

УДК 62-501-12

**РАЗВОРОТ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА  
СИСТЕМОЙ ДВИГАТЕЛЕЙ-МАХОВИКОВ  
С НЕНУЛЕВЫМ НАЧАЛЬНЫМ КИНЕТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ**

**АЛЕКСЕЕВ К. Б., ЗЛОДЫРЕВА О. В.**

Изменение углового положения твердого тела в пространстве может быть выполнено, согласно известной теореме Эйлера, одним его разворотом [1]. Вопросы управления таким разворотом, названным экстенсивным (направленным) [2], при помощи газореактивных двигателей и двигателей-маховиков нашли достаточно полное отражение в литературе [3, 4]. Однако применительно к системам ориентации с двигателями-маховиками полученные результаты теоретических исследований справедливы в предположении, что начальное значение кинетического момента системы маховиков равно нулю. В публикуемой работе рассматривается аналитическое решение задачи управления пространственной переориентацией аппарата одним плоским разворотом с помощью системы маховиков при начальном ненулевом кинетическом моменте последних. Получены алгоритмы решения данной задачи, позволяющие определить программу изменения управляющих напряжений на приводных двигателях маховиков из условия максимального быстродействия при учете естественных ограничений.

1. Введем две системы координат с общим началом в центре масс аппарата: базовую (инерциальную)  $Ox_1x_2x_3$  и жестко связанную с аппаратом систему  $Ox_1x_2x_3$ . Взаимное расположение этих систем координат в процессе управления будем определять матрицей направляющих косинусов  $A(t) = \|\alpha_{sj}(t)\|$ , где  $\alpha_{sj} = \mathbf{i}_s \cdot \mathbf{e}_j$ ,  $t \in [0, T]$ , причем  $\mathbf{i}_s$  и  $\mathbf{e}_j$  — орты осей  $x_s$  и  $X_j$  соответственно. Пусть в моменты начала ( $t=0$ ) и окончания ( $t=T$ ) управления  $A_0 = A(0) = \|\alpha_{sj}(0)\|$  и  $A_R = A(T) = \text{diag } 1$ . Тогда задача управления формулируется как совмещение одноименных осей систем  $Ox_1x_2x_3$  и  $OX_1X_2X_3$  одним плоским разворотом за минимально возможное время  $T$ . Динамическая модель аппарата представляет собой механическую систему, состоящую из твердого тела (корпуса) и двигателей-маховиков. Главные оси инерции корпуса являются одновременно осями системы  $Ox_1x_2x_3$  и осями вращения однородных симметричных маховиков. Обозначим  $I_s$  главные моменты инерции аппарата при заторможенных маховиках, так что тензор моментов инерции  $I = \text{diag } I_s$ ,  $I_M$  — осевые моменты инерции, одинаковые для всех трех маховиков,  $\omega_s$  и  $\Omega_s$  ( $s=1, 2, 3$ ) — проекции угловой скорости аппарата и маховиков на оси связанной системы координат соответственно. Тогда для вектора кинетического момента аппарата  $\mathbf{K}$ , равного сумме векторов соответствующих моментов корпуса  $\mathbf{K}_k$  и маховиков  $\mathbf{H}$ , имеем

$$\mathbf{K} = I\omega + I_M^* \Omega, \quad I_M^* = \text{diag } I_M \quad (1.1)$$

$$\omega = \sum_{s=1}^3 \omega_s \mathbf{i}_s, \quad \Omega = \sum_{s=1}^3 \Omega_s \mathbf{i}_s, \quad \Omega_s \leq \Omega_{ms} \Rightarrow \omega_s \leq \omega_{ms}$$

Особенностью рассматриваемой задачи управления является наличие

вектора кинетического момента маховиков в момент начала управления

$$H_0 = I_M \cdot \Omega_0, \quad \Omega_0 = \sum_{s=1}^3 \Omega_{0s} i_s. \quad (1.2)$$

Будем считать, что влияние внешних возмущений на вращательные движения аппарата пренебрежимо мало.

2. Динамические уравнения вращательных движений, дополненные кинематическими уравнениями

$$dK/dt + \omega \times K = 0, \quad dA/dt = S(\omega) \cdot A \quad (2.1)$$

$$S(\omega) = \begin{vmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{vmatrix}$$

образуют полную систему уравнений для описания изменения углового положения аппарата в процессе управления с помощью внутренних моментов. С учетом выражений (1.1) и (1.2) перепишем уравнение (2.1) в виде

$$I \frac{d\omega}{dt} + \omega \times (I\omega + H) = M, \quad M = -I_M \cdot \frac{d\Omega}{dt} = -I_M \sum_{s=1}^3 i_s \frac{d\Omega}{dt}.$$

На основании свойства аддитивности вектора кинетического момента аппарата представим условно, что для управления используются три группы идентичных маховиков, из которых первая группа осуществляет требуемый разворот аппарата вокруг оси Эйлера, а две другие обеспечивают компенсацию гироскопического момента, обусловленного кинетическим моментом  $H_0$  у маховиков третьей группы. Используя свойство аддитивности [1] вектора кинетического момента механической системы «корпус аппарата — двигатели-маховики» и условия полной компенсации влияния гироскопического момента на вращательные движения этой системы, будем рассматривать динамику двух указанных динамических процессов раздельно.

Синтез управления для маховиков первой группы, реализующих оптимальный в смысле быстродействия экстенсивный разворот аппарата в предположении, что начальное значение кинетического момента аппарата равно нулю, рассмотрен в [4], где показано, что взаимное расположение векторов угловой скорости  $\omega = \varphi e_\varphi$  и управляющего момента  $M^I$  в связанной системе координат  $Ox_1x_2x_3$  сохраняется неизменным. В этом случае вращение аппарата со скоростью  $\varphi$  вокруг оси Эйлера, задаваемой ортом  $e_\varphi$ , обеспечивается при управляющих напряжениях, подводимых к якорным цепям двигателей-маховиков, согласно равенствам

$$U_s = U_{ms}, \quad U_{s+h} = U_{ms} \beta_{s+h} / \beta_s^* \quad (s=1, 2 \text{ или } 3, k=1, 2; s+3=s) \quad (2.2)$$

в которых  $\beta_s^*$  — максимальный по величине направляющий косинус вектора управляющего момента  $M^I$ . При использовании в качестве привода маховика двигателя постоянного тока с независимым возбуждением связь напряжения в цепи якоря  $U_s$  и кинетического момента маховика  $H_s^I$  ( $s=1, 2, 3$ ) в динамике описывается уравнением

$$U_s(t) = (1/\mu I_M) [T_g H_s^I(t) + H_s(t)] \quad (2.3)$$

Здесь  $T_g$  — постоянная времени,  $M$  — передаточный коэффициент

$$H_s^I(t) = -\mu I_M U_{ms} [1 - \exp(-t/T_g)] \quad (2.4)$$

$$H_{s+h}^I(t) = -\mu I_M U_{ms} (\beta_{s+h} / \beta_s^*) [1 - \exp(-t/T_g)]$$

при  $0 \leq t < t_1$ , т. е. на участке разгона аппарата

$$H_s^I(t) = -\mu I_M U_{ms} (1 - \exp \tau) \quad (2.5)$$

$$H_{s+k}^I(t) = -\mu I_M U_{ms} (\beta_{s+k} / \beta_s^*) (1 - \exp \tau)$$

$$\tau = -[(T - t_1) - (t - t_1)] / T_g$$

при  $t_1 \leq t \leq T$ , т. е. на участке торможения аппарата ( $s=1, 2, 3$ ;  $s+3=s$ ;  $k=1, 2$ ),  $t_1$  — момент переключения управляющего момента  $M^I$ , при котором он изменяет свое начальное направление на противоположное. На участке вращения аппарата с постоянной максимальной допустимой угловой скоростью, достигнутой в конце участка разгона  $\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_m = \text{const}$  и  $H_s^I(t) = \text{const}$ , напряжения  $U_s^I(t)$  можно считать равными нулю ( $s=1, 2, 3$ ).

Рассмотрим управление маховиками второй и третьей групп. Маховики третьей группы имеют начальный кинетический момент  $H_0$ , определяемый выражениями (1.2), где  $\Omega_{0s} = \text{const}$  ( $s=1, 2, 3$ ). Пренебрегая трением в опорах маховиков, примем начальное напряжение  $U_s^{III}$  при  $t=0$  на приводах третьей группы маховиков равным нулю. В момент начала разворота аппарата появляется вектор гироскопического момента

$$M_g^{II}(t) = \omega(t) \times H_0$$

Для компенсации этого момента к аппарату прикладывается момент со стороны маховиков второй группы, равный

$$M^{II}(t) = -dH^{II}(t)/dt = \omega(t) \times H_0 \quad (2.6)$$

С увеличением вектора кинетического момента  $H^{II}(t)$  увеличивается гироскопический момент  $M_g^{III}(t) = \omega(t) \times H^{II}(t)$ , компенсация которого выполняется маховиками третьей группы в соответствии с уравнением

$$M^{III}(t) = -dH^{III}(t)/dt = \omega(t) \times H^{II}(t) \quad (2.7)$$

Образование кинетического момента  $H^{III}(t)$  связано с изменением начального кинетического момента  $H_0$  и, следовательно, нарушает справедливость уравнения (2.6). Из сказанного следует, что для текущего времени  $t \in [0, T]$  процесс компенсации гироскопического момента можно описать двумя уравнениями

$$M^{II}(t) = -dH^{II}(t)/dt = \omega(t) \times H_0 - \omega(t) \times H^{III}(t) \quad (2.8)$$

$$M^{III}(t) = -dH^{III}(t)/dt = \omega(t) \times H^{II}(t)$$

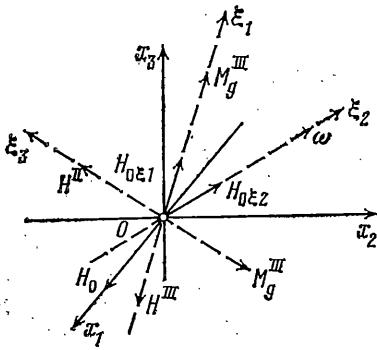
позволяющими определить ускорения и скорости маховиков второй и третьей групп, обеспечивающих разворот аппарата при наличии  $H_0$ .

Введем новую прямоугольную систему координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  (фиг. 1) таким образом, что две ее оси лежат в плоскости, построенной на векторах  $\omega$  и  $H_0$ , причем вторая ось совмещена с направлением вектора угловой скорости аппарата  $\omega$ , а третья — направлена перпендикулярно к этой плоскости по направлению векторного произведения  $\omega \times H_0$ . Система координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  связана с системой координат  $Ox_1x_2x_3$  преобразованием базисов

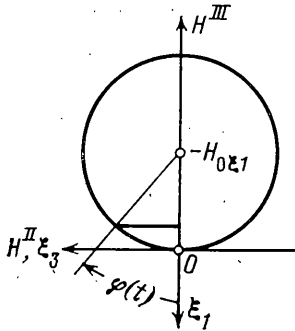
$$B_\xi = BR, \quad B = \|\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\|, \quad B_\xi = \|\mathbf{e}_{\xi_1}, \mathbf{e}_{\xi_2}, \mathbf{e}_{\xi_3}\| \quad (2.9)$$

$$R = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \nu_1 & \mu_1 \\ \gamma_2 & \nu_2 & \mu_2 \\ \gamma_3 & \nu_3 & \mu_3 \end{vmatrix}$$

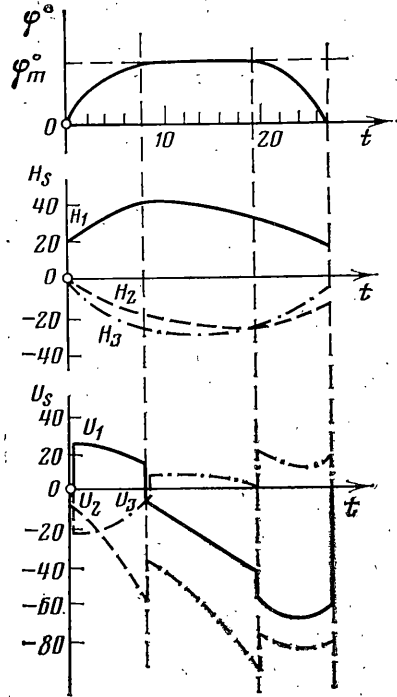
где  $\gamma_s, \nu_s, \mu_s$  ( $s=1, 2, 3$ ) — направляющие косинусы нового базиса в жестко связанной с аппаратом системе координат,  $\mathbf{e}_{\xi_s}$  — орты нового базиса.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

В матрице  $R$  — матрице перехода к новому базису — известны только три компоненты:  $v_s$  ( $s=1, 2, 3$ ) — направляющие косинусы вектора  $\omega$  или оси новой системы координат  $O\xi_2$  и неизвестны компоненты  $\mu_s$  и  $\gamma_s$ , которые определяются из системы шести уравнений

$$(\mathbf{e}_{\xi_1} \times \mathbf{e}_{\xi_2}) \cdot \mathbf{e}_{H_0} = 0 \quad (2.10)$$

$$\mathbf{e}_{\xi_1} \cdot \mathbf{e}_{\xi_2} = 0, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

$$\mu_{s+3} = \gamma_{s+1} v_{s+2} - \gamma_{s+2} v_{s+1} \quad (s=1, 2, 3; s+3=s)$$

где первое уравнение определяет плоскость, построенную на векторах  $\omega$  и  $H_0$ . После преобразований из системы (2.10) находим

$$\gamma_3 = \left[ 1 + C^2 + \left( \frac{C v_2 + v_3}{v_1} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$C = \frac{\alpha_3 v_2 v_3 - \alpha_2 v_3^2 + \alpha_1 v_2 v_3 - v_1^2 \alpha_2}{\alpha_3 v_2^2 - \alpha_2 v_3 v_2 + \alpha_3 v_1^2 - \alpha_1 v_1}$$

$$\gamma_2 = C \gamma_3, \quad \gamma_1 = (-\gamma_2 v_2 - \gamma_3 v_3) / v_1$$

$$\mu_{s+3} = \gamma_{s+1} v_{s+2} - \gamma_{s+2} v_{s+1} \quad (s=1, 2, 3; s+3=s)$$

Решение системы уравнений (2.10) позволяет полностью определить постоянную матрицу перехода  $R$ . В системе координат  $O\xi_1 \xi_2 \xi_3$  уравнения (2.8) запишутся

$$\begin{aligned} -dH_{\xi_3}^{II}(t)/dt &= \omega(t) [H_{0\xi_1} - H_{\xi_1}^{III}(t)] \\ -dH_{\xi_1}^{III}(t)/dt &= \omega(t) H_{\xi_3}^{II}(t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений с разделяющи-

мися переменными имеет вид

$$H_{\xi_3}^{\text{II}}(t) = H_{0\xi_3} \sin \varphi(t), \quad H_{\xi_1}^{\text{III}}(t) = -H_{0\xi_1} + H_{0\xi_1} \cos \varphi(t) \quad (2.12)$$

и определяет в параметрическом виде окружность радиуса  $H_{0\xi_1}$  с центром в точке  $(-H_{0\xi_1}, 0)$  на фазовой плоскости  $H^{\text{III}}, H^{\text{II}}$  (фиг. 2). Из выражений (2.12) очевидно, что скорости изменения кинетических моментов маховиков второй и третьей групп во время разворота аппарата на угол  $\varphi(t)$ ,  $t \in [0, T]$  будут

$$\begin{aligned} dH_{\xi_3}^{\text{II}}(t)/dt &= \dot{\varphi}(t) H_{0\xi_1} \cos \varphi(t) \\ dH_{\xi_1}^{\text{III}}(t)/dt &= -\dot{\varphi}(t) H_{0\xi_1} \sin \varphi(t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Делая обратный переход по отношению к (2.9)  $B = B_{\xi} R^{-1}$ , находим решение поставленной задачи в связанной системе координат

$$H_x^{\text{II}}(t) = H_{\xi}^{\text{II}}(t) R^{-1}, \quad H_x^{\text{III}}(t) = H_{\xi}^{\text{III}}(t) R^{-1} \quad (2.14)$$

$$H_x^j(t) = \|H_1^j(t), H_2^j(t), H_3^j(t)\|, \quad H_{\xi}^j(t) = \|H_{\xi_1}^j(t), H_{\xi_2}^j(t), H_{\xi_3}^j(t)\|$$

— кинетические моменты  $j$ -й ( $j = \text{II}, \text{III}$ ) группы маховиков в системах координат  $Ox_1x_2x_3$  и  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  соответственно. В силу свойства аддитивности кинетического момента [1] заменим рассмотренные три маховика на каждой из связанных осей  $x_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ) одним, причем кинетический момент этого маховика и скорость его изменения будут равны соответственно сумме кинетических моментов и сумме скоростей изменения последних для трех маховиков, относящихся к первой, второй и третьей группам, находившимся на соответствующей связанной оси  $H_s(t) = H_s^{\text{I}}(t) + H_s^{\text{II}}(t) + H_s^{\text{III}}(t)$ ,  $H_s^*(t) = H_s^{*\text{I}}(t) + H_s^{*\text{II}}(t) + H_s^{*\text{III}}(t)$ . Требуемые напряжения на «результатирующие» маховики по связанным осям будут определяться выражениями (2.3).

*Пример.* Рассмотрим поворот аппарата на угол  $\varphi_0 = 100^\circ$  при помощи двигателей-маховиков с ненулевым начальным кинетическим моментом, начальное направ-

ление которого в связанной системе координат задано ортом  $e_{H_0} = \sum_{s=1}^3 \alpha_s i_s$ . Направ-

ление оси Эйлера зададим ортом  $e_{\varphi} = e_{\xi_2} = \sum_{s=1}^3 \nu_s i_s$ , а направления двух других осей

новой системы координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  определим как  $e_{\xi_1} = \sum \gamma_s i_s$  и  $e_{\xi_3} = \sum \mu_s i_s$ , ( $s = 1, 2, 3$ ). Для  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$  и  $\nu_1 = -0,8, \nu_2 = 0,33, \nu_3 = 0,47, H_0 = \|20, 0, 0\|^T$  Н·м·с определенные в соответствии с предложенным алгоритмом направляющие косинусы принимают значения  $\beta_1 = -0,64, \beta_2 = 0,37, \beta_3 = 0,68, \gamma_1 = 0,58, \gamma_2 = 0,47, \gamma_3 = 0,66, \mu_1 = 0, \mu_2 = -0,8, \mu_3 = 0,57$ , а матрица перехода к новому базису примет вид

$$R = \begin{vmatrix} 0,58 & -0,8 & 0 \\ 0,47 & 0,33 & -0,8 \\ 0,66 & 0,47 & 0,57 \end{vmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{vmatrix} 0,59 & 0,53 & 0,63 \\ -0,83 & 0,27 & 0,54 \\ 0 & -0,83 & 0,59 \end{vmatrix}$$

$$H_{0\xi_1} = 11,6, \quad H_{0\xi_2} = -16, \quad H_{0\xi_3} = 0$$

Графические зависимости изменения во времени скорости разворота аппарата  $\dot{\varphi}(t)$ , значений результирующих кинетических моментов маховиков  $H_s(t)$  по связанным осям и управляющих напряжений  $U_s(t)$  приведены на фиг. 3 для конкретных значений параметров:

$$\varphi_m^* = 0,08 \text{ с}^{-1}, \quad I_M = 0,15 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad U_{ms}^* = 24 \text{ в}, \quad T_g = 3,33 \text{ с}, \quad I_1 = 50 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_2 = 70 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_3 = 90 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. Петров В. Н., Боднер В. А., Алексеев К. Б. Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром. — Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 6, с. 1235—1238.
3. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов В. Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
4. Алексеев К. Б. Экстенсивное управление ориентацией космических летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1977. 121 с.

Москва

Поступила в редакцию  
27.I.1984