МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1985

УДК 532.5

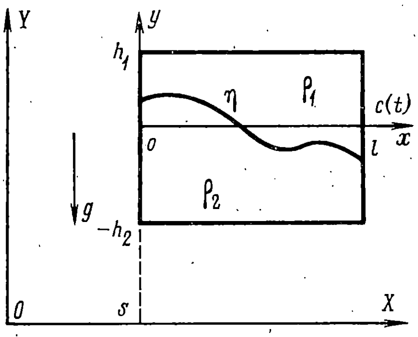
УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ НЕОДНОРОДНОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ В ПОДВИЖНОМ СОСУДЕ

АКУЛЕНКО Л. Д., НЕСТЕРОВ С. В.

В линейной постановке исследуется задача о колебаниях двухслойной тяжелой жидкости, целиком заполняющей прямоугольный сосуд. Считается, что дно сосуда лежит в горизонтальной плоскости, причем сосуд может перемещаться вдоль горизонтальной направляющей с произвольной скоростью. Методом разделения переменных построено решение задачи Коши – Пуассона и исследованы его свойства. Поставлена и приближенно решена задача об управлении движением сосуда с финальным условием гашения внутренних волн жидкости.

Задача о колебаниях тяжелой однородной жидкости, имеющей свободную поверхность, в подвижном сосуде впервые была решена Л. Н. Сретенским [1], см. также [2]. Затем последовало подробное изучение этой задачи (см., например, монографию [3]), однако до настоящего времени не опубликовано решение аналогичной задачи о колебаниях неоднородной тяжелой жидкости в подвижном сосуде. Ниже рассматривается плоская задача о линейных колебаниях (внутренних волнах) двухслойной тяжелой жидкости, целиком заполняющей прямоугольный сосуд, который может перемещаться с произвольной заданной скоростью вдоль горизонтальной оси.

1. Пусть двухслойная жидкость целиком заполняет абсолютно твердый прямоугольный сосуд, совершающий горизонтальное перемещение вдоль оси OX со скоростью $c(t)$ в вертикальной плоскости OXY, ускорение сил тяготения равно g и направлено вниз (см. фигуру). Считается, что жидкости в обоих слоях идеальны и несжимаемы, их плотности равны ρ_1 и ρ_2 соответственно, причем $\rho_2>\rho_1>0$, т. е. более плотная жидкость находится «внизу» сосуда. Задано состояние системы в начальный момент времени $t=0$; требуется найти границу раздела жидкостей, поле скоростей и другие кинематические и динамические характеристики движения жидкости при $t>0$.



Для описания относительного движения жидкостей вводится жестко связанная с левой стенкой сосуда система координат oxy, ось ox которой направлена вдоль невозмущенной границы раздела по направлению перемещения. Уравнения положения твердых стенок сосуда в подвижной системе координат oxy имеют вид $x=0$, $x=l$; $y=h_1$, $y=-h_2$, т. е. плоская область G, занимаемая жидкостью, определяется совокупностью неравенств

$$G=\{x, y:\ 0\leqslant x\leqslant l,\ -h_2\leqslant y\leqslant h_1\},\qquad l,\ h_{1,2}>0 \tag{1.1}$$

Условия движения таковы, что можно ограничиться постановкой задачи о колебательных движениях жидкости в плоской области G.

Для описания движения жидкости вводятся потенциалы $\Phi_{1,2}(x, y, t)$ относительных скоростей в каждой подобласти $G_{1,2}$, которые разделяются линией границы $y=\eta(x, t)$. Поскольку обе жидкости несжимаемые, то потенциалы скоростей удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi_{1,2}=0 \qquad (\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2) \tag{1.2}$$

На твердых стенках области G (1.1) выполняются условия непроницаемости

$$\partial\Phi_{1,2}/\partial x|_{x=0,\,l}=0, \qquad \partial\Phi_{1,2}/\partial y|_{y=h_1,\,-h_2}=0 \tag{1.3}$$

Задача о движении стратифицированной жидкости в подвижном сосуде рассматривается в линейном приближении (так называемых бесконечно малых волн [1, 2]), поэтому условия на неизвестной границе η раздела жидкостей задаются при $y=0$:

динамическое условие (равенство давлений на границе раздела двух жидкостей):

$$\left(\rho_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}-\rho_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right)_{y=0}-g(\rho_2-\rho_1)\eta=(\rho_2-\rho_1)\dot{c}x \tag{1.4}$$

кинематическое условие (равенство скоростей частиц жидкости на границе раздела):

$$\partial\eta/\partial t=-\partial\Phi_1/\partial y|_{y=0}=-\partial\Phi_2/\partial y|_{y=0} \tag{1.5}$$

Начальные условия, определяющие движение жидкости при известной достаточно гладкой функции $c(t)$, обычно задаются в виде начального отклонения границы раздела и начальных импульсивных давлений ($x\in[0, l]$):

$$\eta(x,0)=\eta_0(x) \quad \left(\int_0^l\eta_0(x)\,dx=0\right), \quad \rho_{1,2}\Phi_{1,2}(x,0,0)=I_{1,2}(x) \tag{1.6}$$

Чтобы не загромождать решение задачи, рассматривается случай нулевых условий

$$\eta(x,\ 0)=0, \quad \Phi_{1,2}(x,\ y,\ 0)=0 \quad (x\in[0,\ l]) \tag{1.7}$$

Определим возвышение границы раздела жидкостей из (1.4):

$$\eta=\frac{1}{g(\rho_2-\rho_1)}\left(\rho_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}-\rho_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right)_{y=0}-\frac{\dot{c}}{g}x \tag{1.8}$$

Исключение из краевых условий (1.5), (1.8) неизвестной η в предположении двукратной дифференцируемости функций $\Phi_{1,2}$, c по t приводит к следующим эквивалентным (1.4), (1.5) краевым условиям ($x\in[0, l]$):

$$\left[\rho_2\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2}-\rho_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}+g(\rho_2-\rho_1)\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right]_{y=0}=(\rho_2-\rho_1)\ddot{c}x \tag{1.9}$$

$$\partial\Phi_1/\partial y|_{y=0}=\partial\Phi_2/\partial y|_{y=0}={}^1/_2(\partial\Phi_1/\partial y+\partial\Phi_2/\partial y)_{y=0} \tag{1.10}$$

Ставится задача: при заданной достаточно гладкой функции $c(t)$, $t\in[0, T]$, $T<\infty$ построить в области G (1.1) гармонические по x, y, зависящие от времени t как от параметра функции $\Phi_{1,2}=\Phi_{1,2}(x, y, t)$ — решения уравнения Лапласа (1.2) с краевыми условиями (1.3) — (1.5) или (1.3), (1.9), (1.10) и начальными условиями (1.7). Класс решений и свойства гладкости функции $c(t)$ обсуждаются дальше. Если потенциалы $\Phi_{1,2}$ найдены, то искомое возвышение границы $\eta(x, t)$ определяется согласно (1.8). В гидродинамике поставленную задачу принято называть задачей Коши — Пуассона.

1. Для построения решения задачи Коши — Пуассона используется метод разделения переменных (метод Фурье), согласно которому

$$\Phi_i(x,y,t)=\Theta_0^{(i)}(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n^{(i)}(t)\cos\frac{\pi n}{l}x\,\mathrm{ch}\frac{\pi n}{l}(h_{(i)}-y)$$

$$(i=1,2) \qquad h_{(1)}=h_1, \quad h_{(2)}=-h_2 \tag{1.11}$$

Из (1.10) для $\Theta_n^{(i)}$ следуют равенства $\forall t\in[0,T]$:

$$\Theta_n^{(1)}(t)\,\mathrm{sh}\,nr_1=\Theta_n^{(2)}(t)\,\mathrm{sh}\,nr_2, \qquad r_i=\pi h_i l^{-1} \quad (n=1,2,\ldots) \tag{1.12}$$

Подстановка рядов (1.11) в (1.9) приводит с учетом (1.12) к тождеству $\forall x\in[0,l]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{ch}\,nr_2/\mathrm{th}\,nr_1)(\rho_2\,\mathrm{th}\,nr_1+\rho_1\,\mathrm{th}\,nr_2)(\Theta_n^{(2)\cdot\cdot}+\omega_n^2\Theta_n^{(2)})\cos\pi nl^{-1}x+$$
$$+\rho_2\Theta_0^{(2)\cdot\cdot}-\rho_1\Theta_0^{(1)\cdot\cdot}=(\rho_2-\rho_1)c^{\cdot\cdot}x \tag{1.13}$$

Здесь величины ω_n — частоты собственных колебаний, определяемые соотношениями $(n=1,2,\ldots)$:

$$\omega_n^2=g(\rho_2-\rho_1)\pi nl^{-1}\,\mathrm{th}\,nr_1\,\mathrm{th}\,nr_2(\rho_2\,\mathrm{th}\,nr_1+\rho_1\,\mathrm{th}\,nr_2) \tag{1.14}$$

Из тождества по x (1.13) следует, что неизвестные коэффициенты $\Theta_n^{(2)}(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered}\rho_2\Theta_0^{(2)\cdot\cdot}-\rho_1\Theta_0^{(1)\cdot\cdot}={}^1/_2(\rho_2-\rho_1)lc^{\cdot\cdot}, \qquad t\in[0,T]\\ \Theta_n^{(2)\cdot\cdot}+\omega_n^2\Theta_n^{(2)}=-4\pi^{-2}(\rho_2-\rho_1)lc^{\cdot\cdot}\alpha_n n^{-2}\,\mathrm{th}\,nr_1/\mathrm{ch}\,nr_2\times\\ \times(\rho_2\,\mathrm{th}\,nr_1+\rho_1\,\mathrm{th}\,nr_2), \qquad \alpha_n={}^1/_2[1-(-1)^n]\\ \Theta_n^{(2)}(0)=\Theta_n^{(2)\cdot}(0)=0 \quad (n=1,2,\ldots)\end{gathered} \tag{1.15}$$

Из соотношения для $\Theta_0^{(1)},\Theta_0^{(2)}$ (1.15) с учетом (1.7), (1.8) получается выражение

$$\rho_2\Theta_0^{(2)\cdot}-\rho_1\Theta_0^{(1)\cdot}={}^1/_2(\rho_2-\rho_1)lc^{\cdot} \tag{1.16}$$

Кроме того, из уравнений и начальных условий для $\Theta_n^{(i)}$ (1.15) следует, что

$$\Theta_{2k+2}^{(i)}(t)\equiv 0, \qquad t\in[0,\infty) \qquad (i=1,2;\ k=0,1,\ldots) \tag{1.17}$$

Поэтому ряды в (1.11) содержат члены только с нечетными индексами $n=2k+1$, $k=0,1,\ldots$. Для нечетных гармоник получаются выражения в виде квадратур

$$\Theta_n^{(2)}(t)=\frac{4l}{\pi^2}(\rho_2-\rho_1)\frac{\mathrm{th}\,nr_1/\mathrm{ch}\,nr_2}{\rho_2\,\mathrm{th}\,nr_1+\rho_1\,\mathrm{th}\,nr_2}\,\frac{\alpha_n}{n^2\omega_n}\int_0^t c^{\cdot\cdot}(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau+$$
$$+\beta_n^{(2)}\sin\omega_n t \quad (n=1,3,\ldots), \quad \beta_n^{(2)}=4l^2c^{\cdot}(0)\,\omega_n/\pi^2gn^3\,\mathrm{sh}\,nr_2 \tag{1.18}$$

Постоянные коэффициенты $\beta_n^{(2)}$ получаются из начального условия для возвышения (1.7). Соответствующие коэффициенты Фурье $\Theta_n^{(1)}(t)$ находятся согласно (1.12). Подстановка рядов (1.11) в (1.8) с учетом (1.16)—(1.18), (1.12) дает искомое выражение для возвышения $\eta(x,t)$ также в виде ряда по нечетным гармоникам

$$\begin{gathered}\eta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n(t)\cos\frac{\pi n}{l}x, \qquad x\in[0,l]\\ \theta_n(t)=-\frac{4l}{\pi^2 g}\,\frac{\alpha_n\omega_n}{n^2}\int_0^t c^{\cdot}(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau, \qquad t\in[0,T]\end{gathered} \tag{1.19}$$

2. Коэффициенты Фурье $\Theta_n^{(i)}(t)$ (см. (1.18), (1.12)) построены в предположении двукратной дифференцируемости функции $c(t)$, $t\in[0, T]$. Интегрирование по частям в формуле (1.18) позволяет представить выражения для $\Theta_n^{(i)}(t)$ в более удобном виде (в котором под знаком интеграла стоит функция $\ddot{c}(t)=w(t)$ — ускорение сосуда), рассмотренном далее. В линейной теории волн предполагается [1], что $|\ddot{c}|\ll g$, $\forall t\in[0, T]$.

Анализ рядов (1.11), (1.18) и (1.19) показывает, что для широкого класса функций $w(t)$ имеет место абсолютная и равномерная сходимость $\forall t\in[0, T]$, $T<\infty$ и $(x, y)\in G$. При этом функция w может выражаться суммой кусочно-непрерывной функции и конечного числа обобщенных функций, например δ-функцией Дирака достаточно малой интенсивности.

Равномерная сходимость рядов для скоростей $\mathbf{v}_i(x, y, t)=-\nabla\Phi_i$ и ускорений $\mathbf{w}_i(x, y, t)=\dot{\mathbf{v}}_i$ тогда не гарантируется. Чтобы функции $\mathbf{v}_i$ были непрерывными, достаточно потребовать кусочную гладкость функции $w(t)$ с конечным числом точек разрывов первого рода. Такое допущение обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость рядов Фурье для $\nabla\Phi_i$ вследствие сходимости числовых мажорирующих рядов с коэффициентами порядка $1/n\omega_n\sim 1/n^{3/2}$. Если ускорение сосуда $w(t)$ — непрерывная функция, то ряды для $\mathbf{v}_i$, $\dot{\eta}$ сходятся по среднеквадратичной или энергетической нормам.

Ускорения $\mathbf{w}_i(x, y, t)$ будут классическими непрерывными функциями, если $\dot{w}(t)$ — кусочно-гладкая функция $\forall t\in[0, T]$, $T<\infty$. Соответствующие этому случаю построения решения и исследования сходимости рядов для Φ_i, $\nabla\Phi_i$, $\nabla\dot{\Phi}_i$ были проведены в работе [4], где рассматривалась аналогичная плоская задача о горизонтальном движении прямоугольного сосуда, содержащего однородную тяжелую жидкость со свободной поверхностью.

Построенное выше решение задачи Коши — Пуассона в виде рядов Фурье (1.11) — (1.18) и (1.19) используется далее для исследования задачи управления движением сосуда с учетом волновых движений (внутренних волн) двухслойной жидкости.

2. Рассматривается задача управления движением сосуда. Исследуется случай более общих управляющих воздействий, имеющих динамический смысл (в отличие от [4], где управлением считается $\ddot{c}$). Ускорение сосуда $w(t)$, рассматриваемое как управление, может быть кусочно-гладкой, например релейной функцией времени. Для прикладных целей представляет определенный интерес исследование задачи управления движением сосуда с гашением внутренних волн двухслойной жидкости в конце процесса. Изучаемая механическая система может служить моделью для описания динамики и управления таких технических объектов, как танкеры и др.

1. Выражения (1.11) — (1.18) для потенциалов Φ_i и (1.19) для возвышения η переписываются в более удобном виде:

$$\Phi_i(x,y,t)=\Theta_0^{(i)}(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{(i)}(x,y)\Theta_k(t)\equiv\Theta_0^{(i)}(t)+\Phi^{(i)}(x,y,t)$$

$$\Theta_k(t)=\frac{1}{(2k+1)^2}\int_0^t w(\tau)\cos\omega_{2k+1}(t-\tau)\,d\tau,\qquad |\alpha_k^{(i)}|\leqslant\varphi<\infty \tag{2.1}$$

$$\alpha_k^{(i)}=\frac{4l}{\pi^2}\,\frac{(\rho_2-\rho_1)\operatorname{th}(2k+1)r_{(i)}\cos(2k+1)\pi l^{-1}x}{\rho_2\operatorname{th}(2k+1)r_1+\rho_1\operatorname{th}(2k+1)r_2}\,\frac{\operatorname{ch}(2k+1)(r_{(i)}-\pi l^{-1}y)}{\operatorname{ch}(2k+1)r_{(i)}}$$

$$\eta(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(x)\theta_k(t),\qquad \theta_k(t)=\frac{\omega_{2k+1}}{(2k+1)^2}\int_0^t w(\tau)\sin\omega_{2k+1}(t-\tau)\,d\tau$$

$$\beta_k(x)=-(4l/\pi^2 g)\cos(2k+1)\pi l^{-1}x,\qquad |\beta_k|\leqslant\psi<\infty \tag{2.2}$$

Таким образом, коэффициенты рядов $\alpha_k^{(i)}$, β_k в (2.1), (2.2) равномерно по k для всех $(x, y)\in G$ ограничены величинами, определяемыми параметрами системы l, g, ρ_i, r_i.

Для управляемой согласно (2.1), (2.2) бесконечномерной системы ставится следующая задача управления. Выбором некоторой управляющей функции $w(t)$, $t\in[0, T]$ из допустимого класса (см. п.1) привести при $t=T$ сосуд с жидкостью в состояние заданного движения с гашением внутренних волн

$$c(T)=c^0+\int_0^T w(\tau)\,d\tau=c^*,\qquad s(T)=s^0+c^0T+\int_0^T (T-\tau)w(\tau)\,d\tau=s^*$$

$$\Theta_k(T)=\theta_k(T)=0\qquad (k=0,1,2,\ldots) \tag{2.3}$$

Здесь $c(t)$ и $s(t)$ — скорость и координата сосуда (см. фигуру). Согласно (2.3), их начальные c°, s° и конечные c^*, s^* значения произвольны. Начальные условия для Θ_k, θ_k в соответствии с п.1 и выражениями (2.1), (2.2) — нулевые. Если рассматриваемую систему привести в состояние (2.3), а затем положить $w(t)\equiv 0$ $\forall t>T$, то из заданной точки $s(T)=s^*$ система будет совершать движение, как целое, со скоростью c^*.

Представляют также прикладной интерес постановки задачи управления, когда некоторые из условий (2.3) не задаются, например первое или (и) второе. Для упрощения решения бесконечномерной проблемы управления (2.1)—(2.3) можно потребовать, чтобы лишь низшие моды колебаний были погашены, т. е. $\Theta_k(T)=\theta_k(T)=0$, $k=0,1,\ldots,K$. Тогда решение задачи управления для усеченной системы порядка $2(K+1)$ обеспечит приведение к моменту $t=T$ сосуд в точку $X=s^*$ со скоростью $\dot X=c^*$ и с гашением первых $2(K+1)$ мод колебаний жидкости. При $w\equiv 0$ $\forall t>0$ сосуд можно передвигать со скоростью c^*, а жидкость будет совершать колебания высших мод. Наличие диссипации приводит к их разрушению и быстрому затуханию.

Математические проблемы существования и конструктивного построения допустимого управления $w(t)$, $0\leqslant t\leqslant T<\infty$ остаются нерешенными. Имеется ряд результатов, например [5—7], касающихся вопросов управляемости колебательных систем с распределенными параметрами в зависимости от свойств спектра системы $\{\omega_n\}$, т. е. показателя степенного роста ω_n по n: $\omega_n\sim n^\gamma$, $n\to\infty$ $(\gamma>0)$. Устанавливается, что система управляема на сколь угодно коротком интервале времени T при $\gamma>1$; если $\gamma<1$, то система неуправляема для конечного T; в случае $\gamma=1$ имеет место критическая ситуация [5, 8, 9]: система управляема при $T>T_*$, где T_* — величина, характеризуемая свойствами среды.

В рассматриваемой задаче $\gamma={}^1/_2$, т. е. согласно (1.14) $\omega_n\sim\sqrt{n}$ при $n\to\infty$. Таким образом, для произвольных начальных условий вида (1.6) добиться точного выполнения финальных условий типа (2.3) при $T<\infty$ нельзя. Физически это обстоятельство можно объяснить тем, что для двухслойной жидкости имеет место положительная дисперсия прогрессивных внутренних волн (как и для поверхностных волн однородной тяжелой жидкости со свободной поверхностью [2, 4]): их скорость убывает пропорционально величине порядка $1/\sqrt{n}$. Дисперсия приводит к сближению частот парциальных колебаний $\omega_{n+1}-\omega_n\sim 1/\sqrt{n}$, т. е. к резонансным соотношениям (2.1), (2.2), причем ширина резонансной зоны растет как величина $\sqrt{n}$. Это существенно затрудняет конструктивное построение приближенного решения задачи управления с нужной точностью.

Ниже аналогично [4] исследуются два предельных случая задачи управления (2.1)—(2.3), позволяющих построить приближенное решение и оценить погрешность, т. е. асимптотически малые остаточные внутренние волны. Первый случай «широкого сосуда» отвечает сильному неравенству $r \ll 1$, т. е. r — малый числовой параметр; допустимое релейное управление $w(t)$ обеспечивает малость $\Phi^{(i)}$, η при $\forall t \geqslant T$. Второй случай квазистационарного процесса управления обусловлен тем, что при $T \gg 2\pi/\omega_1$, где ω_1 — частота колебаний первой моды (1.14), величина $w(t)$ и амплитуда колебаний жидкости $\forall (x, y) \in G$ будут асимптотически малыми.

2. Рассмотрим случай «широкого сосуда». Предполагаются выполненными следующие сильные неравенства:

$$r \ll 1, \quad Nr \ll 1 \quad (N = [r^{-\lambda}], \quad 0 < \lambda < 1, \quad N \gg 1) \tag{2.4}$$

Тогда заведомо $r_i \ll 1$, $Nr_i \ll 1$ и для частот ω_n (1.14) справедливы представления ($n = 1, \ldots, N$):

$$\omega_n = \nu n \sqrt{r}(1 + dn^2r^2), \qquad \nu^2 = \pi g l^{-1}(\rho_2 - \rho_1) r_1 r_2 r^{-1} (\rho_2 r_1 + \rho_1 r_2)^{-1} \tag{2.5}$$

Здесь постоянная $d \sim 1$ выбирается из условия

$$\left| \left(\frac{\operatorname{th} nr_1 \operatorname{th} nr_2}{n^2 r_1 r_2} \, \frac{(\rho_2 r_1 + \rho_1 r_2) n}{\rho_2 \operatorname{th} nr_1 + \rho_1 \operatorname{th} nr_2} \right)^{1/2} - 1 \right| \leqslant |d| n^2 r^2 \tag{2.6}$$

Таким образом, из (2.5), (2.6) следует, что $\omega_n \sim n\nu\sqrt{r}$, $n = 1, 3, \ldots, N$, $N \gg 1$, т. е. колебания низших мод в совокупности близки к периодическим. Как и в [4], это свойство используется для построения допустимых управлений $w(t)$, обеспечивающих выполнение условий типа (2.3) с асимптотически малой по r погрешностью.

Пусть пока рассматривается задача управления скоростью перемещения, т. е. вместо (2.3) рассматриваются условия: $c(T) = c^*$, $\Theta_k(T) = \theta_k(T) = 0$, а значение $s(T)$ не фиксируется. Управляющая функция $w = w_c(t, T)$ выбирается из класса релейных в виде

$$w_c(t, T) = w_c^\circ [\chi(t) - \chi(t - T)], \qquad t \in [0, \infty) \tag{2.7}$$

Здесь $\chi(t)$ — единичная функция (Хевисайда), т. е. $\chi = 0$ $\forall t < 0$ и $\chi = 1$ $\forall t \geqslant 0$. Таким образом, управление $w_c = 0$ $\forall t > T$. Интервал времени T процесса управления полагается равным $T_c = m_c T_0$, где m_c — «небольшое» натуральное число, а $T_0 = 2\pi/\nu\sqrt{r}$ — приближенное значение периода колебаний первой моды (см. асимптотику (2.5) для ω_n). Тогда условия для переменной c будут строго выполнены, если параметр w_c° в (2.7) положить равным $w_c^\circ = (c^* - c^\circ) T_c^{-1}$. Условия на Θ_k, θ_k, $k = 0, 1, \ldots, K$ будут выполнены приближенно со сколь угодно малой погрешностью при достаточно малом r. Более того, асимптотически малыми по r для $t \geqslant T$ будут переменные $\Phi^{(i)}(x, y, t)$, $\eta(x, t)$. Действительно, если положить параметр λ в (2.4) таким, чтобы выполнялось сильное неравенство $N^3 \ll r^{-2}$ (это имеет место при $0 < \lambda < 2/3$), то оценка величин $\Theta_k(T)$, $\theta_k(T)$, $k = 0, 1, \ldots, K$ при подстановке в (2.1)—(2.3) управления w_c (2.7) дает ($n = 2k + 1$):

$$|\Theta_k(T)| = (|w_c^\circ|/\omega_n n^2) |\sin(2\pi m_c d n^3 r^2)| \leqslant 2\pi m_c d |w_c^\circ| n r^2/\omega_n \tag{2.8}$$

$$|\theta_k(T)| = (|w_c^\circ|/n^2) |1 - \cos(2\pi m_c d n^3 r^2)| \leqslant 2\pi^2 m_c^2 d^2 |w_c^\circ| n^4 r^4$$

Суммирование оценок по k от 0 до K дает для $\Phi^{(i)}(x, y, T_c)$, $\eta(x, T_c)$ соответственно

$$\left| \sum_{k=0}^{K} \alpha_k^{(i)} \Theta_k(T_c) \right| \leqslant \varphi \sum_{k=0}^{K} |\Theta_k(T_c)| \leqslant A\varphi |w_c^0| \nu^{-1} N r^{3/2}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{K} \beta_k \theta_k(T_c) \right| \leqslant \psi \sum_{k=0}^{K} |\theta_k(T_c)| \leqslant B\psi |w_c^0| N^5 r^4 \tag{2.9}$$

Здесь A, B — некоторые параметры, ограниченные функции от m_c, d, Nr, определяемые аналогично d в (2.5). Для оценок остатков рядов (2.1) достаточно воспользоваться следующей грубой оценкой частот ω_n (1.14):

$$\varkappa_* \sqrt{nr} \leqslant \omega_n \leqslant \sqrt{nr} \varkappa_{**}, \qquad 0 < \varkappa_* < \varkappa_{**} < \infty \tag{2.10}$$

Тогда согласно первым равенствам (2.8) и левому неравенству (2.10) можно получить для остатков рядов (2.1), (2.2) оценки

$$\left|\sum_{k=K+1}^{\infty}\alpha_k^{(i)}\Theta_k(T_c)\right|\leqslant\varphi|w_c^\circ|\sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{1}{\omega_{2k+1}}\frac{1}{(2k+1)^2}\leqslant\frac{\varphi|w_c^\circ|}{3\varkappa_*}\frac{1}{\sqrt{r}N^{3/2}}$$

$$\left|\sum_{k=K+1}^{\infty}\beta_k\theta_k(T_c)\right|\leqslant2\psi|w_c^\circ|\sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\leqslant\psi|w_c^\circ|\frac{1}{N} \tag{2.11}$$

В результате установлено, что значения $\Phi^{(i)}(x,\ y,\ t)$, $\eta(x,\ t)$ будут асимптотически малыми для всех $t\geqslant T$, $(x,y)\in G$, если

$$r\ll1,\quad N=[r^{-\lambda}],\quad {}^1/_3<\lambda<{}^2/_3 \tag{2.12}$$

Левое неравенство для λ в (2.12) следует из условия асимптотической малости по r первой оценки (2.11), а правое установлено выше при построении оценок (2.8). Сделаем следующие замечания:

физическими условиями, обеспечивающими асимптотическую малость внутренних волн после окончания процесса управления, являются: требование $r\ll1$, вид управления w_c (2.7) и выбор интервала $T_c=m_cT_0$. Выбор параметра λ в (2.12), т. е. величины $N\gg1$ связан лишь со способом получения оценок. Возможна процедура дальнейшего выбора параметра λ с целью минимизации полной оценки остаточных колебаний;

в процессе управления, т. е. при $0<t<T$, $T/T_0\sim1$, функции $\Phi^{(i)}(x,\ y,\ t)$ будут не малыми при $r\downarrow0$, хотя $w_c\to0$ для $|c^*-c^\circ|\sim l\nu$ согласно (2.7). Однако возвышения границы раздела $\eta(x,\ t)$ будут асимптотически малыми — порядка $\sqrt{r}$;

как отмечалось, ряды для скоростей $\mathbf{v}_i=-\nabla\Phi_i$, получаемые почленным дифференцированием, в случае релейного управления w_c (2.7) абсолютно и равномерно сходятся при $t\in[0,\ \infty)$, $(x,\ y)\in G$. Асимптотическую малость $\mathbf{v}_i(x,\ y,\ t)$ для $t\geqslant T$ установить не удается; можно показать, что $\mathbf{v}_i\to0$ при $r\downarrow0$ в среднеквадратическом по x, y. Равномерные оценки аналогично [4] получаются в случае более гладких управляющих воздействий. Сходные утверждения справедливы и для ускорений $\mathbf{w}_i(x,\ y,\ t)$.

Дополнительной к рассмотренной выше задаче управления скоростью сосуда является задача изменения его положения без изменения скорости. Соответствующая управляющая функция $w=w_s(t,\ T)$ из допустимого класса кусочно-постоянных (релейных) функций выбирается в виде (m_s — «небольшое» натуральное число)

$$\begin{gathered}w_s(t,\ T)=w_s^\circ[\chi(t)-2\chi(t-{}^1/_2T)+\chi(t-T)]\\ w_s\equiv0\ \forall t>T,\qquad T=T_s=2m_sT_0,\qquad w_s^\circ=4(s^*-s^\circ)T_s^{-2}\end{gathered} \tag{2.13}$$

Подстановка функции w_s (2.13) в (2.1), (2.2) приводит к выражениям для финальных значений $\Theta_k(T_s)$, $\theta_k(T_s)$

$$\begin{gathered}\Theta_k(T_s)=w_s^\circ\omega_{2k+1}^{-1}(2k+1)^{-2}(-2\sin{}^1/_2\omega_{2k+1}T_s+\sin\omega_{2k+1}T_s)\\ \theta_k(T_s)=w_s^\circ(2k+1)^{-2}(2\cos{}^1/_2\,\omega_{2k+1}T_s-\cos\omega_{2k+1}T_s-1)\end{gathered} \tag{2.14}$$

При помощи оценок величин (2.14) для $k\leqslant K$ и $k\geqslant K+1$ соответственно, аналогичных (2.8)—(2.11), устанавливается, что $\forall t\in[T,\ \infty)$, $(x,\ y)\in G$ волновые движения жидкости будут асимптотически малыми при $r\downarrow0$. Приведенные выше замечания остаются справедливыми.

Совокупное управление скоростью и положением сосуда с гашением внутренних волн жидкости, т. е. асимптотическое решение исходной задачи управления с условиями (2.3) получается линейной комбинацией управлений $w_c(t, T)$ (2.7) и $w_s(t, T)$ (2.13):

$$w(t, T)=w_c(t, T)+w_s(t, T), \quad T=2mT_0 \tag{2.15}$$

$$m=1, 2, \ldots, \quad w_c^\circ=(c^*-c^\circ)T^{-1}, \quad w_s^\circ=4(s^*-s^\circ)T^{-2}-2(c^*+c^\circ)T^{-1}$$

Соответствующие оценки финальных значений $\Phi^{(i)}$, η и $\forall t\geqslant T$ получаются суммированием оценок, получаемых для каждой управляющей функции w_c и w_s. По порядку степени малого параметра r эти оценки имеют вид (2.8)—(2.12). Также справедливыми остаются приведенные выше замечания.

3. Рассмотрим случай «квазистационарного процесса управления». Предполагается (см. п.1), что время T процесса управления много больше периода T_1 колебаний наинизшей первой моды, т. е.

$$T_1/T=\varepsilon\ll 1 \qquad (T_1=2\pi/\omega_1) \tag{2.16}$$

Величина ω_1 определена формулой (1.14). Предположение относительно малости r не делается. При помощи управляющих кусочно-постоянных функций w_c (2.7), или w_s (2.13), или w (2.15) можно привести сосуд в состояние заданного движения с асимптотически малыми по ε колебаниями жидкости как в процессе управления, т. е. $\forall t\in[0, T]$, так и $\forall t>T$.

Например, подстановка функции w_c (2.7) в (2.1), (2.2) для произвольных $k\geqslant 0$ и значений T, удовлетворяющих (2.16), с учетом равенств типа (2.8) приводит $\forall t\in[0, \infty)$, $(x, y)\in G$ к оценкам порядка ε

$$\begin{gathered}|\Phi^{(i)}(x,y,t)|\leqslant\varphi\frac{|c^*-c^\circ|}{T}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\omega_{2k+1}}\frac{1}{(2k+1)^2}<\frac{\pi}{16}\varepsilon\varphi|c^*-c^\circ| \\ |\eta(x,t)|\leqslant 2\psi\frac{|c^*-c^\circ|}{T}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{4}\varepsilon\psi\frac{|c^*-c^\circ|}{T_1}\end{gathered} \tag{2.17}$$

Управление положением сосуда посредством воздействия $w_s(t, T)$ (2.13) приводит к аналогичным (2.17) оценкам с заменами коэффициентов $|c^*-c^\circ|T^{-1}$ на $12|s^*-s^\circ|T^{-2}$ и $8|s^*-s^\circ|T^{-2}$ соответственно. Из оценок следует, что расстояние $|s^*-s^\circ|$ может быть при этом порядка $l\varepsilon^{-1}$. Как и в п.2, совокупное управление скоростью и положением при помощи кинематического воздействия $w=w_c+w_s$ с соответствующим (2.15) выбором коэффициентов w_c°, w_s° приводит к аналогичным асимптотически малым внутренним волнам. Равномерная малость скоростей $\mathbf{v}_i$ также будет иметь место, что следует из оценок рядов для $\nabla\Phi_i$, получаемых почленным дифференцированием.

Таким образом построены простые физически реализуемые законы кинематического управления движением сосуда с тяжелой двухслойной жидкостью, позволяющие привести его в состояние заданного движения, как целое, с асимптотически малыми внутренними волнами. В процессе управления, однако, относительные колебательные движения жидкости могут быть не малыми (см. п.2).

Представляют прикладной интерес следующие постановки задач: построение законов динамического или кинематического управления движением сосуда, приводящих к малым силам волнового давления на вертикальных стенках, управление движением с учетом упругой податливости стенок сосуда, обобщения на случаи более сложных движений (поступательных и вращательных), учет диссипации и других возмущений и многие другие обобщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретенский Л. Н.* Колебания жидкости в подвижном сосуде.— Изв. АН СССР. ОТН, 1951, № 10, с. 1483—1494.
2. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
3. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
4. *Акуленко Л. Д.* О кинематическом управлении движением сосуда с идеальной тяжелой жидкостью.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 1, с. 39—46.
5. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
6. *Полтавский Л. Н.* О финитной управляемости бесконечных систем маятников.— Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 6, с. 318—321.
7. *Полтавский Л. Н.* О связи резонансных свойств и управляемости в многомерных бесконечных системах маятников.— Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 1, с. 24—27.
8. *Акуленко Л. Д.* Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1095—1103.
9. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Кинематическое управление движением упругой системы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 168—176.

Москва

Поступила в редакцию
17.V.1984