, для которых найдены частные плотности вероятностей амплитуды и фазы.

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, уравнение движения которой имеет вид

$$x^{\cdot\cdot}+\omega^2x=\varepsilon f(x,x^{\cdot},\nu t)+\sqrt{\varepsilon}\sigma g(x,x^{\cdot})\xi^{\cdot}(t) \tag{1}$$

В главной резонансной области $\omega^2=\nu^2+\varepsilon\Delta$, где $\xi^{\cdot}(t)$ — «белый шум» с единичной интенсивностью, функция f является периодической по t с периодом $2\pi/\nu$. Стохастическое дифференциальное уравнение (1) будем понимать в смысле Ито [1, 2]. Используя выражение для ω^2, перепишем уравнение (1) в виде

$$x^{\cdot\cdot}-\nu^2x=\varepsilon f_1(x,x^{\cdot},\nu t)+\sqrt{\varepsilon}\sigma g(x,x^{\cdot})\xi^{\cdot}(t) \tag{2}$$

$$f_1(x,x^{\cdot},\nu t)=f(x,x^{\cdot},\nu t)-\Delta x$$

Заменой переменных (1) $x=a\cos\psi$, $x^{\cdot}=-a\nu\sin\psi$, $\psi=\nu t+\theta$ при помощи формулы Ито уравнение (2) преобразуем к стандартному виду

$$da=\left[-\frac{\varepsilon}{\nu}f_1(x,x^{\cdot},\nu t)\sin\psi+\frac{\varepsilon\sigma^2g^2(x,x^{\cdot})\cos^2\psi}{2\nu^2a}\right]dt-\frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{\nu}g(x,x^{\cdot})\sin\psi\, d\xi(t)$$

$$d\theta=\left[-\frac{\varepsilon}{a\nu}f_1(x,x^{\cdot},\nu t)\cos\psi-\frac{\varepsilon\sigma g^2(x,x^{\cdot})\sin\psi\cos\psi}{a^2\nu^2}\right]dt- \tag{3}$$

$$-\frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{a\nu}g(x,x^{\cdot})\cos\psi\, d\xi(t)$$

Уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова, соответствующее стационарной плотности вероятностей амплитуды и фазы $W(a,\theta)$ системы (3), усредненной согласно [1], имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial a}(K_1W)+\frac{\partial}{\partial\theta}(K_2W)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(K_{11}W)+\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial\theta}(K_{12}W)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(K_{22}W)$$

$$K_1(a,\theta)=\underset{t}{M}\left\{-\frac{1}{\nu}f_1(x,x^{\cdot},\nu t)\sin\psi+\frac{\sigma^2}{2\nu^2a}g^2(x,x^{\cdot})\cos^2\psi\right\}$$

$$K_2(a,\theta)=\underset{t}{M}\left\{-\frac{1}{a\nu}f_1(x,x^{\boldsymbol{\cdot}},\nu t)\cos\psi+\frac{\sigma^2}{a^2\nu^2}g^2(x,x^{\boldsymbol{\cdot}})\sin\psi\cos\psi\right\}$$

$$K_{11}(a,\theta)=\underset{t}{M}\left\{\frac{\sigma^2}{\nu^2}g^2(x,x^{\boldsymbol{\cdot}})\sin^2\psi\right\},\qquad K_{22}(a,\theta)=\underset{t}{M}\left\{\frac{\sigma^2}{a^2\nu^2}g^2(x,x^{\boldsymbol{\cdot}})\cos^2\psi\right\}$$

$$K_{12}(a,\theta)=\underset{t}{M}\left\{\frac{\sigma^2}{a\nu^2}g^2(x,x^{\boldsymbol{\cdot}})\sin\psi\cos\psi\right\} \tag{4}$$

Вопрос заключается в интегрировании усредненных уравнений (4). Перепишем последнее в виде (λ — произвольное число):

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[K_1W-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}(K_{11}W)-\lambda\frac{\partial}{\partial\theta}(K_{12}W)\right]=$$
$$=-\frac{\partial}{\partial\theta}\left[K_2W-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}(K_{22}W)+(\lambda-1)\frac{\partial}{\partial a}(K_{12}W)\right] \tag{5}$$

Уравнение (5) будет удовлетворено, если

$$K_1W-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}(K_{11}W)-\lambda\frac{\partial}{\partial\theta}(K_{12}W)=0,$$

$$K_2W-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}(K_{22}W)+(\lambda-1)\frac{\partial}{\partial a}(K_{12}W)=0 \tag{6}$$

или

$$K_1-\frac{1}{2}\frac{\partial K_{11}}{\partial a}-\lambda\frac{\partial K_{12}}{\partial\theta}-\frac{K_{11}}{2}\frac{\partial\ln W}{\partial a}-\lambda K_{12}\frac{\partial\ln W}{\partial\theta}=0 \tag{7}$$
$$K_2-\frac{1}{2}\frac{\partial K_{22}}{\partial\theta}+(\lambda-1)\frac{\partial K_{12}}{\partial a}-\frac{K_{22}}{2}\frac{\partial\ln W}{\partial\theta}+(\lambda-1)K_{12}\frac{\partial\ln W}{\partial a}=0$$

Пусть определитель системы (7) отличен от нуля, тогда, решая эту систему относительно $\partial\ln W/\partial a$, $\partial\ln W/\partial\theta$, получим

$$\partial\ln W/\partial a=\Phi_1(K_1,K_2,K_{11},K_{12},K_{22},\lambda),\quad \partial\ln W/\partial\theta=\Phi_2(K,\lambda) \tag{8}$$

Условие существования функции W из системы (8) является условием интегрируемости усредненных уравнений (4) (разумеется, это условие не является самым общим): коэффициенты $K_1(a,\theta)$, $K_2(a,\theta)$, $K_{11}(a,\theta)$, $K_{12}(a,\theta)$, $K_{22}(a,\theta)$, λ должны удовлетворять условию

$$\partial\Phi_1/\partial\theta(a,\theta,\lambda)=\partial\Phi_2/\partial a(a,\theta,\lambda) \tag{9}$$

При выполнении условия интегрируемости (9), налагаемого на коэффициенты диффузии и сноса $K_1, K_2, K_{11}, K_{12}, K_{22}$, из (8) получим частное решение соответствующего уравнения (4):

$$W(a,\theta)=C\exp\left\{\int[\Phi_1\,da+\Phi_2\,d\theta]\right\}C=\text{const},\quad C>0 \tag{10}$$

Отметим, что полученное таким образом, частное решение (10), удовлетворяющее дополнительным условиям «нулевых потоков вероятности» (6), может не совпадать с истинным решением исследуемой системы, которое действительно имеет место на практике. Кроме того, частное решение (10) может не удовлетворять известным свойствам плотности вероятностей (например, свойству нормировки). Следовательно, для каждого конкретного случая, где выполняется условие интегрируемости (9), следует наложить условия для того, чтобы соответствующее частное решение (10) было плотностью вероятностей. Ниже это показано на примерах. В частности, для тех уравнений (1), где $K_{12}(a,\theta)=0$, из (7) получим

$$\frac{\partial \ln W}{\partial a}=\frac{2}{K_{11}}\left\{K_1-\frac{1}{2}\frac{\partial K_{11}}{\partial a}\right\},\qquad \frac{\partial \ln W}{\partial \theta}=\frac{2}{K_{22}}\left\{K_2-\frac{1}{2}\frac{\partial K_{22}}{\partial \theta}\right\} \tag{11}$$

Условие интегрируемости в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\frac{K_1}{K_{11}}-\frac{1}{2K_{11}}\frac{\partial K_{11}}{\partial a}\right\}=\frac{\partial}{\partial a}\left\{\frac{K_2}{K_{22}}-\frac{1}{2K_{22}}\frac{\partial K_{22}}{\partial \theta}\right\} \tag{12}$$

Из (11) при выполнении условия (12) получим решение соответствующего уравнения (4) ($C=\text{const}$, $C>0$):

$$W(a,\theta)=C\exp\left\{2\int\left[\frac{K_1-{}^1/_2\,\partial K_{11}/\partial a}{K_{11}}\right]da+\left[\frac{K_2-{}^1/_2\,\partial K_{22}/\partial\theta}{K_{22}}\right]d\theta\right\} \tag{13}$$

Рассмотрим теперь некоторые важные случаи ($g(x,x^{\cdot})=1$):

$$x^{\cdot\cdot}+\omega^2x=\varepsilon f(x,x^{\cdot},\nu t)+\sqrt{\varepsilon}\sigma\xi^{\cdot}(t) \tag{14}$$

Имеем $K_{11}(a,\theta)={}^1/_2\sigma^2/2\nu^2$, $K_{12}(a,\theta)=0$, $K_{22}(a,\theta)={}^1/_2\sigma^2/(a^2\nu^2)$, а условие интегрируемости (2) примет вид

$$\partial(K_1(a,\theta))/\partial\theta=\partial(a^2K_2(a,\theta))/\partial a \tag{15}$$

В [3, 4] указан класс уравнений (14), для которых соответствующие коэффициенты $K_1(a,\theta)$, $K_2(a,\theta)$ удовлетворяют условию (15). При выполнении условия (15) из (3) получим

$$W(a,\theta)=C\exp\left\{\frac{4\nu^2}{\sigma^2}\int K_1(a,\theta)\,da+(a^2K_2(a,\theta))\,d\theta\right\} \tag{16}$$

Рассмотрим несколько примеров. 1. Уравнение Ван-дер-Поля с внешним периодическим и случайным возбуждением

$$x^{\cdot\cdot}+\nu^2x=\varepsilon(1-\gamma x^2)x^{\cdot}+\varepsilon p\cos\nu t+\sqrt{\varepsilon}\sigma\xi^{\cdot}(t) \tag{17}$$

Вычисления дают

$$K_1(a,\theta)=\frac{\sigma^2}{4\nu^2a}+\frac{a}{2}-\frac{\gamma a^3}{8}-\frac{p\sin\theta}{2\nu},\qquad K_2(a,\theta)=-\frac{p\cos\theta}{2a\nu} \tag{18}$$

Условие (15) удовлетворяется, а из (16) получим плотность вероятностей амплитуды и фазы

$$W(a,\theta)=Ca\exp\left\{-\frac{2\nu p}{\sigma^2}a\sin\theta+\frac{\nu^2a^2}{\sigma^2}-\frac{\gamma\nu^2}{8\sigma^2}a^4\right\} \tag{19}$$

2. Уравнение с периодически изменяющейся собственной частотой

$$x^{\cdot\cdot}+\nu^2x=-\varepsilon hx^{\cdot}+\varepsilon\gamma x\cos 2\nu t+\varepsilon p\cos\nu t+\sqrt{\varepsilon}\sigma\xi^{\cdot}(t) \tag{20}$$

Вычисления дают

$$K_1(a,\theta)=\frac{\sigma^2}{4\nu^2a}-\frac{h}{2}a-\frac{p}{2\nu}\sin\theta+\frac{\gamma a}{\nu}\frac{\sin 2\theta}{4} \tag{21}$$

$$K_2(a,\theta)=-\frac{p\cos\theta}{2\nu a}+\frac{\gamma}{\nu}\frac{\cos 2\theta}{4},$$

Условие (15) выполнено, а из (16) получим решение соответствующего уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова

$$W(a,\theta)=Ca\exp\left\{-\frac{2\nu p}{\sigma^2}a\sin\theta-\frac{\nu^2}{\sigma^2}\left(h-\frac{\gamma}{2\nu}\sin 2\theta\right)a^2\right\} \tag{22}$$

Из (22) следует, что для того, чтобы $W(a,\theta)\to 0$ при $a\to\infty$, необходимо и достаточно $h>{}^1/_2|\gamma|/\nu$.

Уравнение (20) рассмотрено в [2] другим способом $(g(x, x^{\cdot})=x)$:

$$x^{\cdot\cdot}+\nu^2x=\varepsilon f_1(x, x^{\cdot}, \nu t)+\sqrt{\varepsilon}\sigma x\xi^{\cdot}(t) \qquad (23)$$

В этом случае будем иметь

$$K_{11}(a, \theta)={}^1/_8\sigma^2a^2/\nu^2, \quad K_{12}=(a, \theta)=0, \quad K_{22}(a, \theta)={}^3/_8\sigma^2/\nu^2 \qquad (24)$$

а условие интегрируемости (12) примет вид

$$\partial[K_1(a, \theta)/a^2]/\partial\theta=\partial({}^1/_3K_2(a, \theta))/\partial a \qquad (25)$$

Из (13) с учетом (24) получим решение соответствующего уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова

$$W(a,\theta)=C\exp\left\{\frac{16\nu^2}{\sigma^2}\int\left[\frac{K_1(a,\theta)-a}{a^2}\right]da+\frac{K_2(a,\theta)}{3}d\theta\right\} \qquad (26)$$

3. Уравнение со случайно изменяющейся собственной частотой $(\omega^2-$ $-\nu^2=\varepsilon\Delta)$:

$$x^{\cdot\cdot}+(\nu^2-\sqrt{\varepsilon}\sigma\xi^{\cdot}(t))x=\varepsilon[-\Delta x+(1-\gamma x^2)x^{\cdot}+\beta x^2\cos\nu t] \qquad (27)$$

Вычисления дают

$$K_1(a, \theta)={}^3/_{16}\sigma^2a/\nu^2+{}^1/_2a-{}^1/_8\gamma a^3-{}^1/_8\beta a^2\sin\theta/\nu,$$
$$K_2(a, \theta)={}^1/_2\Delta/\nu-{}^3/_8\beta a\cos\theta/\nu.$$

Условие интегрируемости (25) выполнено, а из (26) получим решение соответствующего уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова

$$W(a,\theta)=Ca^m\exp\left\{\frac{8\Delta\nu}{3\sigma^2}\theta-\frac{2\nu\beta\sin\theta}{\sigma^2}a-\frac{\gamma\nu^2}{\sigma^2}a^2\right\}, \quad m=\frac{8\nu^2}{\sigma^2}+1 \qquad (28)$$

Как видно при ненулевой расстройке $(\Delta\neq0)$ частное решение (28) не нормируемо по θ. Оно нормировано только при условии нулевой расстройки $\Delta=0$. Следовательно, частное решение (28) может быть плотностью вероятностей амплитуды и фазы только для частного случая уравнения (27) с нулевой расстройкой.

Автор признателен М. Ф. Диментбергу за ценные замечания к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах.— В кн.: Приближенные методы исследования нелинейных систем. Киев: Изд-е Ин-та математики АН УССР, 1976, с. 102–147.
2. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
3. *Нгуен Донг Ань.* Случайные колебания механической системы с одной степенью свободы под воздействием периодической силы и «белого шума».— Укр. матем. ж., 1982, т. 34, № 5, с. 633–636.
4. *Нгуен Донг Ань.* К вопросу исследования случайных колебаний асимптотическими методами нелинейной механики и методом уравнений ФПК.— В кн.: Тр. 3-й нац. конф. по механике. Изд. НЦНИ СРВ, Ханой, 1983, с. 5–10.

Вьетнам, Ханой

Поступила в редакцию
27.V.1983