МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1985

УДК 531.384

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ВОЛЧКА С ПОЛОСТЬЮ, НАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

МАРКЕЕВ А. П.

Задачи о движении твердого тела с полостями, содержащими жидкость, исследовались еще во второй половине прошлого века. Важнейшие результаты, история вопроса и подробная библиография содержатся в [1] и монографиях [2, 3]. В публикуемой работе исследуется устойчивость движения твердого тела, содержащего эллипсоидальную полость, целиком заполненную однородной несжимаемой идеальной жидкостью, совершающей однородное вихревое или потенциальное движение. Предполагается, что твердое тело (оболочка) динамически и геометрически симметрично, а движение происходит на неподвижной горизонтальной плоскости. Рассмотрены случаи абсолютно гладкой и абсолютно шероховатой плоскости. Получены условия устойчивости вращения тела вокруг расположенной вертикально оси симметрии. Рассмотрен случай тонкой невесомой оболочки. Наиболее полное исследование аналогичной задачи для движения тела вокруг неподвижной точки содержится в [4, гл. 4].

1. Рассмотрим тяжелое твердое тело, движущееся по неподвижной горизонтальной плоскости, касаясь ее одной точкой выпуклой поверхности. Тело имеет эллипсоидальную полость, целиком заполненную однородной несжимаемой идеальной жидкостью. Пусть $Gx_1x_2x_3$ — система координат, образованная главными центральными осями инерции тела (оболочки). Поверхность полости в этой системе координат имеет уравнение

$$x_1^2/a_1^2+x_2^2/a_2^2+x_3^3/a_3^2=1 \qquad (a_i - \mathrm{const}) \tag{1.1}$$

Оси Gx_i ($i=1, 2, 3$) будут главными центральными осями инерции и для системы твердое тело — жидкость.

Если в какой-либо момент времени движение жидкости в полости было потенциальным или однородным вихревым, то оно всегда остается таким [2]. Будем рассматривать только эти простейшие движения жидкости; они могут быть охарактеризованы конечным числом переменных.

Направленный вертикально вверх единичный вектор γ и радиус-вектор точки касания тела и плоскости относительно центра тяжести задаются в системе координат $Gx_1x_2x_3$ компонентами γ_1, γ_2, γ_3 и x_1, x_2, x_3 соответственно. Уравнение поверхности тела

$$f(x_1, x_2, x_3)=0 \tag{1.2}$$

выберем так, чтобы

$$\gamma=-\mathrm{grad}\, f/|\mathrm{grad}\, f| \tag{1.3}$$

Пусть движение жидкости однородное вихревое. Уравнения движения системы тело — жидкость, полученные из уравнения Гельмгольца и теоремы об изменении кинетического момента, имеют вид [2]

$$\frac{d\Omega_1}{dt}=2a_1^2\left(\frac{\omega_3\Omega_2}{a_1^2+a_2^2}-\frac{\omega_2\Omega_3}{a_3^2+a_1^2}\right)-2\frac{a_1^2(a_3^2-a_2^2)}{(a_1^2+a_2^2)(a_1^2+a_3^2)}\Omega_2\Omega_3 \tag{1.4}$$

$$A_{*1}\frac{d\omega_1}{dt}+A_1'\frac{d\Omega_1}{dt}+(A_{*3}-A_{*2})\omega_2\omega_3+A_3'\omega_2\Omega_3-A_2'\omega_3\Omega_2=M_1 \quad \{1\ 2\ 3\} \tag{1.5}$$

К каждому из уравнений (1.4), (1.5) надо добавить еще по два уравнения, получающихся из (1.4) и (1.5) круговой перестановкой индексов, указанных в фигурной скобке. В (1.4), (1.5) через ω_i, Ω_i, M_i (i=1, 2, 3) обозначены проекции на ось Gx_i, соответственно, вектора угловой скорости тела, уменьшенного в два раза вихря скорости жидкости, момента реакции плоскости относительно центра тяжести. Через A_{*i} и A_i' в (1.5) обозначены соответственно момент инерции преобразованного тела и разность моментов инерции жидкости и эквивалентного тела относительно оси Gx_i. Если через A_i и A_i^* обозначить моменты инерции относительно оси Gx_i твердого тела (оболочки) и эквивалентного тела, а через m_2 — массу жидкости, то $A_{*i}=A_i+A_i^*$:

$$A_1^*=\frac{m_2(a_2^2-a_3^2)^2}{5(a_2^2+a_3^2)},\qquad A_1'=\frac{4m_2a_2^2a_3^2}{5(a_2^2+a_3^2)}\qquad \{1\ 2\ 3\}$$

Компоненты вектора γ удовлетворяют уравнениям Пуассона

$$\gamma_1^{\cdot}=\omega_3\gamma_2-\omega_2\gamma_3\ \{1\ 2\ 3\} \tag{1.6}$$

Пусть $m=m_1+m_2$ — сумма масс тела и жидкости, g — ускорение свободного падения, v_i, R_i — проекции на ось Gx_i вектора скорости центра тяжести и реакции плоскости R. Тогда из теоремы о движении центра инерции имеем уравнения

$$m(v_1^{\cdot}+\omega_2v_3-\omega_3v_2)=-mg\gamma_1+R_1\ \{1\ 2\ 3\} \tag{1.7}$$

В дальнейшем будем рассматривать случаи абсолютно гладкой и абсолютно шероховатой плоскостей. Если плоскость абсолютно гладкая, то

$$R=N\gamma \tag{1.8}$$

и проекция центра тяжести на горизонтальную плоскость движется равномерно и прямолинейно. Без ограничения общности предполагаем ее неподвижной, т. е. считаем, что центр тяжести движется по вертикали.

В случае абсолютно шероховатой плоскости движение происходит без скольжения, что приводит к равенствам

$$v_1+\omega_3x_2-\omega_2x_3=0\ \{1\ 2\ 3\} \tag{1.9}$$

Реакция плоскости в этом случае не имеет заранее заданного направления и может быть найдена из (1.7).

Уравнения (1.4)–(1.7) с учетом соотношений (1.1)–(1.3), а также равенств (1.8) или (1.9) образуют замкнутую систему уравнений, описывающую движение твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. В случае потенциального движения жидкости в (1.4) и (1.5) следует положить $\Omega_i=0$ (i=1, 2, 3).

Как в случае абсолютно гладкой, так и в случае абсолютно шероховатой плоскости существует интеграл энергии

$$\begin{gathered}{}^1/_2mv_G^2+{}^1/_2(A_{*1}\omega_1^2+A_{*2}\omega_2^2+A_{*3}\omega_3^2)+\\+{}^1/_2(A_1'\Omega_1^2+A_2'\Omega_2^2+A_3'\Omega_3^2)+mg\zeta=\mathrm{const}\end{gathered} \tag{1.10}$$

где v_G и ζ — соответственно скорость и высота центра тяжести над плоскостью

$$\zeta=-(x_1\gamma_1+x_2\gamma_2+x_3\gamma_3) \tag{1.11}$$

и интеграл

$$a_2^2a_3^2\Omega_1^2+a_3^2a_1^2\Omega_2^2+a_1^2a_2^2\Omega_3^2=\mathrm{const} \tag{1.12}$$

который указывает на постоянство интенсивности вихря (теорема Гельмгольца). Существует также геометрический интеграл

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1 \tag{1.13}$$

В случае абсолютно гладкой плоскости интегралом будет проекция кинетического момента на вертикаль

$$(A_{*1}\omega_1+A_1'\Omega_1)\gamma_1+(A_{*2}\omega_2+A_2'\Omega_2)\gamma_2+(A_{*3}\omega_3+A_3'\Omega_3)\gamma_3=\text{const} \quad (1.14)$$

Если к тому же тело динамически и геометрически симметрично, т. е. $A_1=A_2$, и форма поверхности оболочки симметрична относительно оси Gx_3, то проекция угловой скорости тела на ось симметрии постоянна, т. е. имеет место интеграл

$$\omega_3=\text{const} \quad (1.15)$$

Пусть ось Gx_3 и поверхность тела ортогональны в точке их пересечения при отрицательных x_3. Существует такое движение системы, в котором ось Gx_3 направлена по вертикали, центр тяжести неподвижен, а твердое тело (оболочка) и жидкость вращаются вокруг оси Gx_3 с постоянной угловой скоростью. Исследуем устойчивость этого движения, считая, что угловые скорости оболочки и квазитвердого движения жидкости одинаковы. Невозмущенному движению соответствует решение уравнений (1.4) – (1.6):

$$\Omega_1=\Omega_2=\omega_1=\omega_2=0, \quad \Omega_3=\omega_3=\omega=\text{const}, \quad \gamma_1=\gamma_2=0, \quad \gamma_3=1 \quad (1.16)$$

Твердое тело считаем динамически и геометрически симметричным с осью симметрии Gx_3, т. е. $A_1=A_2$, $a_1=a_2$, и уравнение (1.2) поверхности тела в окрестности точки ее пересечения с осью Gx_3 при отрицательных x_3 может быть записано в виде

$$f(x_1, x_2, x_3)\equiv-h-x_3+(x_1^2+x_2^2)/2\rho+\ldots=0 \quad (1.17)$$

Многоточие означает совокупность членов выше второго порядка, h – расстояние от центра тяжести до плоскости, а ρ – радиус кривизны поверхности тела в точке его касания с плоскостью в невозмущенном движении.

Из (1.3) и (1.17) с точностью до членов первого порядка включительно относительно x_1, x_2 получаем

$$\gamma_1=-x_1/\rho, \quad \gamma_2=-x_2/\rho, \quad \gamma_3=1 \quad (1.18)$$

2. Введем возмущения y_j ($j=1, 2, \ldots, 9$) по формулам $\Omega_1=y_1$, $\Omega_2=y_2$, $\Omega_3=\omega+y_3$, $\omega_1=y_4$, $\omega_2=y_5$, $\omega_3=\omega+y_6$, $\gamma_1=y_7$, $\gamma_2=y_8$, $\gamma_3=1+y_9$.

Выпишем линеаризованные уравнения возмущенного движения в случае абсолютно гладкой плоскости. Из (1.8), (1.11) и уравнений (1.7) получим, что в первом приближении $N=mg$, а

$$R_1=mgy_7, \quad R_2=mgy_8, \quad R_3=mg(1+y_9) \quad (2.1)$$

Проекции M_i момента реакции плоскости вычисляются по формулам $M_1=(x_2R_3-x_3R_2)$ $\{1\ 2\ 3\}$ и, согласно (1.17), (2.1), в первом приближении будут такими:

$$M_1=mg(h-\rho)y_8, \quad M_2=-mg(h-\rho)y_7, \quad M_3=0 \quad (2.2)$$

Линеаризованные уравнения (1.4) – (1.6) при $A_1=A_2$, $a_1=a_2$ получим в виде

$$\frac{dy_1}{dt}=\frac{2\omega}{\alpha+1}(y_2-y_5), \quad \frac{dy_2}{dt}=\frac{2\omega}{\alpha+1}(y_4-y_1), \quad \frac{dy_3}{dt}=0 \quad (2.3)$$

$$\frac{dy_4}{dt}=\frac{\omega\varphi_1}{b_1}y_2+\omega\frac{b_1-b_3-\varphi_2}{b_1}y_5+\frac{\mu g(h-\rho)}{b_1}y_8$$

$$\frac{dy_5}{dt}=-\frac{\omega\varphi_1}{b_1}y_1-\omega\frac{b_1-b_3-\varphi_2}{b_1}y_4-\frac{\mu g(h-\rho)}{b_1}y_7$$

$$dy_6/dt=0, \quad dy_7/dt=-y_5+\omega y_8, \quad dy_8/dt=y_4-\omega y_7$$

$$dy_9/dt=0, \quad b_1=5A_{*1}/(2m_2a_3^2), \quad b_3=5A_{*3}/(2m_2a_3^2)$$

$$\mu=5(m_1+m_2)/(2m_2a_3^2), \quad \alpha=(a_3/a_1)^2$$

$$\varphi_1=2(\alpha-1)/(\alpha+1)^2, \quad \varphi_2=(\alpha-1)^2/(\alpha(\alpha+1)^2)$$

Первое шестое и девятое уравнения отделяются. Остающиеся шесть уравнений удобно исследовать введя комплексные переменные по формулам

$$z_1=y_1+iy_2, \quad z_2=y_4+iy_5, \quad z_3=y_7+iy_8 \quad (i^2=-1) \tag{2.4}$$

Если за независимую переменную принять величину $\tau=i\omega t$, то z_j ($j=1, 2, 3$) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered} dz_1/d\tau=2(-z_1+z_2)/(\alpha+1) \\ \frac{dz_2}{d\tau}=-\frac{\varphi_1}{b_1}z_1-\frac{b_1-b_3-\varphi_2}{b_1}z_2-\frac{\mu g(h-\rho)}{b_1\omega}z_3 \\ dz_3/d\tau=z_2/\omega-z_3 \end{gathered} \tag{2.5}$$

Характеристический многочлен $F(\lambda)$ этой системы имеет вид

$$\begin{gathered} F(\lambda)\equiv\lambda^3+\varkappa_1\lambda^2+\varkappa_2\lambda+\varkappa_3 \\ \varkappa_1=\frac{2(\alpha+2)}{\alpha+1}-\frac{b_3}{b_1}-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha+1)^2b_1} \\ \varkappa_2=\frac{\alpha+5}{\alpha+1}-\frac{\alpha+3}{\alpha+1}\frac{b_3}{b_1}-\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)}{\alpha(\alpha+1)^2b_1}+\frac{\mu g(h-\rho)}{\omega^2b_1} \\ \varkappa_3=\frac{2}{\alpha+1}\left[1-\frac{b_3}{b_1}+\frac{\alpha-1}{\alpha(\alpha+1)b_1}+\frac{\mu g(h-\rho)}{\omega^2b_1}\right] \end{gathered} \tag{2.6}$$

Для устойчивости движения (1.16) необходимо, чтобы все три корня многочлена (2.6) были вещественными. Оставляя исключительный случай кратных корней, получаем необходимое условие устойчивости в виде неравенства

$$\varkappa_1^2\varkappa_2^2-4\varkappa_2^3-27\varkappa_3^2-4\varkappa_1^3\varkappa_3+18\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3>0 \tag{2.7}$$

Чтобы получить достаточные условия устойчивости, воспользуемся вторым методом Ляпунова. Функцию V построим в виде связки интегралов, указанных в п. 1. Из (1.13) следует, что

$$y_9=-{}^1/_2(y_7^2+y_8^2)+\ldots \tag{2.8}$$

При помощи (1.17), (1.18) и (2.8) из (1.11) получаем

$$\zeta=h-{}^1/_2(h-\rho)(y_7^2+y_8^2)+\ldots \tag{2.9}$$

Отсюда и из (2.3) следует, что $\zeta^{\cdot}$ — величина второго порядка малости. Запишем интеграл (1.10) $V_1=b_1(y_4^2+y_5^2)+2b_3\omega y_6+b_3y_6^2+2(y_1^2+y_2^2)/(\alpha+1)+2\omega y_3/\alpha+y_3^2/\alpha-\mu g(h-\rho)(y_7^2+y_8^2)+\ldots=\text{const}$.

Интеграл (1.14) с учетом (2.8) можно представить в виде

$$\begin{gathered} V_2=b_1(y_4y_7+y_5y_8)-{}^1/_2\omega(b_3+1/\alpha)(y_7^2+y_8^2)+b_3y_6+ \\ +1/\alpha y_3+2(y_1y_7+y_2y_8)/(\alpha+1)+\ldots=\text{const}. \end{gathered}$$

Интегралы (1.12) и (1.15) для возмущенного движения будут соответственно $V_3=\alpha(y_1^2+y_2^2)+2\omega y_3+y_3^2=\text{const}$, $V_4=y_6=\text{const}$.

Функцию Ляпунова возьмем в виде линейной связки интегралов V_k:

$$V=V_1-2(\sigma+1)\omega V_2+\sigma V_3/\alpha+2\sigma\omega b_3V_4 \tag{2.10}$$

где σ — некоторая постоянная. Запишем разложение функции V в ряд

$$V=\left(\sigma+\frac{2}{\alpha+1}\right)y_1^2-\frac{4(\sigma+1)\omega}{\alpha+1}y_1y_7+b_1y_4^2-2(\sigma+1)\omega b_1y_4y_7+$$

$$+\left[(\sigma+1)\omega^2\left(b_3+\frac{1}{\alpha}\right)-\mu g(h-\rho)\right]y_7^2+\left(\sigma+\frac{2}{\alpha+1}\right)y_2^2-$$
$$-\frac{4(\sigma+1)\omega}{\alpha+1}y_2y_8+b_1y_5^2-2(\sigma+1)\omega b_1y_5y_8+\left[(\sigma+1)\omega^2\left(b_3+\frac{1}{\alpha}\right)-\right.$$
$$\left.-\mu g(h-\rho)\right]y_8^2+\frac{\sigma+1}{\alpha}y_3^2+b_3y_6^2+\ldots$$

Квадратичная часть функции V представляет собой сумму четырех квадратичных форм, каждая из которых зависит от своих переменных: первая — от y_1, y_4, y_7, вторая — от y_2, y_5, y_8, третья и четвертая — от y_3 и y_6 соответственно, причем матрицы первых двух квадратичных форм одинаковы.

Используя критерий Сильвестра, получаем, что квадратичная часть функции V (а значит, и сама функция) будет определенно-положительной, если выполняется система неравенств (функция $F(\sigma)$ определена формулами (2.6)):

$$F(\sigma)<0,\quad \sigma>-2/(\alpha+1),\quad \sigma>-1 \tag{2.11}$$

Поиск областей параметров задачи, где выполняются достаточные условия устойчивости движения (1.16), состоит в нахождении тех значений параметров, для которых система неравенств (2.11) совместна хотя бы при каком-либо значении величины σ.

Для дальнейшего анализа отметим, что

$$F(-1)=\frac{\mu g(h-\rho)(1-\alpha)}{\omega^2 b_1(1+\alpha)},\qquad F\left(-\frac{2}{\alpha+1}\right)=\frac{4(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^4 b_1} \tag{2.12}$$

Из (2.11) и (2.12) сразу следует, что при $\alpha<1$, $h<\rho$ достаточные условия устойчивости выполнены, так как в этом случае $F(-1)<0$ и система неравенств (2.11) совместна, если, например, $\sigma=-1+\varepsilon$ $(0<\varepsilon\ll 1)$.

Если же $\alpha>1$ или $\alpha<1$, но $h\geqslant\rho$, то оба значения (2.12) функции $F(\sigma)$ положительны и для совместности системы (2.11) надо потребовать, чтобы уравнение $F(\sigma)=0$ имело три вещественных различных корня, т. е. должно выполняться неравенство (2.7). Таким образом, одно из достаточных условий устойчивости будет и необходимым.

Пусть неравенство (2.7) выполнено, а ν — значение σ, соответствующее точке минимума функции $F(\sigma)$ $(\nu=-\varkappa_1/3+(\varkappa_1^2-3\varkappa_2)^{1/2}/3)$. Можно показать, что помимо указанного случая $\alpha<1$, $h<\rho$ достаточные условия устойчивости выполнены еще в двух случаях, когда вместе с неравенством (2.7) удовлетворяется система неравенств $\alpha<1$, $h\geqslant\rho$, $\nu>-1$ или $\alpha>1$, $\nu>-2/(\alpha+1)$.

Из (2.8) и (2.9) следует, что полученные необходимые и достаточные условия устойчивости относительно возмущений величин Ω_i, ω_i $(i=1, 2)$, γ_1, γ_2 являются также условиями устойчивости относительности возмущений величин γ_3, v_i $(i=1, 2, 3)$.

Пусть $\alpha=1$, т. е. полость с жидкостью является шаровой. Тогда $F(\sigma)\equiv\equiv(\sigma+1)[(\sigma+1)^2-(b_3/b_1)(\sigma+1)+\mu g(h-\rho)/(\omega^2 b_1)]$.

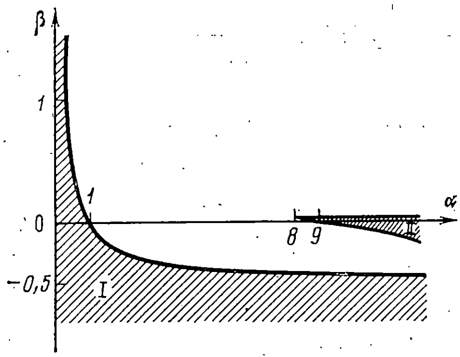
Необходимое условие устойчивости (2.7) приводится к неравенству

$$(b_3\omega)^2>4\mu g b_1(h-\rho) \tag{2.13}$$

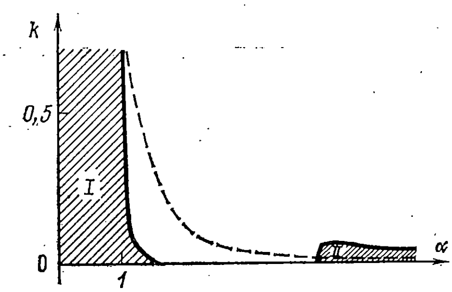
Учитывая, что $b_3/b_1>0$, можно показать, что при выполнении неравенства (2.13) существуют значения $\sigma>-1$, при которых $F(\sigma)<0$, т. е. выполняются и достаточные условия устойчивости. Таким образом, неравенство (2.13), которое в исходных обозначениях записывается в виде

$$(A_3\omega)^2>4mgA_1(h-\rho) \tag{2.14}$$

будет необходимым и достаточным условием устойчивости движения



Фиг. 1



Фиг. 2

(1.16). Условие (2.14) аналогично условию Маиевского совпадает с соответствующим условием, полученным в [5] для симметричного твердого тела без жидкости, так как если полость шаровая, то движение жидкости в полости не влияет на движение твердого тела (оболочки) [2].

Рассмотрим частный случай, когда масса оболочки настолько мала по сравнению с массой жидкости, что можно пренебречь весом оболочки и величинами ее моментов инерции. Тогда

$$b_1=\frac{(\alpha-1)^2}{2\alpha(\alpha+1)},\qquad b_3=0,\qquad \mu=\frac{5}{2a_3^2},\qquad \varkappa_1=2$$

$$\varkappa_2=\frac{\alpha+1}{\alpha-1}+\frac{2\alpha(\alpha+1)}{(\alpha-1)^2}\beta,\qquad \varkappa_3=\frac{2}{\alpha+1}\varkappa_2\qquad \left(\beta=\frac{5g(h-\rho)}{2\omega^2a_3^2}\right)$$

Необходимое условие устойчивости (2.7) запишется в виде

$$\left(\beta+\frac{\alpha-1}{2\alpha}\right)\left[\beta^2+\frac{(\alpha-1)(\alpha^3-13\alpha^2+34\alpha-6)}{2\alpha(\alpha+1)^3}\beta+\frac{(\alpha-1)^2(9-\alpha)}{4\alpha^2(\alpha+1)^3}\right]<0. \tag{2.15}$$

На фиг. 1 в плоскости α, β области, где выполнено неравенство (2.15), обозначены цифрами I и II и заштрихованы. Область I лежит в правой полуплоскости ниже гиперболы $\beta=(1-\alpha)/2\alpha$. Область II задается неравенствами $\beta_2<\beta<\beta_1$, где $\beta_1=a+b$, $\beta_2=a-b$:

$$a=\frac{(1-\alpha)(\alpha^3-13\alpha^2+34\alpha-6)}{4\alpha(\alpha+1)^3},\qquad b=\frac{(\alpha-1)^2\sqrt{\alpha(\alpha-8)^3}}{4\alpha(\alpha+1)^3}$$

Область II расположена справа от своей граничной точки (8; 0,0162). Ее верхняя граница расположена выше оси $\beta=0$ и асимптотически приближается к ней при $\alpha\to\infty$. Нижняя граница области II пересекает ось $\beta=0$ при $\alpha=9$; при $\alpha>9$ расположена ниже этой оси и при $\alpha\to\infty$ асимптотически приближается, как и граница области I, к горизонтальной прямой $\beta=-{}^1/_2$. При этом границы областей I и II не пересекаются ни при каких значениях α.

Использование результатов приведенного анализа системы неравенств (2.11) показало, что всюду в области I необходимые и достаточные условия устойчивости совпадают, а в области II выполняются только необходимые условия.

Отметим, что если центр тяжести совпадает с центром кривизны поверхности тела в точке ее касания с плоскостью, то $h=\rho$, $\beta=0$ и условия устойчивости выполнены, если $\alpha<1$ или $\alpha>9$. Это совпадает с результатами, установленными экспериментально Кельвином [6] и другими исследователями, и доказано теоретически в работах [7, 8].

3. Исследуем устойчивость в первом приближении движения (1.16) в случае абсолютно шероховатой плоскости. Из условий (1.9) отсутствия скольжения и уравнений (1.7) находим

$$R_1 = mg\gamma_1 - m[(\omega_2{}^{\cdot} x_3 - \omega_3{}^{\cdot} x_2) + (\omega_2 x_3{}^{\cdot} - \omega_3 x_2{}^{\cdot})] -$$

$$-m[\omega_2(\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1) + \omega_3(\omega_1 x_3 - \omega_3 x_1)] \quad \{1\,2\,3\}$$

В первом приближении имеем выражения для величин M_i ($i=1, 2, 3$):

$$M_1 = m[g(h-\rho)y_8 + \omega h(h-\rho)y_5 - h^2 y_4{}^{\cdot}]$$

$$M_2 = -m[g(h-\rho)y_7 + \omega h(h-\rho)y_4 + h^2 y_5{}^{\cdot}], \quad M_3 = 0 \tag{3.1}$$

Линеаризованные уравнения возмущенного движения будут иметь вид (2.3), только в правых частях четвертого и пятого уравнений последние слагаемые должны быть заменены соответственно на M_1 и M_2 из (3.1). Отбросим в (2.3) уравнения, отвечающие нулевым корням характеристического уравнения, и запишем оставшиеся шесть уравнений в комплексных переменных (2.4), приняв за независимую переменную величину $\tau = i\omega t$.

Получившаяся система трех дифференциальных уравнений имеет характеристический многочлен $F(\lambda)$, определяемый по формуле (2.6), в которой надо величину b_1 в коэффициентах $\varkappa_j$ заменить на $b_1 + \mu h^2$, а величину b_3 — на $b_3 + \mu h\rho$. Условие устойчивости в первом приближении запишется в виде неравенства (2.7).

Рассмотрим частный случай шаровой полости ($\alpha = 1$), когда движение жидкости не влияет на движение оболочки, в которой она заключена. Условие устойчивости приводится к неравенству (2.13), которое в исходных обозначениях запишется в виде $(A_3 + mh\rho)^2\omega^2 > 4(A_1 + mh^2)mg(h-\rho)$. В [5, 9] показано, что это условие устойчивости для твердого тела без жидкости будет необходимым и достаточным.

Пусть оболочка настолько тонка, что ее толщиной, массой и моментами инерции можно пренебречь. Тогда, положив в коэффициентах характеристического многочлена

$$h = a_3, \quad \rho = \frac{a_1{}^2}{a_3}, \quad \mu = \frac{5}{2a_3{}^2}, \quad b_1 = \frac{6\alpha^2 + 3\alpha + 1}{2\alpha(\alpha+1)}, \quad b_3 = \frac{5}{2\alpha}$$

будем иметь

$$\varkappa_1 = \frac{12\alpha^2 + 11\alpha - 3}{6\alpha^2 + 3\alpha + 1}, \quad \varkappa_2 = \frac{2(3\alpha^2 + 10\alpha - 8) + 5(\alpha^2 - 1)k}{6\alpha^2 + 3\alpha + 1}$$

$$\varkappa_3 = 2(\alpha - 1)(5k + 6)/(6\alpha^2 + 3\alpha + 1), \quad k = g/(\omega^2 a_3)$$

На фиг. 2 в плоскости параметров α, k области устойчивости заштрихованы и обозначены цифрами I и II. Правая граничная кривая области I начинается в точке (1,521; 0) и имеет вертикальную асимптотику $\alpha = 1$. Область II лежит справа от прямой $\alpha = 4{,}201$. Ее верхняя граничная кривая имеет точку максимума (4,6; 0,047), при $\alpha \to \infty$ она асимптотически приближается к оси $k = 0$.

4. Сравним полученные в пп. 2, 3 условия устойчивости вращения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение, с условиями устойчивости вращения тела с той же полостью, но при потенциальном движении жидкости. В последнем случае движение тела (оболочки) происходит так же, как движение некоторого твердого тела, преобразованного из исходного присоединением к нему эквивалентного тела, полностью заменяющего влияние на тело (оболочку) движения жидкости в полости [1, 2]. Поэтому необходимое и достаточное условие устойчивости в случае абсолютно гладкой плоскости записывается в виде неравенства [5]:

$$(A_{*3}\omega)^2 > 4mgA_{*1}(h-\rho) \tag{4.1}$$

а в случае абсолютно шероховатой — в виде неравенства [5, 9]:

$$(A_{*3}+m\rho h)^2\omega^2>4(A_{*1}+mh^2)mg(h-\rho) \quad (4.2)$$

где ω — угловая скорость оболочки.

Для невесомой оболочки $A_{*3}=0$, $A_{*1}=A_1^*>0$ условие (4.1) сводится к неравенству $h<\rho$, т. е. в случае абсолютно гладкой плоскости для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы центр тяжести жидкости лежал ниже центра кривизны поверхности оболочки в точке ее контакта с плоскостью.

Неравенство (4.2) для тонкой невесомой эллипсоидальной оболочки выполняется, если либо $\alpha\leqslant1$, либо $\alpha>1$ и $k<\psi(\alpha)$, где $\psi(\alpha)=5(\alpha+1)/[4(\alpha-1)(6\alpha^2+3\alpha+1)]$. Кривая $k=\psi(\alpha)$ изображена на фиг. 2 пунктиром.

Таким образом, как для абсолютно гладкой, так и для абсолютно шероховатой плоскости наличие завихренности в движении жидкости в зависимости от величин ω и α может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние на вращение оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью.— В кн.: Собр. соч. Т. 2. М.— Л.: Гостехиздат, 1949, с. 152—309.
2. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
3. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 230 с.
4. *Савченко А. Я.* Устойчивость стационарных движений механических систем. Киев: Наук. думка, 1977. 160 с.
5. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гиростатов некоторого вида.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, с. 778—784.
6. *Thomson W.* On the precessional motion of liquid (liquid girostats).— Math. and Phys. Papers, Cambridge, 1910, v. 4, p. 193—201.
7. *Hough S. S.* The Oscillations of a Rotating Ellipsoidal Shell Containing Fluid.— Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A, 1895, v. 186, pt 1, p. 469—506.
8. *Жак С. В.* Об устойчивости некоторых частных случаев движения симметричного гироскопа, содержащего жидкие массы.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 2, с. 245—249.
9. *Дувакин А. П.* Об устойчивости движения волчка по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.— Инж. ж., 1962, т. 2, вып. 2, с. 222—230.

Москва

Поступила в редакцию
5.VIII.1983