МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1985

УДК 624.07:534.1

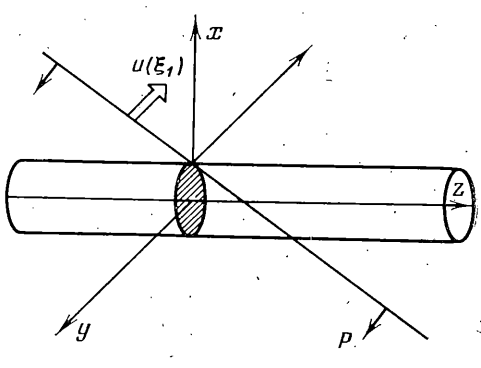
СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГОЙ ВОЛНЫ

НИКИТИН И. С.

В работе решается задача о динамическом изгибе цилиндрического стержня, гладко вставленного в окружающую упругую среду, под действием стационарной наклонно падающей продольной или поперечной (докритический режим) волны.

1. Рассматривается следующая задача динамической теории упругости: на бесконечный деформируемый цилиндрический стержень радиуса R, ось которого в декартовой системе координат x, y, z' совпадает с осью z', гладко вставленный в окружающее его упругое пространство, падает плоская продольная упругая волна. Нормаль к фронту волны параллельна плоскости x, z', угол между осью z' и фронтом волны равен α (фиг. 1). Параметры окружающего пространства – модули Ламе λ и μ, плотность ρ_0, скорость продольных и поперечных волн a и b – связаны формулами $\mu=\rho_0 b^2$, $\lambda+2\mu=\rho_0 a^2$. Материал стержня задан модулем Юнга E и плотностью ρ. Кажущаяся скорость следа фронта по поверхности цилиндра $c=a/\sin\alpha$. Введем также обозначения $\lambda_1=\sqrt{c^2/a^2-1}=\operatorname{ctg}\alpha$, $\lambda_2=\sqrt{c^2/b^2-1}=$ $=\operatorname{ctg}\beta$.

Считаем, что под действием падающей волны цилиндрический стержень испытывает поперечный изгиб в направлении оси x, описываемый уравнением Бернулли – Эйлера, величина прогиба $U(z', t)$ подлежит определению. Для решения задачи перейдем в стационарную подвижную систему координат $z=z'+ct$, тогда величина прогиба $U(z', t)$ будет функцией только z. Профиль падающей волны зададим ее продольным потенциалом $\Phi_0(\xi_1)$, где $\xi_1=z+\lambda_1 x-\lambda_1$, или нормальным смещением в волне $u_0(\xi_1)=\sqrt{1+\lambda_1^2}\cdot$ $\cdot\partial\Phi_0/\partial\xi_1$. Введем полярную систему координат r, ϑ, z, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\vartheta=\operatorname{arctg}(y/x)$.



Фиг. 1

Поведение внешнего упругого пространства будем описывать скалярным продольным потенциалом φ и векторным поперечным потенциалом $\psi=(\psi_r, \psi_\vartheta, \psi_z)$, вектором смещений $u=(u_r, u_\vartheta, u_z)=\operatorname{grad}\varphi+$ $+\operatorname{rot}\psi$ и напряжениями σ_{rr}, $\sigma_{\vartheta\vartheta}$, σ_{zz}, $\tau_{r\vartheta}$, τ_{rz}, связанными со смещениями законом Гука. Все напряжения обезразмерим на μ, линейные величины – на R, а скорости – на b.

Требуется, считая заданным потенциал падающей волны $\Phi_0(\xi_1)$ (или нормальное к фронту волны смещение $u_0(\xi_1)$), определить величину $U(z)$ из системы, состоящей из уравнения для поперечного изгиба цилиндра и волновых уравнений для потенциалов

$$E\partial^4 U/\partial z^4+4\rho(1+\lambda_2^2)\partial^2 U/\partial z^2=4F(z,U)/\pi \tag{1.1}$$

$$F(z,U)=\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_{rr}\cos\vartheta\, d\vartheta\,|_{r=1},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2}-\lambda_1^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_r}{\partial\vartheta^2}-\frac{\psi_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi_\vartheta}{\partial\vartheta}-\lambda_2^2\frac{\partial^2\psi_r}{\partial z^2}=0\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_\vartheta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_\vartheta}{\partial\vartheta^2}-\frac{\psi_\vartheta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi_r}{\partial\vartheta}-\lambda_2^2\frac{\partial^2\psi_\vartheta}{\partial z^2}=0\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial\vartheta^2}-\lambda_2^2\frac{\partial^2\psi_z}{\partial z^2}=0\end{gathered} \tag{1.2}$$

Дополнительное условие на векторный поперечный потенциал

$$\operatorname{div}\psi=\frac{1}{r}\frac{\partial(r\psi_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\vartheta}{\partial\vartheta}+\frac{\partial\psi_z}{\partial z}=0 \tag{1.3}$$

Граничные условия при $r=1$ следующие:

$$\tau_{r\vartheta}=\tau_{rz}=0,\qquad u_r=U(z)\cos\vartheta \tag{1.4}$$

Кроме того, решения системы волновых уравнений (1.2) должны удовлетворять условиям излучения при $r\to\infty$, т. е. их образы Фурье φ^*, ψ_r^*, ψ_θ^*, ψ_z^* должны вести себя как $\varphi^*\underset{r\to\infty}{\sim}\exp(i\lambda_1\omega r)/\sqrt{r}$, $\psi^*_{r,\theta,z}\sim\exp(i\lambda_2\omega r)/\sqrt{r}$.

Величина $F(U, z)$ представляет собой распределенную погонную поперечную силу, действующую на стержень со стороны окружающего пространства.

Приведем также выражения величин u_r, $\tau_{r\theta}$, τ_{rz}, σ_{rr} через потенциалы φ и ψ [1]:

$$u_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial\vartheta}-\frac{\partial\psi_\vartheta}{\partial z}$$

$$\tau_{r\vartheta}=2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)+r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial z}-\frac{\partial\psi_z}{\partial r}\right)\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial\vartheta^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\vartheta}{\partial\vartheta\,\partial z} \tag{1.5}$$

$$\sigma_{rr}=\lambda\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]+2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial\vartheta}-\frac{\partial\psi_\vartheta}{\partial z}\right)\right]$$

Представим входящую в уравнение (1.1) распределенную силу в виде $F(U, z)=F_0(z)+F_1(z)+F_2(U, z)$ и соответственно разобьем всю задачу определения $U(z)$ на три подзадачи для $F_0(z)$, $F_1(z)$ и $F_2(U, z)$ и последующего решения уравнения (1.1).

Поперечная сила $F_0(z)$, действующая на стержень и обусловленная падающей волной, вычисляется по потенциалу $\Phi_0(\xi_1)$:

$$F_0(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_{rr}^0\cos\vartheta\, d\vartheta\,|_{r=1} \tag{1.6}$$

$$\sigma_{rr}^0=\lambda\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2}\right]+2\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2}$$

Поперечная сила $F_1(z)$, обусловленная отраженной волной, имеет вид

$$F_1(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_{rr}{}^1\cos\vartheta\, d\vartheta\,|_{r=1}$$

Находится из решения системы (1.2) с условием (1.3) при нулевых начальных условиях при $z=0$ и граничных условиях при $r=1$ и $z>0$:

$$\tau_{r\theta}=-2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\vartheta}\right),\qquad \tau_{rz}=-2\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z\,\partial r},\qquad u_r=-\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\tag{1.7}$$

и условиях излучения при $r\to\infty$.

Поперечная сила, обусловленная волной, излученной цилиндром при его изгибном смешении $U(z)$ (неизвестном и подлежащем определению):

$$F_2(U,z)=\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_{rr}{}^2\cos\vartheta\, d\vartheta\,|_{r=1}$$

находится из решения системы (1.2) с условием (1.3) и с граничными условиями при $-\infty<z<\infty$ и $r=1$:

$$\tau_{r\vartheta}=\tau_{rz}=0,\qquad u_r=U(z)\cos\vartheta\tag{1.8}$$

и условиями излучения при $r\to\infty$.

С учетом симметрии задачи по ϑ потенциал $\Phi_0(\xi_1)$ и напряжение σ_{rr}, входящее в правую часть уравнения (1.1), могут быть представлены в виде рядов $\Phi_0=\sum\varphi_n(z,r)\cos n\vartheta$ и $\sigma_{rr}=\sum s_n(U,z,r)\cos n\vartheta$ $(n=0,1\ldots)$, причем каждый член второго ряда s_n определяется в конечном итоге соответствующим членом ряда для потенциала падающей волны φ_n.

В силу ортогональности тригонометрических функций распределенная сила $F(z)$ в правой части уравнения (1.1) равна

$$F(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_{rr}\cos\vartheta\, d\vartheta=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}s_n\cos n\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta=\pi s_1$$

Поэтому для определения прогиба из уравнения (1.1) достаточно выделить из бесконечного ряда для потенциала падающей волны единственный член $\varphi_1\cos\vartheta$.

Произведем интегральное преобразование Фурье всех уравнений и условий задачи по z с параметром преобразования ω. Поскольку заранее неизвестно поведение искомых функций при $z\to\infty$, преобразование Фурье будем понимать как обобщенное преобразование функций медленного роста [2]. Преобразованные функции обозначим тем же символом, что и исходные, но с верхним индексом $*$.

Используя формулу для производящей функции [3], представим преобразованный потенциал падающей волны $\Phi_0{}^*(\omega,r,\vartheta)$ в виде ряда (J_n — функция Бесселя n-го прядка):

$$\Phi_0{}^*(\omega,r,\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n{}^*(\omega,r)\cos n\vartheta=$$

$$=\Phi^*(\omega)\exp(i\omega_1)\left[J_0(\omega_1 r)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^nJ_n(\omega_1 r)\cos n\vartheta\right]$$

$$\omega_1=\lambda_1\omega,\qquad \omega_2=\lambda_2\omega$$

Спектральную функцию потенциала падающей волны, так же как и смещение в ней, считаем известной

$$\Phi^*(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi_0(\xi)e^{i\omega\xi}d\xi, \qquad u^*(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_0(\xi)e^{i\omega\xi}d\xi=-i\omega\sqrt{1+\lambda_1^2}\,\Phi^*(\omega)$$

Таким образом, необходимый для решения задачи первый член разложения потенциала падающей волны в преобразованном пространстве равен

$$\varphi_1^*(\omega,r)=\frac{2J_1(\omega_1 r)}{(1+\lambda_1^2)^{1/2}\omega}e^{i\omega_1}u^*(\omega)$$

В дальнейшем под потенциалом падающей волны будем понимать только этот единственный член разложения, поскольку другие на поведение искомой функции $U(z)$ влияния не оказывают.

Выпишем выражение для $F_0^*(\omega)$ с учетом (1.6):

$$F_0^*(\omega)=f_0^p(\omega)u^*(\omega)$$

$$f^p=\frac{4\pi\exp(i\omega_1)}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\omega}\left\{-\omega_1J_0(\omega_1)+\left[2-\omega_1^2-\lambda\frac{1+\lambda_1^2}{2}\omega^2\right]J_1(\omega_1)\right\}$$

Для определения $F_1^*(\omega)$ и $F_2^*(U,\omega)$ надо знать решение преобразованной системы (1.2) для потенциалов φ^*, ψ_r^*, ψ_ϑ^* и ψ_z^*. Для решения задачи необходимы только первые члены ряда по $\cos n\vartheta$ (в которые разлагаются симметричные по ϑ функции φ и ψ_ϑ) и ряда по $\sin n\vartheta$ (в который разлагаются антисимметричные по ϑ функции ψ_r и ψ_z), которые с учетом условий излучения имеют вид

$$\begin{gathered}\varphi^*=C_1H_1^{(1)}(\omega_1 r)\cos\vartheta, \qquad \psi_r^*=[C_2H_0^{(1)}(\omega_2 r)+C_3H_2^{(1)}(\omega_2 r)]\sin\vartheta \\ \psi_\vartheta^*=[C_2H_0^{(1)}(\omega_2 r)-C_3H_2^{(1)}(\omega_2 r)]\cos\vartheta, \qquad \psi_z^*=C_4H_1^{(1)}(\omega_2 r)\sin\vartheta\end{gathered} \tag{1.9}$$

где $H_n^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода n-го порядка.

Коэффициент C_4 исключается с помощью условия (1.3) $C_4=i\lambda_2(C_2-C_3)$, неизвестные коэффициенты C_1, C_2 и C_3 находятся из преобразованных граничных условий (1.7) при определении $F_1^*(\omega)$ или (1.8) при определении $F_2^*(U,\omega)$.

Граничные условия (1.7) дают следующую систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\|A\|\begin{pmatrix}C_1\\ iC_2\\ iC_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}u^*(\omega) \tag{1.10}$$

Граничные условия (1.8) дают систему

$$\|A\|\begin{pmatrix}C_1\\ iC_2\\ iC_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{pmatrix}U^*(\omega) \tag{1.11}$$

где матрица $\|A\|=\{a_{ij}\}$ такая:

$$a_{11}=2\omega_1H_0^{(1)}(\omega_1)-2H_1^{(1)}(\omega_1), \qquad a_{12}=2\omega H_0^{(1)}(\omega_2)-2\lambda_2H_1^{(1)}(\omega_2)$$

$$a_{13}=-2\omega H_2^{(1)}(\omega_2)-2\lambda_2H_1^{(1)}(\omega_2), \qquad a_{21}=4H_1^{(1)}(\omega_1)-2\omega_1H_0^{(1)}(\omega_1)$$

$$a_{22}=2\lambda_2\omega_2H_0^{(1)}(\omega_2)+\lambda_2[(1+\lambda_2^2)\omega^2-4]H_1^{(1)}(\omega_2)$$

$$a_{23}=4\omega H_2^{(1)}(\omega_2)-\lambda_2\omega_2H_0^{(1)}(\omega_2)-\lambda_2[(1+\lambda_2^2)\omega^2-4]H_1^{(1)}(\omega_2)$$

$$a_{32}=2\lambda_2 H_1^{(1)}(\omega_2)+\omega(1-\lambda_2^2)H_0^{(1)}(\omega_2)$$

$$a_{33}=-\omega H_2^{(1)}(\omega_2)-\lambda_2\omega_2 H_0^{(1)}(\omega_2), \qquad a_{31}=a_{11}$$

а векторы-столбцы в правой части (1.10) и (1.11) равны

$$b_1=b_3=-4\frac{\omega_1 J_0(\omega_1)-J_1(\omega_1)}{\omega}\exp(i\omega_1)$$

$$b_2=-4\frac{2J_1(\omega_1)-\omega_1 J_0(\omega_1)}{\omega}\exp(i\omega_1), \qquad d_1=2, \qquad d_2=d_3=0$$

Опустим чрезвычайно громоздкие выражения для коэффициентов C_1, C_2 и C_3 из систем (1.10) и (1.11) (будем далее считать их известными). Выражения для F_1^* и F_2^* получим из решения (1.9) и (1.5) для σ_{rr}:

$$\begin{gathered}F_{1,2}^{*}(\omega)=2\pi\Big\{C_1\Big[-\omega_1 H_0^{(1)}(\omega_1)+\Big(2-\omega_1^2-\lambda\frac{1+\lambda_1^2}{2}\omega^2\Big)H_1^{(1)}(\omega_1)\Big]+\\ +iC_2[\lambda_2\omega_2 H_0^{(1)}(\omega_2)-\lambda_2(2+\omega^2)H_1^{(1)}(\omega_2)]-iC_3[\lambda_2\omega_2 H_0^{(1)}(\omega_2)-\\ -\lambda_2(2-\omega^2)H_1^{(1)}(\omega_2)-2\omega H_2^{(1)}(\omega_2)]\Big\}\end{gathered} \tag{1.12}$$

Таким образом, выражения для F_1^* и F_2^* имеют вид

$$F_1^*(\omega)=f_1^p(\omega)u^*(\omega)$$

$$F_2^*(U,\omega)=f_2(\omega)U^*(\omega)$$

где f_1^p и f_2 — известные комплексные функции ω.

Преобразованное уравнение (1.1) теперь записывается в виде

$$E\omega^4 U^*-4\rho(1+\lambda_2^2)U^*-4f_2U^*/\pi=4(f_0^p+f_1^p)u^*/\pi$$

Отсюда получаем

$$U^*(\omega)=U_0^{p*}(\omega)u^*(\omega), \qquad U_0^{p*}=\frac{4}{\pi}\frac{(f_0^p(\omega)+f_1^p(\omega))}{(E\omega^4-4\rho(1+\lambda_2^2)\omega^2-4f_2/\pi)} \tag{1.13}$$

где $U_0^{p*}(\omega)$ — фиксированная функция при заданных константах материалов E, λ, μ, ρ и ρ_0 и угле падения волны α, не зависящая от формы падающей волны. Ее асимптотическое поведение таково:

$$U_0^{p*}(\omega)\underset{\omega\to 0}{\sim}\lambda_1/\sqrt{1+\lambda_1^2}=\cos\alpha, \qquad U_0^{p*}(\omega)\underset{\omega\to\infty}{\sim}O(1/\omega^{5/2}).$$

Заметим, что из предельной формулы при $\omega\to 0$ следует, что в длинноволновом приближении $U(z)=u_0(z)\cos\alpha=u_x(z)$, т. е. прогиб цилиндра совпадает со смещением в волне в направлении оси x (хотя в направлении z имеет место проскальзывание — смещение цилиндра и среды не совпадают).

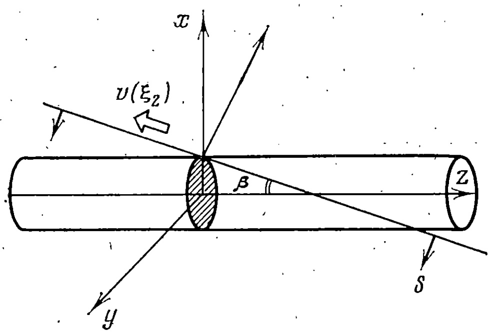
Окончательное решение можно представить в виде свертки

$$U(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}U_0^p(z-\xi)u_0(\xi)\,d\xi \tag{1.14}$$

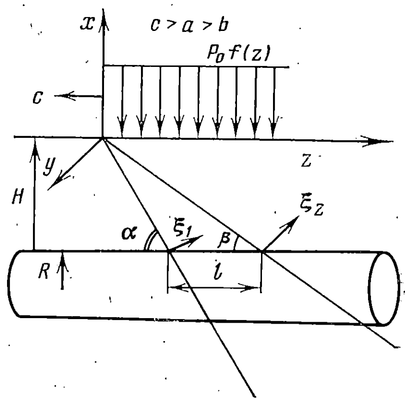
$U_0^p(\xi)$ — обратное преобразование Фурье функции $U_0^{p*}(\omega)$.

$$U_0^p(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}U_0^{p*}(\omega)\exp(-i\omega\xi)\,d\omega$$

2. Аналогично в подвижной системе координат x, y, $z=z'+ct$ $(c=b/\sin\beta)$ решается задача об изгибе цилиндрического стержня под действием па-



Фиг. 2



Фиг. 3

дающей под углом β поперечной волны. В этом случае падающая волна задается поперечным потенциалом $\psi_y{}^0(\xi_2)=\Psi_0(\xi_2)$, $\psi_x{}^0=\psi_z{}^0=0$ или смещением в ней $v_0(\xi_2)=\sqrt{1+\lambda_2{}^2}\partial\Psi_0(\xi_2)/\partial\xi_2$ (фиг. 2), где $\xi_2=z+\lambda_2x-\lambda_2$, или в полярной системе координат, которая используется при решении задачи $\psi_r{}^0=\Psi_0(\xi_2)\sin\vartheta$, $\psi_\vartheta{}^0=\Psi_0(\xi_2)\cos\vartheta$, $\psi_z{}^0=0$.

Рассмотрим только случай докритического падения поперечной волны $c>a>b$ (параметры λ_1 и λ_2 действительны). Отсюда получается ограничение на угол β: $\sin\beta\leqslant b/a$.

При заданной падающей волне надо решить систему (1.1) и (1.2) при дополнительном условии (1.3) с граничными условиями (1.4) и условиями излучения при $r\to\infty$. Искомой, как и раньше, является величина прогиба стержня $U(z)$. Распределенную силу $F(U, z)$, входящую в уравнение (1.1), в этом случае также можно представить в виде $F(U, z)=F_0(z)+F_1(z)+F_2(U, z)$, где составляющие F_0, F_1 и F_2 имеют тот же смысл, что и в задаче с падающей продольной волной. F_0 вычисляется по потенциалу падающей волны

$$F_0(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_{rr}{}^0\cos\vartheta\, d\vartheta\,|_{r=1},\qquad \sigma_{rr}{}^0=2\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\partial\psi_\vartheta{}^0}{\partial z}\right) \tag{2.1}$$

F_1 находится из решения системы (1.2) с условием (1.3) при нулевых начальных условиях при $z=0$ и граничных условиях при $r=1$ и $z>0$:

$$u_r=\frac{\partial\psi_\vartheta{}^0}{\partial z},\qquad \tau_{r\vartheta}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_\vartheta{}^0}{\partial\vartheta\,\partial z}-r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r{}^0}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{rz}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r{}^0}{\partial\vartheta}\right)+\frac{\partial^2\psi_\vartheta{}^0}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi_\vartheta{}^0}{r}\right)-\frac{\partial^2\psi_\vartheta{}^0}{\partial r^2} \tag{2.2}$$

а $F_2(U, z)$ находится так же, как и в задаче с падающей продольной волной.

В пространстве преобразования Фурье поперечные потенциалы падающей волны $\psi_r{}^0$ и $\psi_\vartheta{}^0$ представляются в виде рядов

$$\psi_r{}^{0*}=\Psi^*(\omega)\exp(\omega_2)\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^{n-1}[J_{n-1}(\omega_2r)+J_{n+1}(\omega_2r)]\sin n\vartheta$$

$$\psi_\vartheta{}^{0*}=\Psi^*(\omega)\exp(\omega_2)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^{n-1}[J_{n-1}(\omega_2r)-J_{n+1}(\omega_2r)]\cos n\vartheta-iJ_1(\omega_2r)\right\}$$

где спектральная функция потенциала $\psi_y{}^0$ падающей волны $\Psi^*(\omega)$ считается известной, так же как и смещения в ней

$$\Psi^*(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi_0(\xi)e^{i\omega\xi}d\xi,\qquad v^*(\omega)=\sqrt{1+\lambda_2^2}\,i\omega\Psi^*(\omega)$$

Для решения задачи вновь необходимы только первые члены разложений потенциалов ψ_r^0 и ψ_ϑ^0:

$$\psi_r^{1*}=\Psi^*(\omega)\exp(i\omega_2)\,[J_0(\omega_2 r)+J_2(\omega_2 r)]$$

$$\psi_\vartheta^{1*}=\Psi^*(\omega)\exp(i\omega_2)\,[J_0(\omega_2 r)-J_2(\omega_2 r)]$$

Выражение для $F_0^*(\omega)$ в этом случае получаем из (2.1):

$$F_0^*(\omega)=f_0^s(\omega)v^*(\omega),\qquad f_0^s=\frac{4\pi\exp(i\omega_2)}{\sqrt{1+\lambda_2^2}}\,[J_2(\omega_2)-\omega_2 J_1(\omega_2)]$$

Для определения $F_1^*(\omega)$ используем решение (1.9) с неизвестными коэффициентами C_1, C_2 и C_3, которые находим с помощью граничных условий (2.2) из системы

$$\|A\|\begin{pmatrix}C_1\\ iC_2\\ iC_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\\ e_3\end{pmatrix}v^*(\omega)\qquad(2.3)$$

$$e_1=\frac{2\exp(\omega_2)}{\sqrt{1+\lambda_2^2}}\,[J_0(\omega_2)-J_2(\omega_2)],\qquad e_2=\frac{4\exp(i\omega_2)}{\sqrt{1+\lambda_2^2}}\,J_2(\omega_2)$$

$$e_3=\frac{(1-\lambda_2^2)\exp(i\omega_2)}{\sqrt{1+\lambda_2^2}}\,[J_0(\omega_2)-J_2(\omega_2)]$$

Громоздкие выражения для C_1, C_2 и C_3 из системы (2.3) не выписываем. Подставляя их в (1.12), получаем $F_1^*(\omega)=f_1^s(\omega)v^*(\omega)$.

Из преобразованного уравнения (1.1) окончательно получаем

$$U^*(\omega)=U_0^{s*}(\omega)v^*(\omega),\qquad U_0^{s*}=\frac{4}{\pi}\,\frac{(f_0^s+f_1^s)}{(E\omega^4-4\rho(1+\lambda_2^2)\omega^2-4f_2/\pi)}\qquad(2.4)$$

Асимптотическое поведение $U_0^{s*}(\omega)$ следующее:

$$U_0^{s*}(\omega)\underset{\omega\to0}{\sim}1/\sqrt{1+\lambda_2^2}=\sin\beta,\qquad U_0^{s*}(\omega)\underset{\omega\to\infty}{\sim}O(1/\omega^{5/2}).$$

И в этом случае в длинноволновом приближении ($\omega\to0$) $U(z)\sim$ $\sim v_0(z)\sin\beta=v_x(z)$, т. е. прогиб стержня совпадает со смещением в волне в направлении x. Окончательное решение представляется в виде свертки

$$U(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}U_0^s(z-\xi)v_0(\xi)\,d\xi\qquad(2.5)$$

Таким образом, для решения задачи об изгибе цилиндрического стержня под действием продольной или поперечной волн необходимо произвести обратное преобразование Фурье функций $U_0^{p*}(\omega)$ и $U_0^{s*}(\omega)$ и сосчитать интеграл свертки (1.14) или (2.5) с заданными функциями $u_0(\xi_1)$ или $v_0(\xi_2)$.

3. Решим следующую задачу: в упругое полупространство, занимающее в декартовой системе координат x, y, z' область $x\leqslant0$, на глубине H гладко вставлен бесконечный деформируемый цилиндрический стержень с модулем Юнга E радиуса R, ось которого параллельна оси z'. По поверхности полупространства параллельно оси цилиндра с постоянной

скоростью $c>a>b$ движется нормальная нагрузка $\sigma_{xx}(z)=P_0 f(z)$, где $z=z'+ct$, P_0 — амплитуда, $f(z)$ — форма подвижной нагрузки (фиг. 3).

Пользуясь полученными решениями, определим изгиб стержня под действием плоских продольных и поперечных волн, идущих от поверхности полупространства, пренебрегая волнами, отраженными от его поверхности (это оправдано при $H\gg R$).

Пусть $\lambda_1=\sqrt{c^2/a^2-1}$, $\lambda_2=\sqrt{c^2/b^2-1}$, $\sin\alpha=a/c$, $\sin\beta=b/c$, где α и β — углы между фронтами волн и осью цилиндра. Выразим функции u_0 и v_0 (смещения в падающих волнах) через граничную нагрузки $P_0 f(z)$.

Используя результаты [4], имеем

$$u_0(\xi_1)=P_0\frac{\gamma\sqrt{1+\lambda_1^2}}{\Lambda}\int_0^{\xi_1} f(\xi)\,d\xi,\qquad v_0(\xi_2)=P_0\frac{2\lambda_1\sqrt{1+\lambda_2^2}}{\Delta}\int_0^{\xi_2} f(\xi)\,d\xi$$

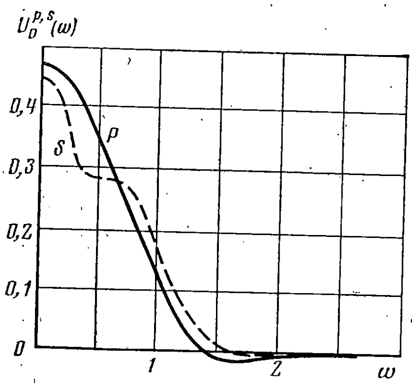
$$\gamma=\lambda_2^2-1,\qquad \Delta=\gamma^2+4\lambda_1\lambda_2 \tag{3.1}$$

Суммарный изгиб стержня под действием обеих волн в силу линейности задачи получается сложением изгиба под действием продольной волны с изгибом под действием поперечной волны со сдвигом по оси z на расстояние $l=H(\lambda_2-\lambda_1)$ (фиг. 3).

4. Опишем процедуру численного решения задачи об изгибе цилиндрического стержня под действием продольной и поперечной волн. Комплексные функции $U_0^{p*}(\omega)$ и $U_0^{s*}(\omega)$ вычислялись по конечным формулам (1.13) и (2.4). Обратное преобразование производилось численным интегрированием на конечном интервале $(0, \omega_0)$:

$$U_0(z)=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\omega_0}\operatorname{Re}U_0^*(\omega)\cos\omega z\,d\omega+\int_0^{\omega_0}\operatorname{Im}U_0^*(\omega)\sin\omega z\,d\omega\right]$$

по квадратурным формулам для интегрирования осциллирующих функций [5]. В расчетах $\omega_0=10$ и число точек разбиения при численном интегрировании $N=300$. Свертки (1.14) и (2.5) вычислялись по формуле трапеций на конечном интервале $(0, z_0)$, $z_0=100$.



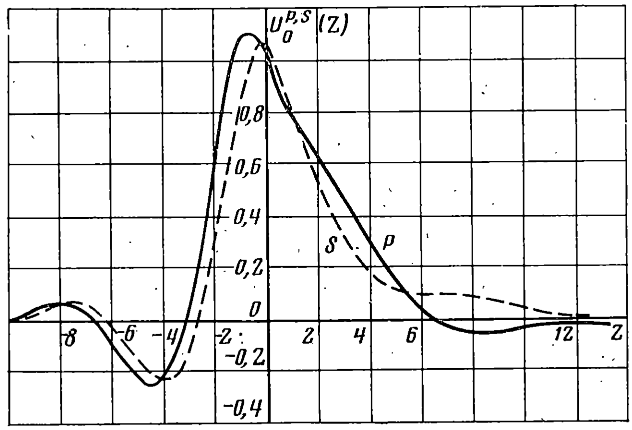
Фиг. 4

Приведем результаты расчетов. Форма падающих волн выбиралась согласно (3.1), где $P_0=1$, а $f(z)$ — треугольник единичной амплитуды со временем нарастания $\tau_1=2$ и временем убывания $\tau_2=2$, значения безразмерных параметров следующие $\lambda/\mu=2$, $\rho/\rho_0=1$.

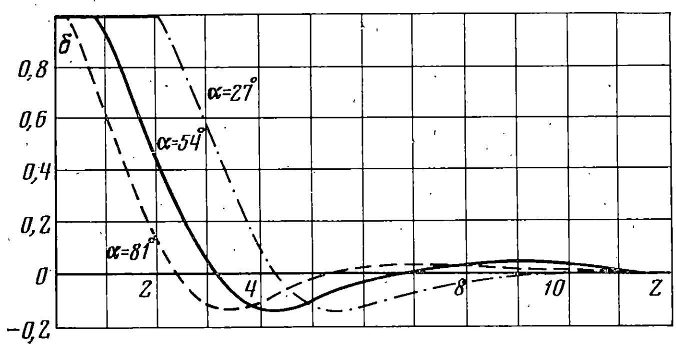
На фиг. 4 приведены характерные кривые $U_0^{p*}(\omega)$ (сплошная линия) и $U_0^{s*}(\omega)$ (штриховая), а на фиг. 5 — $U_0^p(z)$ и $U_0^s(z)$ для случая $\alpha=60°$, $\beta=24°$, $E/\mu=30$.

На фиг. 6—8 приведены кривые $\delta(z)$, характеризующие форму срединной линии изогнутого стержня под действием продольной или поперечной волн. Здесь $\delta(z)=(U(z)-u_x(z))/\sqrt{U^2+u_x^2}$, где $U(z)$ — поперечный прогиб стержня, $u_x(z)$ — смещение в направлении x точек, лежащих на оси z, в падающей волне $u_x(z)=u_0(\xi_1)\cos\alpha|_{x=0}$ для продольной волны, $u_x(z)=v_0(\xi_2)\sin\beta|_{x=0}$ для поперечной.

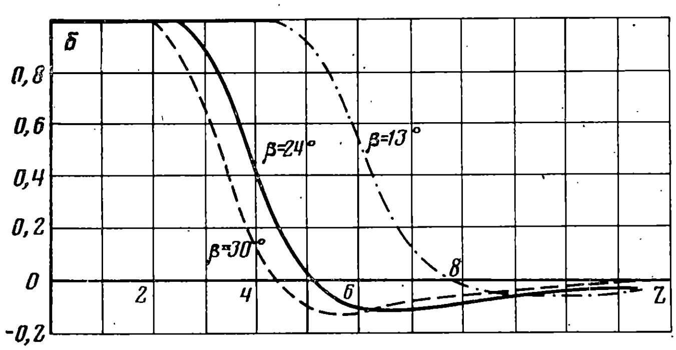
На фиг. 6 и 7 приведены кривые $\delta(z)$ при $E/\mu=30$ для трех различных значений угла падения продольной ($\alpha=27$, 54, 81°, фиг. 6) и поперечной волн ($\beta=13$, 24, 30°, фиг. 7). Как и следовало ожидать, все они с тече-



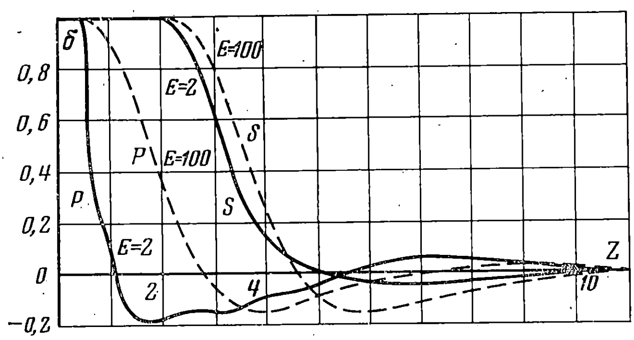
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

нием времени практически выходят на нуль (прогиб стержня выравнивается со смещением в волне в направлении оси x). Переходный процесс сходен для различных углов падения, если не считать запаздывания всей картины с уменьшением угла. Кроме того, в случае падения продольной волны добавляется дополнительное колебание стержня по сравнению с падением поперечной.

На фиг. 8 приведены кривые $\delta(z)$ при угле падения продольной волны $\alpha=60°$ (фиг. 8) и угле падения поперечной волны $\beta=24°$ (фиг. 9) для двух значений модуля Юнга стержня $E/\mu=2$ и $E/\mu=100$. Несмотря на большое различие в свойствах материала стержня, кривые прогиба отличаются не так сильно. Можно отметить, что при меньшем модуле Юнга происходит более резкий прогиб стержня и более быстрый его выход на предельное стационарное значение.

Полученное решение может быть использовано для вычисления добавочных напряжений, возникающих в окружающей среде или в самом цилиндре, из-за изгиба стержня по сравнению со случаем абсолютно недеформируемого цилиндра.

В заключение автор выражает признательность Н. В. Зволинскому за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука. 1976. 527 с.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.— Л.: Гостехиздат, 1951. 607 с.
4. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. Т. 1. М.: Наука, 1975. 631 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.III.1984