

УДК 531.66

УРАВНЕНИЯ УДАРА СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ

СМИРНОВ Ю. П.

С помощью представления о вариантах опирания учитываются многократные соударения тел в случае удерживающих связей с сухим трением.

1. Постановка задачи движения системы с трением. Механическая система состоит из абсолютно твердых тел и имеет n степеней свободы. Контакт между телами системы предполагается точечным или приводящимся к точечному. Зазоры и лишние связи в кинематических парах отсутствуют. Число и расположение точек опирания задаются так, чтобы обеспечивалась статическая определенность реакций связей.

Система мысленно расчленяется на части и составляются уравнения движения, которые в случае неударных сил имеют вид

$$d/dt(\partial T/\partial \dot{q}_i) - \partial T/\partial q_i = Q_i + Q_i^r \quad (i=1, \dots, n) \quad (1.1)$$

$$d/dt(\partial T/\partial \dot{q}_{n+r}) - \partial T/\partial q_{n+r} = Q_{n+r} + Q_{n+r}^r + \lambda_{n+r} \quad (r=1, \dots, m)$$

Обобщенные силы трения Q^r зависят от неизвестных нормальных реакций, для вычисления которых введено m избыточных координат q_{n+1}, \dots, q_{n+m} . Причем $m=6l-n$ для пространственных расчетных схем, l — число подвижных тел системы (всего $6l$ уравнений). После завершения вычислений во второй группе формул все избыточные координаты и производные от них по времени обратим в нуль [1]. Обобщенные реакции λ представляют собой линейные комбинации нормальных реакций. Для замыкания системы уравнений используем m соотношений Кулона между нормальными реакциями и силами трения.

Удерживающие связи дают возможность телам системы различным образом опираться друг на друга. Вариантов опирания тел системы может быть очень много [2].

Предлагается общий метод составления уравнений движения систем с трением, охватывающий все возможные варианты опирания тел системы. Метод основывается на предположении, что в обычных условиях твердые тела при соприкосновении могут только давить друг на друга, отталкивать друг друга, но не могут прилипать друг к другу. Каждому варианту опирания ставится в соответствие своя система нормальных реакций, направленных «в тело». Несмотря на большое число вариантов, система уравнений записывается один раз (для произвольного варианта опирания). Это становится возможным, поскольку структура уравнений для любого варианта опирания одна и та же, меняются только координаты точек опирания, коэффициенты трения и направления нормальных реакций. Изменение направления при смене варианта в системах с удерживающими двухсторонними связями задается множителем (-1) в степени некоторых вариантных индексов. Эти индексы принимают значения один или два. С каждым индексом и с каждым значением индекса связаны координаты точек опирания и коэффициенты трения. Перебирая индексы, можно получить любой вариант опирания. Интуитивно ясно, что реализуется какой-либо один вариант опирания — именно тот, в котором все нормальные реакции неотрицательны. По этому условию и отбирается истинный вариант опирания.

Рациональный алгоритм поиска [2] позволяет избежать последовательного перебора вариантов и весьма быстро обнаруживает реализуемый вариант опирания. Во многих случаях для этого нужно всего две попытки определения реакций.

При описании ударных явлений считаем, что ударные импульсы мгновенно распространяются в механической системе, так как тела системы абсолютно твердые, а зазоры в кинематических парах отсутствуют. Считаем также, что каждая точка опирания может иметь свой коэффициент трения и значения его при ударных и неударных воздействиях могут быть разными.

Соотношения между импульсами и изменениями скоростей получим из уравнений (1.1), интегрируя их по времени в пределах времени удара и пренебрегая импульсами конечных сил

$$(\partial T/\partial \dot{q}_i)^1 - (\partial T/\partial \dot{q}_i)^0 = S_i + S_i^{\tau} \quad (i=1, \dots, n) \quad (1.2)$$

$$(\partial T/\partial \dot{q}_{n+r}^*)^1 - (\partial T/\partial \dot{q}_{n+r}^*)^0 = S_{n+r} + S_{n+r}^{\tau} + \Lambda_{n+r} \quad (r=1, \dots, m)$$

Здесь S_i — задаваемые обобщенные импульсы, S_i^{τ} — обобщенные импульсы трения, S_{n+r}, S_{n+r}^{τ} — задаваемые импульсы и импульсы трения, вычисленные на избыточных перемещениях, Λ — обобщенные ударные реакции, представляющие собой линейные комбинации импульсов нормальных реакций.

Система импульсных уравнений (1.2) замыкается соотношениями Кулона и, возможно, некоторыми соотношениями для скоростей.

Отметим, что структуры уравнений (1.1) и (1.2) одинаковы, т. е. коэффициенты при соответствующих неизвестных либо одинаковы, либо имеют сходное строение.

Уравнения (1.2) записываются для произвольного варианта опирания звеньев системы, а реализуемый вариант выбирается по условию неотрицательности всех импульсов нормальных реакций.

При ударах развиваются очень большие усилия и становится ощутимой деформируемость тел системы по крайней мере в отдельных точках — точках опирания звеньев. Однако решение задачи удара даже в рамках механики системы твердых тел с упругими связями является весьма сложным делом, тем более, что упруго-диссипативные свойства связей, как правило, неизвестны.

В процессе деформирования при ударах за фазой нагружения точек контакта звеньев следует фаза разгрузки и отрыв (отскок) звеньев, если связи освобождающие, что можно наблюдать на множестве повседневных примеров. Если же связи удерживающие, то отскок опорных точек от одних поверхностей вызовет столкновение и удар других опорных точек на других поверхностях, реализующих связи, и снова отскок и т. д. При такого рода многократных отскоках между поверхностями связей и ненагруженными опорными точками могут возникнуть зазоры и ненагруженные опорные точки будут иметь в некоторые моменты времени нормальные к связям компоненты скорости. Однако эти зазоры можно не учитывать, если, следуя Ньютону, ввести в рассмотрение коэффициенты восстановления для каждой точки опирания, которые определим как отношение импульса разгрузки к импульсу нагружения. Таким путем можно косвенно учесть деформируемость, пользуясь импульсными уравнениями динамики системы твердых тел (1.2).

При многократных отскоках, конечно, меняются варианты опирания тел системы и потери на трение будут, естественно, больше, чем в модели единственного соударения.

Таким образом получаем модель бесконечно ударного процесса в системе с удерживающими связями, но при этом суммарные импульсы сил трения оказываются конечными, а длительность ударного процесса считается равной нулю, так как зазоры и деформации не учитываются в уравнениях (1.2).

Ударный процесс здесь описывается не дифференциальными, а алгебраическими уравнениями (1.2) и рассматривается как затухающее колебание ударных импульсов, происходящее при каждом соударении в одной фазе для всей системы. Конечно, в действительности это не совсем так, но предлагаемая простая модель позволяет уловить имеющие место на самом деле упругие отскоки, увеличение импульсов трения в связи с отскоками, быстрое затухание колебаний, вызванных ударами, в жестких системах.

Таким образом, задача удара в изложенной постановке принципиально отличается от известных задач, возникающих в виброударных системах [3-7]. Многократные удары в кинематических парах учтем при разных видах соударений следующим образом.

2. Удар при действии заданных импульсов. Пусть на систему подействовали заданные импульсы, обобщенные значения которых равны S_i . При этом все связи системы до, во время и после удара сохраняются. Считаем, что продолжительность дей-

ствия задаваемых импульсов не более периода возрастания нагрузки на связи. Уравнения (1.2) позволяют вычислить импульсы нормальных реакций, импульсы трения и найти изменения обобщенных скоростей для истинного варианта опирания при действии начальных импульсов (здесь задаваемых) и последующих отраженных импульсов связей. Считаем, что после прекращения действия заданных импульсов нагруженные опорные точки отскакивают от опорных поверхностей под действием отраженных импульсов, т. е. импульсов реакций, умноженных на соответствующие коэффициенты восстановления. Полученные таким приемом импульсы уже рассматриваются как заданные, они приведут к новому изменению обобщенных скоростей. Вычисления многократно повторяются, пока модули изменения скоростей не станут меньше наперед заданных величин. Изменения скоростей при этом суммируются.

В системах, кинематические пары которых имеют одну степень свободы, во время удара могут меняться знаки относительно скоростей, а это значит, что меняются коэффициенты уравнений (1.2). В этом случае заданные ударные импульсы следует разделить на части, соответствующие моментам смены знаков относительных скоростей. Вычисления начинаются при знаках скоростей перед ударом. Затем определяется, какая из относительных скоростей обратится в нуль раньше других и какая часть заданных импульсов будет при этом затрачена. Далее в уравнениях (1.2) меняется знак этой скорости и продолжают вычисления с остатками импульсов. Так последовательно перебираются все скорости, претерпевшие изменение знаков. В интервалах постоянства знаков скоростей определяются варианты опирания, изменения скоростей и импульсы в опорных точках. Изменения скоростей суммируются по всем интервалам постоянства знаков скоростей. Также суммируются импульсы в опорных точках с умножением на соответствующие коэффициенты восстановления. На этом заканчивается определение действия начальных импульсов, а далее производится учет многократных отражений. Если в процессе многократных отскоков изменятся знаки некоторых относительных скоростей, то это означает, что эти скорости обратились в нуль.

Если время действия заданных импульсов в несколько раз превышает период нагружения связей, то действие таких импульсов будет почти статическим и не вызовет отскоков. В этом случае определение импульсов трения следует вести рассчитывая только единственное соударение тел системы. Чем жестче система, тем ближе она к модели единственного соударения. В реальных системах величины импульсов трения занимают промежуточное положение в интервале, определяемом моделью многократных отскоков и моделью единственного соударения тел. Этот промежуток тем короче, чем меньше значения коэффициентов восстановления, т. е. чем жестче система.

Если в системе имеются шарниры с трением и опирание в шарнирах приведено к двухсторонней схеме, то импульсы трения на каждом соударении должны определяться из нелинейной системы уравнений [2].

Перейдем теперь к автономным задачам, когда величины ударных импульсов при столкновениях нельзя считать заданными [7].

3. Удары в автономных системах. При решении задач о столкновении тел двух разных систем или двух тел одной системы должны быть сформулированы геометрические условия, при помощи которых можно найти координаты точек столкновения, проекции общей нормали, направление возможного проскальзывания и момент времени столкновения. Условия столкновения тел двух разных систем должны быть записаны в некоторой общей пространственной системе отсчета.

3.1. Удар с отскоком. Соударение тел двух разных систем. Системы имеют соответственно n_1 и n_2 степеней свободы и требуют для расчленения введения m_1 и m_2 избыточных координат. Два соударяющихся тела могут прийти в соприкосновение в нескольких точках одновременно. Число точек d подчинено условию $d \leq 6$. В импульсные соотношения войдут $n_1 + n_2$ изменений скоростей, $m_1 + m_2$ импульсов нормальных реакций, $m_1 + m_2$ импульсов трения, d нормальных и d касательных импульсов в местах образования новых связей. Всего имеем $n_1 + n_2 + 2m_1 + 2m_2 + 2d$ соотношений (если $d \leq 5$), причем d из $2d$ последних есть отношения разности скоростей соударяющихся точек после удара к такой же разности до удара в направлении нормалей

$$-(V_{1n} - V_{2n})^1 / (V_{1n} - V_{2n})^0 = k \quad (3.1)$$

Другие d соотношений есть либо выражения для импульсов трения $S_{\tau} = fS$, либо равенства нулю относительных скоростей точек соударения в направлении возможного проскальзывания после удара $V_{1\tau} - V_{2\tau} = 0$. Если

$d=6$, то последняя группа соотношений состоит из шести равенств типа (3.1).

После начального соударения системы разделяются и производится учет многократных отражений в каждой из них. Для плоских расчетных схем число шесть заменяется числом три.

3.2. *Удар с отскоком. Соударение тел одной системы.* В импульсные соотношения войдут n изменений скоростей, m нормальных импульсов, t импульсов трения в постоянных связях системы, d нормальных и d касательных импульсов в связях, возникающих в момент удара, если $d \leq 5$. Всего будет $n+2m+2d$ соотношений, причем последняя группа соотношений состоит из d равенств типа (3.1) и d равенств $S_{\tau} = fS$ или $V_{1\tau} - V_{2\tau} = 0$. Если $d=6$, то последняя группа соотношений состоит из шести равенств типа (3.1).

После начального соударения части системы разделяются и производится учет многократных отскоков.

3.3. *Удар с присоединением.* Начальное соударение рассчитывается, как и в случае удара с отскоком. А дальше следует учитывать многократные отражения как в постоянных связях, так и в той части наложенных при ударе связей, которые сохраняются и после удара. Если сохраняются все шесть связей, то это означает, что звенья при ударе жестко соединились и многократные соударения между ними учитывать не нужно.

3.4. *Удар, вызванный наложением новой связи с одновременным исчезновением старой.* Такие удары возникают в клиновых механизмах при скачкообразном изменении передаточного числа механизма. В точке соприкосновения тел по новой связи возникает ударный импульс, порождающий ударные импульсы в постоянных связях системы. Из $n+2m$ импульсных соотношений могут быть найдены n изменений скоростей, t нормальных импульсов и m импульсов трения. При этом учитываются многократные отскоки и возможные изменения знаков относительных скоростей.

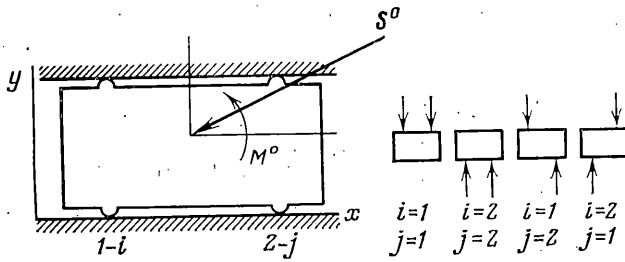
3.5. *Удар, вызванный самоторможением.* Известно, что учет трения может приводить к парадоксам, проявляющимся в форме невозможности или неоднозначности движения [8]. В случае невозможности движения нет ни одного варианта опирания со всеми неотрицательными реакциями или реакции уходят в бесконечность в одном из вариантов. Невозможность движения означает самоторможение. Неоднозначность имеем, если для нескольких наборов значений вариантных индексов появятся решения уравнений (1.1) со всеми положительными реакциями. При неоднозначности один из вариантов опирания может отвечать действительному движению. Для него определитель системы (1.1) и входящие в определитель некоторые миноры сохраняют свои знаки при непрерывном переходе от системы с трением к системе без трения. Если же во всех вариантах со всеми положительными реакциями знак определителя системы (1.1) или хотя бы одного из миноров изменится при непрерывном переходе от системы с трением к системе без трения, то такая многозначность указывает на самоторможение.

Самоторможение, проявляющееся ударом, может реализоваться при скачкообразном увеличении некоторых коэффициентов трения и в момент смены варианта опирания. При самоторможении система теряет степени свободы, а при ударном самоторможении относительные скорости в соответствующих кинематических парах мгновенно обращаются в нуль. Это позволяет вычислять изменения скоростей и ударные импульсы в других кинематических парах с учетом многократных отражений. Можно также найти ударные импульсы и реализованные значения коэффициентов трения в кинематической паре, где имело место самоторможение. При этом соответствующие определители считаем равными нулю.

В системах, содержащих шарниры с трением, отсутствие действительных решений есть одна из форм проявления самоторможения [9–11]. При этом будут возникать удары, приводящие не к полной остановке движения в соответствующем шарнире, а к такому уменьшению модуля угловой скорости, при котором исчезает мнимая часть решения. По этому условию можно вычислить ударные импульсы и изменения скоростей в других кинематических парах системы с учетом многократных отскоков.

4. *Примеры.* 1. Рассмотрим движение плоской призмы [2] для иллюстрации п. 2. Призма может опираться на две точки из двух пар опорных точек, при этом возможны четыре варианта полного опирания (фиг. 1).

Заданы координаты точек опирания: a_s^p — отсчитываемые от центра



Фиг. 1

масс вдоль оси x , b_s^p — отсчитываемые в направлении оси y . Для каждой опорной точки заданы коэффициенты трения f_s^p и коэффициенты восстановления k_s^p . На призму действовали заданные импульсы с компонентами главного вектора S_x^0 и S_y^0 и главного момента M^0 , приведенными к центру масс. Масса призмы — m , скорость перед ударом — x^0 . Изменение скорости при ударе и нормальные импульсы S_1^i, S_2^j найдем из уравнений

$$m(x^{*n} - x^{*(n-1)}) = S_x^n, \quad \{(-1)^i S_1^i + (-1)^j S_2^j\}^n + S_y^{n-1} = 0 \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} & \{ [(-1)^i a_1^i + (1+k_1^i) f_1^i b_1^i \operatorname{sign} x^*] S_1^i + \\ & + [(-1)^j a_2^j + (1+k_2^j) f_2^j b_2^j \operatorname{sign} x^*] S_2^j \} + M^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Индекс n означает номер соударения. При $n=1$ имеем импульсы $S_x^1 = S_x^0 - S_\tau^1 \operatorname{sign} x^0$, S_y^0 и момент импульса M^0 . Если $n \geq 2$, то

$$S_x^n = -S_\tau^n \operatorname{sign} x^*, \quad S_y^{n-1} = \{(-1)^i S_1^i k_1^i + (-1)^j S_2^j k_2^j\}^{n-1} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} M^{n-1} = & \{ [(-1)^i a_1^i + (1+k_1^i) f_1^i b_1^i \operatorname{sign} x^*] S_1^i k_1^i + \\ & + [(-1)^j a_2^j + (1+k_2^j) f_2^j b_2^j \operatorname{sign} x^*] S_2^j k_2^j \}^{n-1} \end{aligned}$$

Заметим, что предыдущему ($n-1$) и последующему (n) соударениям соответствуют различные варианты опирания.

Величина модуля обобщенного импульса трения определится выражением, учитывающим две фазы ударного взаимодействия тел: фазу нагружения и фазу разгрузки связей

$$S_\tau^n = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^2 \{ (1 + \operatorname{sign} S_1^i) (1 + \operatorname{sign} S_2^j) [(1+k_1^i) f_1^i S_1^i + (1+k_2^j) f_2^j S_2^j] \}^n$$

($n=1, 2, \dots$)

Вычисления прекращаются, как только модуль импульса трения делается меньше наперед заданной величины.

Если при $n=1$ происходит изменение знака скорости, то следует вычислить ту часть приложенного импульса tS^0 , которая обратит скорость призмы в нуль $t = -mx^0 / (S_x^0 - S_\tau^1 \operatorname{sign} x^0)$.

Затем нужно вновь определить реакции при измененном знаке скорости и вычислить приращение скорости по остатку приложенного импульса $(1-t)S^0$. После этого импульсная нагрузка для $n=2$ определится алгебраической суммой отраженных импульсов (формулы (4.2)) на двух участках начального соударения, которым могут соответствовать разные варианты опирания; в случае разных вариантов считаем равными нулю коэффициенты восстановления на участке с начальным знаком скорости в точках, которые разгрузились после смены знака скорости.

Если призма перед ударом неподвижна, то знак скорости следует за-

менить на $\text{sign } S_x^0$. И если при этом $|S_x^0| \leq |S_\tau^1|$, то призма остается неподвижной.

Если в процессе многократных отражений скорость призмы изменит знак, то это значит, что призма остановилась.

Если во всех четырех вариантах опирания окажутся отрицательные импульсные реакции, то это означает самоторможение.

2. Для иллюстрации п. 3.1 усложним рассмотренный пример. Считаем, что вместо заданного импульса S^0 прикладывается импульс, порожденный столкновением призмы с материальной точкой массы m_1 . Скорость точки перед столкновением имеет проекции x_1^0, y_1^0 . Координаты точки столкновения на призме a, b , координаты нормали к поверхности призмы в точке столкновения n_x, n_y , коэффициент трения материальной точки о призму f , коэффициент восстановления скорости k .

Импульсные соотношения для точки запишутся в виде

$$m_1(x_1^1 - x_1^0) = S n_x + S_\tau n_y \text{sign } V_\tau \quad (4.3)$$

$$m_1(y_1^1 - y_1^0) = S n_y - S_\tau n_x \text{sign } V_\tau$$

$$V_\tau = (x_1^0 - x^0) n_y - y_1^0 n_x$$

В них войдут две неизвестные компоненты скорости x_1^1, y_1^1 и два неизвестных импульса S и S_τ . Для замыкания системы уравнений определим коэффициент восстановления скорости

$$-[(x_1^1 - x^1) n_x + y_1^1 n_y] / [(x_1^0 - x^0) n_x + y_1^0 n_y] = k \quad (4.4)$$

и условие отсутствия проскальзывания в конце удара

$$(x_1^1 - x^1) n_y - y_1^1 n_x = 0 \quad (4.5)$$

Если равенство (4.5) не выполняется, то имеет место проскальзывание и модуль касательного импульса определяется формулой $S_\tau = fS$. Движение призмы описывается по-прежнему уравнениями (4.1), причем

$$S_x^0 = -S n_x - S_\tau n_y \text{sign } V_\tau, \quad S_y^0 = -S n_y + S_\tau n_x \text{sign } V_\tau \quad (4.6)$$

$$M^0 = S(n_x b - n_y a) + S_\tau(n_x a + n_y b) \text{sign } V_\tau$$

Совместное рассмотрение уравнений (4.1) при импульсной нагрузке (4.6) с уравнениями (4.3)–(4.5) производится только при $n=1$. А далее точка отскакивает и многократные отражения призмы от направляющих учитываются, как и в первом примере.

Решение системы уравнений следует начинать с предположения об отсутствии проскальзывания (4.5). После определения неизвестных проверяется условие $S_\tau \leq fS$. Если оно выполняется, то переходят к расчету многократных отскоков. В противном случае условие (4.5) заменяется условием $S_\tau = fS$ и расчет повторяется.

Если призма перед ударом неподвижна, то знак скорости следует заменить знаком величины $-[n_x + (S_\tau/S) n_y \text{sign } V_\tau]$, и если при этом $|S_\tau^1| \geq |S n_x + S_\tau n_y \text{sign } V_\tau|$, то призма остается неподвижной.

При смене знака скорости призмы следует импульс S умножить на величину t , определяющую ту часть импульса, при действии которой происходит остановка призмы. В этом случае система уравнений относительно неизвестных окажется нелинейной.

Дальше расчет импульсного движения призмы и точки производится с остатком импульса $(1-t)S$, при этом уравнения (4.1) и (4.3) решаются отдельно, поскольку импульс S уже вычислен.

3. Ударом в клиновом механизме проиллюстрируем п. 3.4. Плоский клиновой механизм состоит из двух плоских призм, направляющие которых перпендикулярны. Первый клин имеет паз, состоящий из двух участков, наклоненных под углами α_1 и α_2 к направляющим. Второй клин имеет

выступ, входящий в паз первого клина. Стороны выступа параллельны направлениям α_1 и α_2 соответственно. При попадании выступа в место излома паза происходит удар. Тела имеют по две пары точек контакта с направляющими и одну пару между собой: всего пять.

Положение первого клина определим координатой x , которая растет при движении его вправо. Считаем, что индексы верхних опорных точек первого клина и левых опорных точек второго клина равны единице, для противоположных точек — двойке. Координаты a_s^p задают положение опорных точек вдоль направляющих, b_s^p — поперек направляющих и отсчитываются от центров масс звеньев. Индекс s — номер пары точек опирания — пробегает значения 1, 2, 3 для первого клина и 3, 4, 5 для второго.

Уравнения импульсного движения получим расценив систему на части и составив по три уравнения для каждого тела

$$m_1(x^{*n} - x^{*(n-1)}) + \{[(1+k_1^i)f_1^i S_1^i + (1+k_2^j)f_2^j S_2^j] \text{sign } x^* + A_{13} S_3^h\}^n = -S_{x1}^{n-1} \quad (4.7)$$

$$\{(-1)^i S_1^i + (-1)^j S_2^j + A_{23} S_3^h\}^n = -S_{y1}^{n-1}$$

$$\{[(-1)^i a_1^i + (1+k_1^i)f_1^i b_1^i \text{sign } x^*] S_1^i + [(-1)^j a_2^j + (1+k_2^j)f_2^j b_2^j \text{sign } x^*] S_2^j +$$

$$+ [A_{23} a_3^h + A_{13} b_3^h] S_3^h\}^n = -M_1^{n-1}$$

$$m_2(x^{*n} \text{tg } \alpha_i - x^{*(n-1)} \text{tg } \alpha_d) + \{[(1+k_4^l)f_4^l S_4^l +$$

$$+ (1+k_5^m)f_5^m S_5^m \text{sign } x^* \text{sign } \alpha_i + A_{23} S_3^h\}^n = -S_{x2}^{n-1}$$

$$\{(-1)^l S_4^l + (-1)^m S_5^m - A_{13} S_3^h\}^n = -S_{y2}^{n-1}$$

$$\{[(-1)^l a_4^l + (1+k_4^l)f_4^l b_4^l \text{sign } x^* \text{sign } \alpha_i] S_4^l +$$

$$+ [(-1)^m a_5^m + (1+k_5^m)f_5^m b_5^m \text{sign } x^* \text{sign } \alpha_i] S_5^m +$$

$$+ [A_{23} b_3^{0h} - A_{13} a_3^{0h}] S_3^h\}^n = -M_2^{n-1}$$

$$A_{13} = -(-1)^h \sin \alpha_i + (1+k_3^h)f_3^h \cos \alpha_i \text{sign } x^*$$

$$A_{23} = (-1)^h \cos \alpha_i + (1+k_3^h)f_3^h \sin \alpha_i \text{sign } x^*$$

где n — номер соударения. При $n=1$, если $x^0 > 0$, то $t=1$, $d=2$; если же $x^0 < 0$, то $t=2$, $d=1$.

Правые части уравнений (4.7) вычисляются по выражениям фигурных скобок в левых частях соответствующих уравнений, как это сделано в (4.2) (с умножением импульсных реакций на коэффициенты восстановления). Для $n=1$ правые части равны нулю, для $n \geq 2$ индекс d считается равным t .

4. Рассмотрим удар, вызванный самоторможением в системе с двумя степенями свободы. Система состоит из вращающейся кулисы и плоской призмы, движущейся в прорези кулисы. Опирание в шарнире приведено к двухсторонней схеме [2]. Призма и кулиса движутся под действием пружин с жесткостями s и η . В шарнире и в прорези кулисы учитывается сухое трение (фиг. 2.). Непрерывное движение системы описывается уравнениями

$$[J_h + J + m(l+x)^2] \varphi'' + 2m(l+x)x^* \varphi' = \quad (4.8)$$

$$= -\eta\varphi - f_1 r [(N_1^i)^2 + (N_2^j)^2]^{1/2} \text{sign } \varphi'$$

$$[m_h l_1 + m(l+x)] \varphi'^2 - m x'' = -(-1)^i N_1^i + (-1)^j f N_2^j \text{sign } x^*$$

$$[m_h l_1 + m(l+x)] \varphi'' + 2m x^* \varphi' = (-1)^i f N_1^i \text{sign } x^* + (-1)^j N_2^j$$

$$m x'' - m(l+x) \varphi'^2 = -c x - (f_3^h N_3^h + f_4^l N_4^l) \text{sign } x^*$$

$$m(l+x) \varphi'' + 2m l x^* \varphi' = (-1)^h N_3^h + (-1)^l N_4^l$$

$$J\ddot{\varphi} = [(-1)^k a_s^k + f_s^k b_s^k \text{sign } x^*] N_s^k + [(-1)^l a_l^l + f_l^l b_l^l \text{sign } x^*] N_k^l$$

Здесь m_k — масса кулисы, J_k — момент инерции кулисы вокруг оси шарнира, m — масса призмы, J — момент инерции призмы вокруг ее центра масс, l_1 — расстояние между осью шарнира и центром масс кулисы, l — расстояние от оси шарнира до равновесного положения центра масс призмы, f и f_1 — коэффициент трения материалов и приведенный коэффициент трения в шарнире, r — радиус шарнира, N_s^p — нормальные реакции в опорных точках. Заметим, что искомые величины зависят от всех вариантных индексов, однако для сокращения записи индексы опущены в обозначениях обобщенных ускорений, а в обозначениях нормальных реакций оставлены только индексы, которые изменяют направление реакций.

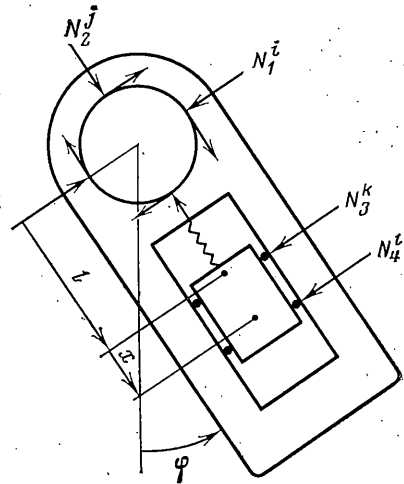
Если определитель, построенный из коэффициентов при N_s^p в пятом и шестом уравнениях системы (4.8), меняет знак в некоторых вариантах опирания с обращением соответствующих коэффициентов трения в нуль и не окажется ни одного варианта со всеми неотрицательными реакциями, то имеет место самоторможение в кинематической паре призма — кулиса. В этом случае ударное изменение угловой скорости $\dot{\varphi}^n - \dot{\varphi}^0$ найдем из системы импульсных соотношений, полученных интегрированием трех первых уравнений системы (4.8):

$$\begin{aligned} & [J_k + J + m(l+x)^2] (\dot{\varphi}^n - \dot{\varphi}^{(n-1)}) + \\ & + \{ (1+k) f_1 r [(S_1^i)^2 + (S_2^j)^2]^{1/2} \text{sign } \dot{\varphi}^* \}^n = \\ & = -k \{ (1+k) f_1 r [(S_1^i)^2 + (S_2^j)^2]^{1/2} \text{sign } \dot{\varphi}^* \}^{n-1} \\ & \quad \quad \quad (4.9) \\ & - m x^0 + \{ (-1)^i S_1^i - (1+k) f (-1)^j S_2^j \text{sign } \dot{\varphi}^* \}^n = \\ & = -k \{ (-1)^i S_1^i - (1+k) f (-1)^j S_2^j \text{sign } \dot{\varphi}^* \}^{n-1} \\ & [m_k l_1 + m(l+x)] (\dot{\varphi}^n - \dot{\varphi}^{(n-1)}) - \\ & - \{ (1+k) f (-1)^i S_1^i \text{sign } \dot{\varphi}^* + (-1)^j S_2^j \}^n = \\ & = k \{ (1+k) f (-1)^i S_1^i \text{sign } \dot{\varphi}^* + (-1)^j S_2^j \}^{(n-1)} \end{aligned}$$

Здесь коэффициент восстановления импульса k одинаков для всех точек шарнира, так же как и коэффициент трения. При $n=1$ правые части системы (4.9) считаются равными нулю, при $n \geq 2$ импульс $m x^0$ исключается из рассмотрения.

Вследствие нелинейности системы (4.9) решение ее для каждого n осуществляется последовательными приближениями.

Построенные импульсные соотношения пригодны для систем, в которых кинематические пары имеют одну степень свободы. В случае вращения с проскальзыванием законы трения зависят от кинематических характеристик относительного движения звеньев [12]. Поэтому в задачах удара для таких систем придется задаваться формой импульсов и интегрировать уравнения непрерывного движения (1.1), пренебрегая в них неударными силами. При этом, конечно, учитываются варианты опирания звеньев. Многократные отскоки также можно учесть подсчитывая импульсы реакций и вводя коэффициенты восстановления.



Фиг. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. Смирнов Ю. П. Уравнения движения систем с неидеальными удерживающими связями. — Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 2, с. 63–71.
3. Блезман И. И., Джанелидзе Г. Ю. Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. 410 с.
4. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. 471 с.
5. Кобринский А. Е., Кобринский А. А. Виброударные системы. М.: Наука, 1973. 591 с.
6. Бабицкий В. И. Теория виброударных систем. М.: Наука, 1978. 352 с.
7. Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара. М.: Наука, 1977. 223 с.
8. Пэйлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
9. Смирнов Ю. П. О движении плоского физического маятника с трением в шарнире. — В кн.: Проблемы механики управляемого движения. Пермь: Изд-е Перм. ун-та, 1982, с. 161–170.
10. Смирнов Ю. П. Об уравнениях динамики систем с трением: Сб. научн. метод. статей по теор. механ. М.: Высш. школа, 1981, вып. 11, с. 184–188.
11. Гуляев К. И., Доброславский С. В. Исследование устойчивости плоского вращательного движения тела с учетом сухого трения. — Изв. вузов. Приборостроение, 1984, № 3, с. 58–63.
12. Смирнов Ю. П. О некоторых эффектах трения в сферическом шарнире. — Прикл. механика, 1981, т. 17, № 10, с. 67–72.

Тула

Поступила в редакцию
17.X.1983