4. *Толоконников Л. А.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Высш. школа, 1979. 318 с.
5. *Долгушин Г. Г., Исаев Ю. И.* Универсальный испытательный стенд на давление 20 000 кгс/см^2.— Тр. Всес. науч.-исслед. ин-т физ.-техн. и радиотехн. измерений, 1969, вып. 104(164), с. 144–147.
6. *Моисеев А. Г., Степунин В. И., Толоконников О. Л.* Прибор для измерения осевой силы и малой разности давлений в камере высокого давления.— Заводск. лаборатория, 1983, т. 49, № 5, с. 85–86.
7. *Моисеев А. Г., Толоконников О. Л.* Тензометр для измерения осевых и окружных деформаций в трубчатых образцах.— Заводск. лаборатория, 1982, т. 48, № 11, с. 85–86.
8. *Моисеев А. Г., Толоконников О. Л.* Применение ЭВМ при механических испытаниях трубчатых образцов в сложном напряженном состоянии.— Заводск. лаборатория, 1983, т. 49, № 3, с. 76–78.

Тула

Поступила в редакцию
27.II.1983

УДК 539.3

К ИНТЕГРИРОВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СИММЕТРИЧНО ДЕФОРМИРОВАННОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

ИВАНОВ В. К.

В работе приводится новый случай интегрируемости гипергеометрического уравнения Гаусса, применяемого для расчета симметрично деформированной круглой пластинки переменной жесткости. Полученное решение представлено в конечном виде.

В [1] уравнения растяжения и изгиба симметрично деформированной круглой пластинки переменной жесткости при замене независимой переменной приводятся к гипергеометрическому уравнению Гаусса

$$x(x-1)y''+[(a+b+1)x-c]y'+aby=0 \qquad (1)$$

где a, b, c – постоянные коэффициенты, зависящие от параметров жесткости пластинки.

Решение гипергеометрического уравнения может быть представлено посредством степенных рядов или определенных интегралов [2]. Решения в конечном виде, если не считать тех случаев, когда гипергеометрический ряд обрывается, известны в шести случаях [3]. Если исходное уравнение (1) записать кратко: $H(a, b, c, x, y)=0$, то указанные шесть случаев имеют следующий вид:

$$H(a,\ a+{}^1/_2,\ 2a+1,\ x,\ y)=0,\quad H(a,\ a-{}^1/_2,\ {}^1/_2,\ x,\ y)=0 \qquad (2)$$

$$H(a,\ a+{}^1/_2,\ {}^3/_2,\ x,\ y)=0,\quad H(1,\ b,\ c,\ x,\ y)=0$$

$$H(a,\ b,\ a,\ x,\ y)=0,\quad H(a,\ b,\ a+1,\ x,\ y)=0$$

В публикуемой работе представлено решение в конечном виде для случаев (m – любое целое положительное число):

$$H(a,\ b,\ a+1+m,\ x,\ y)=0 \qquad (3)$$

В [4] рекомендуется для обыкновенных дифференциальных уравнений, у которых коэффициенты перед функцией и ее производными – полиномы, частное решение строить в виде полинома некоторой степени, что иногда приводит к положительному результату. Чтобы при интегрировании дифференциальных уравнений подобного класса было больше возможностей, частное решение представим в виде произведения некоторой неизвестной степени x на полином

$$y_1=x^n\left(1+\sum a_k x^k\right) \qquad (k=1, 2, \ldots, m) \tag{4}$$

где неизвестные показатель степени n и коэффициенты a_k определяются при подстановке решения (4) в уравнение (1).

Подставив функцию (4) и ее производные в (1) и сделав некоторые преобразования, будем иметь

$$[n(n-1+D)+ab]x-n(n-1+c)-\sum_{k=1}^{m}a_k(n+k)(n+k-1+c)x^k+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}a_k[(n+k)(n+k-1+D)+ab]x^{k+1}=0, \qquad D=a+b+1 \tag{5}$$

Приравняв нулю коэффициенты при различных степенях x, получим ряд уравнений

$$x^0 \qquad n-1+c=0 \tag{6}$$

$$x \qquad [n(n-1+D)+ab]-(n+1)(n+c)a_1=0 \tag{7}$$

$$x^2 \qquad [(n+1)(n+D)+ab]a_1-(n+2)(n+1+c)a_2=0 \tag{8}$$

$$x^m \qquad [(n+m-1)(n+m-2+D)+ab]a_{m-1}-(n+m)(n+m-1+c)a_m=0 \tag{9}$$

$$x^{m+1} \qquad (n+m)(n+m-1+D)a_m=0 \tag{10}$$

Решая уравнения (6), (10) относительно параметра n и приравнивая полученные выражения, найдем зависимость параметра c от параметров a или b и числа m:

$$c=a+1+m \quad \text{или} \quad c=b+1+m \tag{11}$$

Из уравнений (7)—(9) определяется закон, по которому вычисляются коэффициенты a_k для решения (4):

$$a_k=\frac{\Pi[(n+i-1)(n+i-2+D)+ab]}{\Pi(n+i)(n+i-1+c)} \qquad (i=1, 2, \ldots, k) \tag{12}$$

Второе частное решение можно получить по формуле [4]:

$$y_2=y_1\int\frac{(x-1)^{m-b}}{y_1^2x^z}\,dx, \qquad z=a+1+m$$

Если в (4) принять $a_k=0$, то найдем решение для шестого уравнения (2).

Следует отметить, что решение данной задачи получено для случая, когда постоянные a и b и их разность не равняются никакому целому неположительному числу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коваленко А. Д.* Теория расчета на прочность колес турбомашин. Киев: Изд-во АН УССР, 1950. 123 с.
2. *Кузнецов Д. С.* Специальные функции. М.: Высш. школа, 1965. 423 с.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
4. *Матвеев Н. М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск: Вышэйша школа, 1970. 357 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
3.V.1983

Технический редактор *Т. В. Скворцова*

Сдано в набор 03.04.85 Подписано к печати 29.05.85 Т-10755 Формат бумаги $70\times108^1/_{16}$
Высокая печать Усл. печ. л. 16,8 Усл. кр.-отт. 24,7 тыс. Уч.-изд. л. 18,2 Бум. л. 6,0
Тираж 1456 экз. Зак. 1251

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»,
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Шубинский пер., 6