УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНИКА В ВИДЕ СТАКАНА ИЛИ ЦИЛИНДРА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МИШЕНЬЮ

ГЛУШКО А. И.

Соударение металлических цилиндров лежит в основе экспериментальных исследований откольных явлений. В этих экспериментах с помощью лазерного дифференциального интерферометра регистрируется движение тыльной поверхности мишени. Затем полагают, что вблизи разрыва сплошности среда находится в состоянии одноосного деформированного состояния и, принимая акустическое приближение, определяют напряжения, действующие в сечении откола [1—3]. Практически трудно осуществить соударение так, чтобы лазерный луч отражался от тыльной поверхности мишени в центре симметрии. Так как размеры соударяющихся тел конечны, то неизбежно возникают дифракционные волны, нарушающие однородность полей напряжений и скоростей. Поэтому желательно так подобрать размеры соударяющихся тел, чтобы в некотором круге на тыльной поверхности мишени скорости точек были одинаковы (либо отличались очень мало) и отражение лазерного луча происходило в точке, лежащей внутри этого круга. В указанных экспериментальных работах удалось подобрать размеры соударяющихся тел так, чтобы удовлетворить этим требованиям.

Экспериментальные исследования позволяют сделать лишь косвенное заключение о характере напряженного состояния в среде. Практически единственной возможностью получить не только качественную, но и количественную информацию о полях напряжений и скоростей в среде является численное моделирование процесса соударения. В публикуемой работе рассматривается удар цилиндра по цилиндру и удар стакана по цилиндру и численно исследуются поля напряжений и скоростей как на тыльной поверхности мишени, так и внутри мишени. Под стаканом понимается составное тело вращения, одна часть которого (стенки стакана) представляет собой цилиндрическую трубу, а другая (дно стакана) — сплошной цилиндр.

При расчетах были приняты следующие размеры соударяющихся тел. Мишень: радиус $R_3=12\cdot 10^{-3}$ м, высота $h_2=7{,}5\cdot 10^{-3}$ м; цилиндрический ударник: радиус $R_2=7{,}5\cdot 10^{-3}$ м, высота $h=2\cdot 10^{-3}$ м; размеры стакана: высота всего стакана $h_c=10^{-2}$ м, толщина стенок стакана $d=10^{-3}$ м, высота дна стакана $h_g=2\cdot 10^{-3}$ м, радиус стакана $R_2=7{,}5\cdot 10^{-3}$ м. Исследовалось соударение алюминиевых тел; скорость продольных волн в алюминии $c_1=6{,}12\cdot 10^3$ м/с, скорость поперечных волн $c_2=2{,}94\cdot 10^3$ м/с.

Будем рассматривать соударение твердых тел в цилиндрической системе координат; обозначим расстояние от начала отсчета через r, полярный угол — через φ, координату по оси Z — через z. Для описания свойств соударяющихся тел примем модель линейно-упругой среды (t — время, ρ — плотность, R — радиус мишени). Компоненты вектора скорости обозначим через $v_r=v^1$, $v_z=v^3$; физические компоненты тензора напряжений обозначим через $\sigma_{rr}=\sigma^{11}$, $\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma^{22}/r_2$, $\sigma_{zz}=\sigma^{33}$, $\tau=\sigma^{12}/r$.

Тогда в безразмерных переменных $t^\circ=c_1t/R$, $r^\circ=r/R$, $z^\circ=z/R$, $v_r^\circ=v_r/c_1$, $v_z^\circ=v_z/c_1$, $\sigma_r^\circ=\sigma_{rr}/\rho c_1^2$, $\sigma_z^\circ=\sigma_{zz}/\rho c_1^2$, $\sigma_\varphi^\circ=\sigma_{\varphi\varphi}/\rho c_1^2$, $\tau^\circ=\tau/\rho c_1^2$ система уравнений, описывающая движения сплошной среды, записывается следующим образом (градус над переменными опущен):

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r},\qquad \frac{\partial v_z}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau}{r}$$

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial t}=\frac{\partial v_r}{\partial r}+(1-2c^2)\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}\right)\tag{1}$$

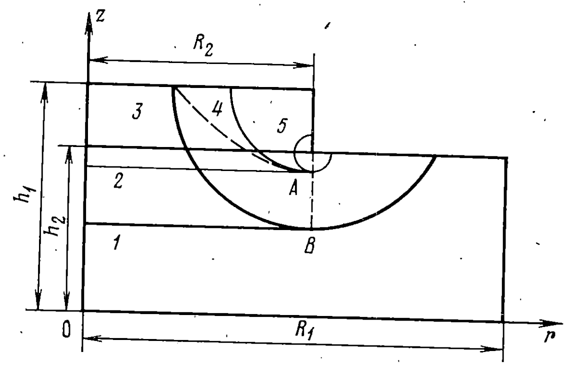
$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial t}=(1-2c^2)\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+(1-2c^2)\frac{v_r}{r}$$

$$\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial t}=(1-2c^2)\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\frac{v_r}{r},\qquad \frac{\partial\tau}{\partial t}=c^2\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right),\qquad c=\frac{c_2}{c_1}$$

Примем, что начало соударения соответствует $t=0$. Область пространства, занятую соударяющимися телами, обозначим G, внешнюю поверхность тел — Γ. Тогда задача соударения формулируется следующим образом. При $t>0$ найти решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $\sigma_r=\sigma_\varphi=\sigma_z=\tau=v_r=0$ в G; $v_z=0$ в области, ограниченной мишенью; $v_z=v_0=\mathrm{const}$ в области, ограниченной ударником; на границе Γ нормальные и касательные напряжения равны нулю.

На контакте между ударником и мишенью рассматриваются отдельно как условие полного прилипания, так и условие отскока.

Численное решение задачи получено методом распада произвольного разрыва [4]. Применение метода распада к решению задачи соударения цилиндрических тел



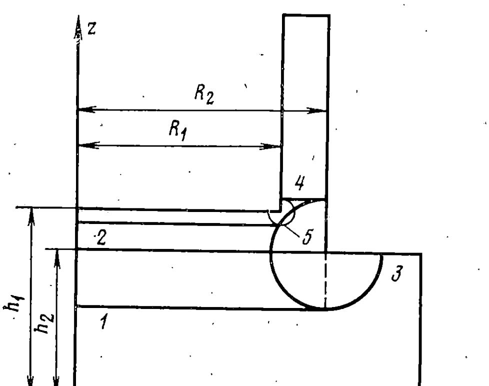
Фиг. 1

рассматривалось, например, в [5]. Там же подробно проанализированы поля напряжений в различные моменты времени процесса соударения.

Обратимся теперь к анализу численных результатов. В рамках линейной теории упругости многие черты процесса соударения становятся ясными из качественного рассмотрения волновых картин в различные моменты времени. Рассмотрим вначале волновые картины, возникающие в среде при ударе цилиндра по цилиндру. В начальные моменты времени от плоскости контакта с постоянной скоростью распространяются плоские волны сжатия: одна «вниз» по мишени, другая «вверх» по ударнику. Одновременно из точек, лежащих на пересечении образующих ударника и плоскости контакта, излучается тороидальная волна разгрузки, распространяющаяся внутрь цилиндров к оси симметрии.

В момент времени $t_1=h/c_1$ (время пробега продольной волны от плоскости контакта до тыльной поверхности ударника) от границы $z=h_1$ начинается отражение плоской волны сжатия, а дифракция тороидальной волны разгрузки на линии пересечения образующих ударника с плоскостью $z=h_1$ приводит к возникновению второй тороидальной волны. При $t>2h_1$ волновая картина будет характеризоваться суперпозицией следующих волн (фиг. 1). По мишени распространяются «вниз» плоская волна сжатия и плоская волна разгрузки. На фиг. 1 фронт сжатия обозначен цифрой *1*, фронт волны разгрузки — цифрой *2*. Расстояние между фронтами равно $2h$ и не зависит от времени. Линии *3*, *4*, *5* на фиг. 1 соответствуют фронтам тороидальных волн, возникающих в моменты времени $t=0$, $t=h/c_1$, $t=2h/c_1$. Фронты *2*, *4*, *5* гладко сопрягаются в точке A, а фронты *1*, *3* — в точке B; штриховой кривой обозначен фронт головной волны.

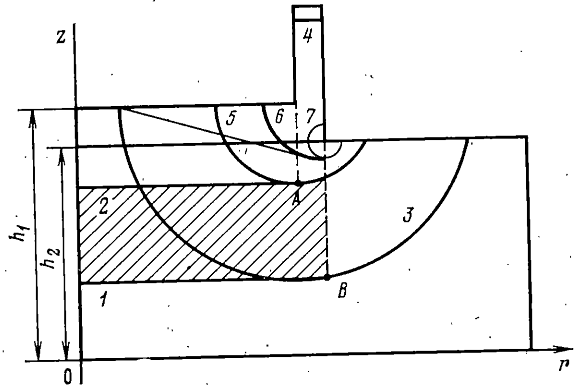
В области, ограниченной осью Z и линиями *1*, *2*, *3*, среда находится в одноосном деформированном состоянии; в области за фронтом тороидальной волны *3* реализуется сложное напряженное состояние, а в остальных точках среды напряжения и скорости равны нулю.



Фиг. 2

Описанная структура волновых фронтов будет сохраняться до тех моментов времени, пока либо не начнется разлет соударяющихся тел, либо фронт тороидальной волны *3* не достигнет оси Z. В первом случае те точки на плоскости контакта, в которых происходит разделение цилиндров, станут источниками сферических волн и в результате этого в ударнике и в мишени возникнут дополнительные волны, интенсивность которых незначительна. Во втором случае из тех точек на оси симметрии, которые пересечет фронт волны *3*, будут излучаться сферические волны, а огибающая фронтов этих волн будет определять фронт расходящейся волны.

Перейдем к анализу волновых картин, возникающих в среде при ударе стакана по цилиндру. Так как дно стакана имеет такую же высоту, как и высота цилиндрического ударника, на интервале времени $\Delta t=h/c_1$ задачи об ударе стакана по цилиндру и цилиндра по цилиндру имеют одно и то же решение. В момент времени $t=h/c_1$ в результате дифракции плоской волны сжатия на цилиндрической полости (тыльная поверхность стакана) возникает тороидальная волна разгрузки.



Фиг. 3

Ось этой волны совпадает с окружностью радиуса R, лежащей в плоскости $z=h_1$ (фиг. 2).

На интервале времени $h/c_1<\Delta t<2h/c_1$ волновая картина характеризуется следующим образом (фиг. 3). Прямая линия *1* соответствует фронту волны сжатия, распространяющемуся вниз, линия *2* – фронту волны разгрузки, распространяющемуся вниз, линия *4* – фронту волны сжатия, распространяющемуся вверх по стенкам стакана. Дуги окружностей *3*, *5* соответствуют тороидальным волнам, возникающим в моменты времени $t=0$ и $t=h/c_1$. В моменты времени $t=L/c_1$, $t=2L/c_1$, $L=((R_1-R_2)^2+h^2)^{1/2}$ возникают еще две тороидальные волны. Фиг. 3 иллюстрирует волновую картину в среде при $t>2L/c_1$. Здесь дуги окружностей *6*, *7* соответствуют тороидальным волнам, возникающим при $t=L/c_1$, $t=2L/c_1$. Линии *1–5* на фиг. *2*, *3* определяют положения фронтов в различные моменты времени $h/c_1<t<2h/c_1$ и $t>2L/c_1$ соответственно. Следует отметить, что на фиг. 3, чтобы не загромождать рисунок дополнительными линиями, не показаны фронты головных волн и волновая картина в стенках стакана.

Из фиг. 3 следует, что тороидальные волны *5*, *6*, *7* не влияют на характер напряженного состояния в области, ограниченной фронтами плоских волн *1*, *2*. Тогда очевидно, что в этой области поля скоростей и напряжений в среде при ударе стакана по цилиндру будут совпадать с полями скоростей и напряжений при ударе цилиндра по цилиндру, т. е. в этой области наличие стенок стакана никак не сказывается.

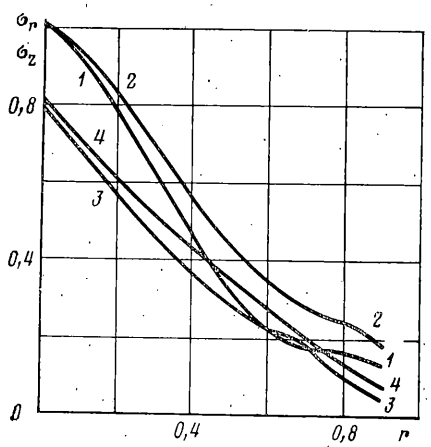
При отражении плоской волны сжатия от свободной поверхности $z=0$ образуется плоская волна разгрузки, распространяющаяся вверх. В момент времени $t=(h+h_1)/c_1$, когда фронты плоских волн разгрузки совпадают при $z=h$, в среде возникают интенсивные растягивающие напряжения.

На фиг. 4 приведены зависимости компонент σ_r и σ_z от r при $z=1{,}1h$. Здесь кривая *1* соответствует величине σ_z при ударе стаканом, кривая *2* – цилиндром. Аналогично кривая *3* соответствует величине σ_r при ударе стаканом, кривая *4* – цилиндром. Эти зависимости показывают, что при ударе цилиндром растягивающие напряжения, вообще говоря, выше, чем при ударе стаканом, кривая *2* (удар цилиндром) изменяется более плавно, чем кривая *1* (удар стаканом).

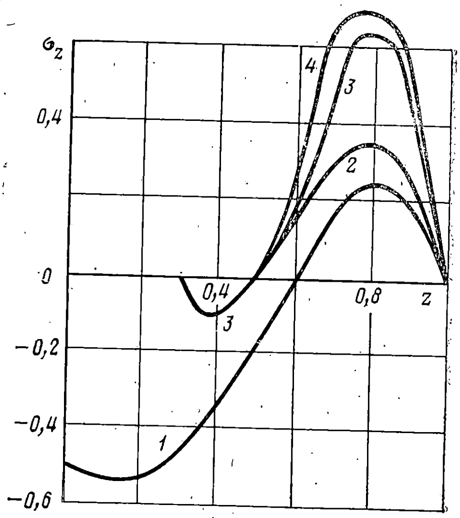
Фиг. 5 иллюстрирует зависимость компоненты σ_z от координаты z при $r=\mathrm{const}$ как в случае удара стаканом (кривые *1*, *3*), так и в случае удара цилиндром (кривые *2*, *4*). Здесь линии со штрихами соответствуют значению $r=0{,}33$, без штрихов – $r=0{,}59$. Из этой фигуры также следует, что величина растягивающих напряжений ($\sigma_z>0$) при ударе стаканом меньше, чем при ударе цилиндром, а также ширина области, в которой действуют растягивающие напряжения, «уже».

На фиг. 6 показаны зависимости компоненты скорости v_z от r при $z=1{,}1h$ при ударе цилиндром (кривая *2*) и ударе стаканом (кривая *1*). Сопоставляя эти зависимости с зависимостями на фиг. 4, следует обратить внимание на тот факт, что при ударе стаканом напряжения σ_z получаются меньше, чем при ударе цилиндром, а скорости v_z, наоборот, при ударе стаканом больше, чем при ударе цилиндром.

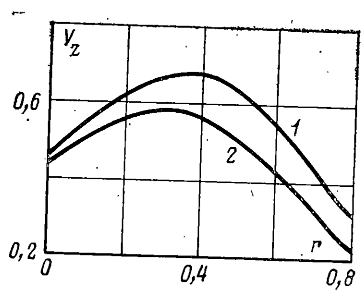
Откольные разрушения, как правило, приводят либо к отслаиванию, либо к отрыву центральной части мишени. Расстояние от тыльной поверхности мишени до области, где происходит разрушение, приблизительно равно толщине ударника, т. е. в тех точках мишени, где раньше всего возникают интенсивные растягивающие напряжения. Кривые на фиг. 4–6 дают представление о распределении скоростей и характере напряженного состояния среды в те моменты времени и в той области, где формируется откольное разрушение. Как видно из фигур, это состояние довольно сложное, хотя на свободной поверхности мишени $z=0$ может оказаться, что с достаточной степенью точности скорости примерно постоянны на некотором отрезке $0\leqslant r\leqslant r_0$ $(z=0)$.



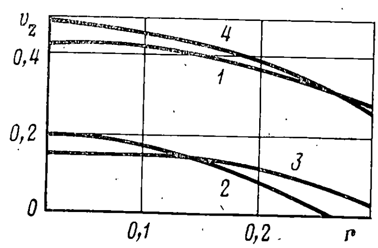
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Эти заключения подтверждаются результатами расчетов. Расчеты показывают, что при ударе стаканом на свободной поверхности мишени в течение короткого интервала времени скорость v_z постоянна на отрезке $0 \leqslant r \leqslant 0{,}3R_2$, R_2 – радиус мишени. Это видно из фиг. 7, где линия *3* показывает зависимость v_z от r при $t=1{,}2$ при ударе стаканом. Аналогично кривая *1* показывает зависимость v_z от r при ударе цилиндром.

В последующие моменты времени картина изменяется. На фиг. 7 показаны зависимости v_z от r на свободной поверхности мишени в момент времени $t=1{,}4$; кривая *2* соответствует удару цилиндром, кривая *4* – стаканом. Из фигуры видно, что кривые *2*, *4* с достаточной степенью точности можно считать параллельными и теперь на этих кривых только приближенно можно выделить отрезок, на котором скорость v_z примерно постоянна.

Таким образом, расчеты подтверждают, что при экспериментальном исследовании откольных явлений более целесообразно использовать ударник в форме стакана, так как в этом случае на тыльной поверхности мишени около оси симметрии распределение скоростей близко к распределению скоростей в плоской волне.

Автор выражает благодарность Н. А. Златину и Н. В. Зволинскому за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Златин Н. А., Мочалов С. М., Пугачев Г. С., Брагов А. М.* Временные закономерности процесса разрушения металлов при интенсивных нагрузках.– Физ. твердого тела, 1974, т. 16, № 6, с. 1752–1755.
2. *Златин Н. А., Пугачев Г. С., Мочалов С. М., Брагов А. М.* Временная зависимость прочности металлов при долговечностях микросекундного диапазона.– Физика твердого тела, 1975, т. 17, № 9, с. 2599–2602.
3. *Воловец Л. Д., Златин Н. А., Пугачев Г. С.* О возможности экспериментального изучения кинетики разрушения полиметилметакрилата при интенсивных нагрузках микросекундной длительности.– Письма в ЖТФ, 1978, т. 4, вып. 8, с. 451–455.

4. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
5. *Глушко А. И.* Численное исследование полей напряжений при соударении цилиндров.– Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 104–112.

Москва

Поступила в редакцию 6.IX.1983

УДК 539.3

ОДНА ПЛОСКАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ДОБОРДЖГИНИДЗЕ Л. Г.

В условиях плоской деформации рассматривается упругопластическая задача определения в бесконечном теле из нелинейно-упругого материала гармонического вида равнопрочного контура отверстия [1, 2]. Предполагается, что в момент зарождения пластическая область охватывает весь контур отверстия, не проникая в глубь тела [3]. Задача решена на основании комплексных представлений полей упругих элементов для гармонической упругой среды через две аналитические в рассматриваемой физической области функции. Искомые контуры определены в виде семейства подобных эллипсов. Для линейного, классического случая эта задача решена в [2]. В публикуемой работе задача рассматривается в нелинейной постановке.

1. Пусть упругий материал занимает плоскость переменной $z=x+iy$ с криволинейным отверстием (произвольной формы). К контуру L этого отверстия приложены постоянные нормальное давление и касательное напряжение $\sigma_n=p_0$, $\tau_n=\tau_0$, а на бесконечности среда подвергается двухосному растяжению вдоль координатных осей [4]: $X_x^{(\infty)}=N_1$, $Y_y^{(\infty)}=N_2$, $X_y^{(\infty)}=0$.

Под действием этих усилий на контуре L возникает пластический пояс (слой нулевой толщины), в области которого среда находится в состоянии идеальной пластичности, характеризуемой условием (постоянная k – предел текучести при чистом сдвиге) [5]:

$$(X_x-Y_y)^2+4X_y^2=4k^2 \tag{1.1}$$

Из (1.1) следует, что во всех точках искомого контура L должно быть

$$\sigma_t=p_0\pm2\sqrt{k^2-\tau_0^2} \tag{1.2}$$

где σ_t – искомое тангенциальное нормальное напряжение. Знак перед радикалом выбирается из физических соображений [2].

В принятой постановке требуется найти форму и расположение контура L таким, чтобы во всех его точках напряжение σ_t, определяемое соотношением (1.2), было постоянным.

Для решения задачи воспользуемся комплексными представлениями полей напряжений и деформаций гармонического нелинейно-упругого материала через две аналитические в рассматриваемой физической области S функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ [6]:

$$X_x+Y_y+4\mu=\frac{\lambda+2\mu}{\sqrt{J}}q\Omega(q),\qquad Y_y-X_x-2iX_y=-\frac{4(\lambda+2\mu)}{\sqrt{J}}\frac{\Omega(q)}{q}\frac{\partial z^*}{\partial z}\frac{\partial z^*}{\partial \bar z} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial z}=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\varphi'^2(z)+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\varphi'(z)}{\overline{\varphi'(z)}},\qquad q=2\left|\frac{\partial z^*}{\partial z}\right|,\qquad \Omega(q)=q-\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$$

$$\sqrt{J}=\left|\frac{\partial z^*}{\partial z}\right|^2-\left|\frac{\partial \bar z^*}{\partial z}\right|^2,\qquad \frac{\partial z^*}{\partial z}=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\varphi(z)\overline{\varphi''(z)}}{\overline{\varphi'^2(z)}}-\overline{\psi'(z)}\right] \tag{1.4}$$

где λ, μ – упругие постоянные Ламе, $z^*=x^*+iy^*$ – комплексная координата в деформированной области. Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ при больших $|z|$ имеют представления

$$\varphi(z)=a_0z+O(z^{-1}),\quad \psi(z)=b_0z+O(z^{-1}) \tag{1.5}$$

$$a_0=\left[\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{2\mu(N_1+N_2)+N_1N_2+4\mu^2}{\lambda(N_1+N_2)-N_1N_2+4\mu(\lambda+\mu)}\right]^{1/2}\qquad b_0=\frac{(\lambda+2\mu)(N_1-N_2)}{\lambda(N_1+N_2)-N_1N_2+4\mu(\lambda+\mu)} \tag{1.6}$$