

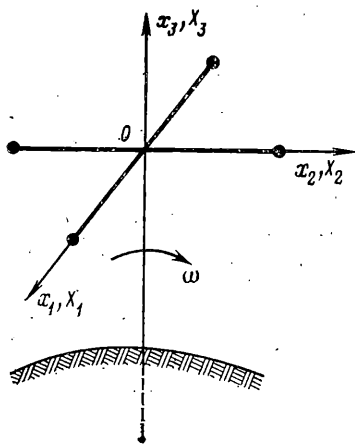
УДК 624.07:534.1

ДЕФОРМАЦИИ ПРОТЯЖЕННОЙ КРЕСТООБРАЗНОЙ КОНСТРУКЦИИ НА ОКОЛОЗЕМНОЙ ОРБИТЕ

ЛОМАЧЕНКО А. И.

В настоящее время интенсивно исследуются перспективы создания в околоземном космическом пространстве крупногабаритных конструкций, размеры которых могут достигать сотен и тысяч метров [1–3]. Подобные конструкции, обладая сравнительно малой конструктивной жесткостью, будут испытывать деформации, вызванные действием различных факторов космического полета. В частности, при больших размерах конструкции становится существенным влияние неоднородности гравитационного поля Земли. Деформации ряда простейших конструкций (упругая балка, упругая квадратная пластина), вызванные действием гравитационных сил на круговой околоземной орбите, найдены в [4]. В публикуемой работе исследуются деформации протяженной крестообразной конструкции, представляющей собой две взаимно перпендикулярные балки, жестко соединенные в середине. Предполагается, что конструкция ориентирована в плоскости местного горизонта.

1. Рассматривается крестообразная конструкция, представляющая собой две взаимно перпендикулярные упругие балки, жестко соединенные в середине, с закрепленными на концах балок грузами. Предполагается, что центр масс конструкции движется по круговой орбите, радиус которой много больше размеров конструкции, с постоянной угловой скоростью ω .



Фиг. 1

Для описания движения конструкции используются орбитальная $X_1X_2X_3$ и связанная $x_1x_2x_3$ прямоугольные системы координат (фиг. 1). Полюс орбитальной системы координат $X_1X_2X_3$ совпадает с центром масс деформированной конструкции, ось X_2 ориентирована вдоль вектора скорости движения точки O , направление оси X_3 совпадает с направлением радиус-вектора, проведенного из центра Земли к центру масс конструкции. Ось X_1 дополняет систему координат до правой. Оси связанной системы координат $x_1x_2x_3$ совмещены с главными центральными осями инерции деформированной конструкции.

Пусть конструкция ориентирована таким образом, что оси орбитальной и связанной систем координат совпадают, как показано на фиг. 1. Деформации балок изучаются линейной теорией тонких прямолинейных стержней. Упругие смещения принимаются малыми и направлены перпендикулярно плоскости x_1x_2 . Грузы на концах i -й балки считаются материальными точками одинаковой массы.

Введем следующие обозначения (нижний индекс i здесь и в дальнейшем означает принадлежность рассматриваемого параметра i -й балке ($i=1, 2$)): ρ_i — линейная плотность балки, E_i — модуль Юнга материала

балки, I_i — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси, проходящей через центр инерции сечения перпендикулярно плоскости изгиба, l_i — половина длины балки, M_i — масса каждой из материальных точек, расположенных на концах балки, $u(x_i)$ — прогиб балки, μ — гравитационная постоянная Земли, R — расстояние от центра Земли до центра масс конструкции.

Исследование проводится в орбитальной системе координат, в которой центр масс конструкции покоится. Элементы крестообразной конструкции подвержены действию распределенной объемной нагрузки, обусловленной совместным действием гравитационных сил и сил инерции.

Будем исследовать статическую деформацию конструкции. Тогда на элемент i -й балки с массой $dm = \rho_i dx_i$ будет действовать только гравитационная и центробежная силы $df = (\omega^2 r' - \mu r/r^3) dm$, где r — радиус-вектор элемента dm , проведенный из центра Земли, r' — составляющая вектора r в плоскости орбиты.

Линейная плотность действующей на балку поперечной нагрузки $q(x_i)$ задается выражением

$$q(x_i) = \rho_i [R + u(x_i)] \left\{ \omega^2 - \frac{\mu}{[(R + u(x_i))^2 + x_i^2]^{3/2}} \right\} \quad (1.1)$$

Далее деформации конструкции определяются при следующих допущениях:

$$\frac{u(x_i)}{l_i} = O\left(\frac{l_i}{R}\right), \quad m_i = \frac{M_i}{\rho_i l_i} = O(1), \quad \eta_i^4 = 3\omega^2 \frac{\rho_i l_i^4}{E_i I_i} = O(1) \quad (1.2)$$

В этом случае, сохраняя в (1.1) члены порядка l_i^2/R^2 , получим выражение

$$q(x_i) = \rho_i \left\{ \omega^2 R \left[1 + \frac{u(x_i)}{R} \right] - \frac{\mu}{R^2} \left[1 - 2 \frac{u(x_i)}{R} - \frac{3}{2} \frac{x_i^2}{R^2} \right] \right\}$$

Определим связь между ω и R . Для этого воспользуемся условием равновесия центра масс конструкции в орбитальной системе координат

$$\int_{-l_1}^{l_1} q(x_1) dx_1 + \int_{-l_2}^{l_2} q(x_2) dx_2 + \sum_{i=1}^2 M_i \left\{ \omega^2 R \left[2 + \frac{u(l_i) + u(-l_i)}{R} \right] - \frac{\mu}{R^2} \left[2 - 2 \frac{u(l_i) + u(-l_i)}{R} - 3 \frac{l_i^2}{R^2} \right] \right\} = 0$$

После соответствующих преобразований получим

$$\omega^2 = \frac{\mu}{R^3} \left(1 - 3\gamma \frac{l_1^2}{R^2} \right), \quad \gamma = \frac{1 + 3m_1 + (1 + 3m_2)\lambda^3 \rho_*}{6[1 + m_1 + (1 + m_2)\lambda \rho_*]}$$

$$\lambda = l_2/l_1, \quad \rho_* = \rho_2/\rho_1$$

Тогда выражение для поперечной нагрузки примет вид

$$q(x_i) = \frac{3\mu \rho_i}{R^2} \left[-\gamma \frac{l_i^2}{R^2} + \frac{x_i^2}{2R^2} + \frac{u(x_i)}{R} \right] \quad (1.3)$$

Кроме распределенной нагрузки на каждую из балок, рассматриваемых по отдельности, будет действовать сосредоточенная поперечная сила f_i , приложенная в точке соединения балок и характеризующая воздействие балок друг на друга. Сосредоточенная сила, действующая на одну из балок, может быть вычислена как главный вектор внешних сил, приложенных к другой балке, либо, в силу третьего закона Ньютона, как взятый с обрат-

ным знаком главный вектор внешних сил, приложенных к самой балке, т. е.

$$f_i = - \int_{-l_i}^{l_i} q(x_i) dx_i - \frac{3\mu M_i}{R^2} \left[\frac{l_i^2 - 2\gamma l_i^2}{R^2} + \frac{u(l_i) + u(-l_i)}{R} \right]$$

Уравнение прогиба элементов крестообразной конструкции запишем в виде ($\delta(x_i)$ — дельта-функция Дирака):

$$E_i I_i \frac{d^4 u(x_i)}{dx_i^4} = q(x_i) + f_i \delta(x_i) \quad (1.4)$$

Краевые условия, соответствующие закреплению на концах балок точечных грузов, задаются выражениями

$$d^2 u(\pm l_i) / dx_i^2 = 0 \quad (1.5)$$

$$E_i I_i \frac{d^3 u(\pm l_i)}{dx_i^3} = \mp \frac{3\mu M_i}{R^2} \left[\frac{1/2 l_i^2 - \gamma l_i^2}{R^2} + \frac{u(\pm l_i)}{R} \right]$$

Продольная составляющая действующих на элементы конструкции сил опускается. Известно, что продольной нагрузкой можно пренебречь, если выполняется условие $|P| \ll P_*$, где P_* — критическое значение продольной нагрузки, вызывающей потерю устойчивости по Эйлеру. Критическое значение P_* можно представить в виде [5] $P_* = \pi^2 EI / [\nu^2 (2l)^2]$, где ν — коэффициент, зависящий от краевых условий и способа нагружения. Для цели оценки положим $\nu = 1$.

Величина продольной нагрузки P_i для балки, лежащей в плоскости орбиты и перпендикулярной этой плоскости, имеют разное значение. Для балки, лежащей в плоскости орбиты, продольная нагрузка обусловлена действием гравитационной и центробежной сил. Используя найденное выражение для $q(x_i)$, получим

$$P_2 = \frac{3\mu}{R^5} \left[\int_0^{l_2} \rho_2 \left(\frac{x_2^2}{2} - \gamma l_2^2 \right) x_2 dx_2 + M_2 \left(\frac{l_2^2}{2} - \gamma l_2^2 \right) l_2 \right]$$

Для балки, перпендикулярной плоскости орбиты, продольная нагрузка связана только с гравитационной силой, поскольку проекция центробежной силы на ось x_1 равна нулю. С учетом этого выражение для P_1 запишем в виде

$$P_1 = \frac{\mu}{R^2} \left[\int_0^{l_1} \rho_1 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{x_1^2}{R^2} \right) \frac{x_1}{R} dx_1 + M_1 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{l_1^2}{R^2} \right) \frac{l_1}{R} \right]$$

После соответствующих преобразований условия, при которых продольной нагрузкой можно пренебречь, будут иметь вид

$$\eta_1^4 (1/2 + m_1) \ll 3/4 \pi^2$$

$$\eta_2^4 [-2\gamma(1+2m_2)l_1^2 + (1/2+2m_2)l_2^2] / R^2 \ll \pi^2$$

Сравнение полученных выражений с принятыми допущениями (1.2) показывает, что они накладывают более жесткие ограничения на величину η_1 , нежели допущения (1.2), требуя, чтобы выполнялось условие $\eta_1 \ll 1$.

2. Введем безразмерные переменные $u' = u(x_i)/l_i$, $x_i' = x_i/l_i$ (штрихи в дальнейшем будем опускать). Уравнение прогиба элементов крестообразной конструкции (1.4) примет вид

$$\frac{1}{\eta_i^4} \frac{d^4 u(x_i)}{dx_i^4} = u(x_i) - \gamma_i \frac{l_i}{R} + x_i^2 \frac{l_i}{2R} + f_i' \delta(x_i) \quad (2.1)$$

$$f_i' = - \int_{-1}^1 \left[u(x_i) + (x_i^2 - 2\gamma_i) \frac{l_i}{2R} \right] dx_i - m_i \left[u_i(1) + u_i(-1) + (1 - 2\gamma_i) \frac{l_i}{R} \right]$$

$$\gamma_1 = \gamma, \quad \gamma_2 = \gamma/\lambda^2, \quad u_i(\pm 1) = u(x_i) |_{x_i = \pm 1}$$

Краевые условия (1.5) в безразмерных переменных преобразуются к виду

$$\frac{d^2 u_i(\pm 1)}{dx_i^2} = 0, \quad \frac{1}{\eta_i^4} \frac{d^3 u_i(\pm 1)}{dx_i^3} = \mp m_i \left[u_i(\pm 1) + (1 - 2\gamma_i) \frac{l_i}{2R} \right] \quad (2.2)$$

Решение уравнения (2.1) определяется выражением

$$u(x_i) = (l_i/R) \left\{ \gamma_i - x_i^2/2 + A_i \sin \eta_i x_i + B_i \cos \eta_i x_i + C_i \operatorname{sh} \eta_i x_i + D_i \operatorname{ch} \eta_i x_i - \right.$$

$$- 2 \frac{B_i (\sin \eta_i + m_i \eta_i \cos \eta_i) + D_i (\operatorname{sh} \eta_i + m_i \eta_i \operatorname{ch} \eta_i)}{\operatorname{ch} \eta_i + \cos \eta_i + m_i \eta_i (\operatorname{sh} \eta_i - \sin \eta_i)} \times$$

$$\left. \times (\operatorname{sh} \eta_i x_i - \sin \eta_i x_i) e(x_i) \right\}$$

$$e(x_i) = 0, \text{ если } x_i \leq 0; \quad e(x_i) = 1, \text{ если } x_i > 0$$

Константы A_i, B_i, C_i, D_i могут быть определены из краевых условий (2.2), дополненных уравнениями

$$u(x_1) |_{x_1=0} = u(x_2) |_{x_2=0}, \quad f_1' = -f_2' \quad (2.3)$$

Первое из них является условием совместности перемещений в узле соединения балок, второе — следствием третьего закона Ньютона.

В результате решения системы уравнений (2.2)–(2.3) окончательно получим

$$u(x_i) = \frac{l_i}{R} \left\{ \gamma_i - \frac{x_i^2}{2} + B_i \cos \eta_i x_i + D_i \operatorname{ch} \eta_i x_i - \right.$$

$$\left. \frac{B_i g(\eta_i) + D_i h(\eta_i)}{v(\eta_i)} \eta_i (\operatorname{sh} \eta_i x_i - \sin \eta_i x_i) \operatorname{sign} x_i \right\} \quad (2.4)$$

$$B_1 = \frac{\lambda \rho_* \{ \lambda^2 y(\eta_1) [g(\eta_2) - h(\eta_2)] - v(\eta_1) s(\eta_2) \}}{F(\eta_1, \eta_2)} - \frac{h(\eta_1) [y(\eta_2) + z(\eta_2)]}{F(\eta_1, \eta_2)}$$

$$B_2 = \frac{y(\eta_2) [g(\eta_1) - h(\eta_1)] - \lambda^2 s(\eta_1) v(\eta_2)}{\lambda^2 F(\eta_1, \eta_2)} - \frac{\lambda^3 \rho_* h(\eta_2) [y(\eta_1) + z(\eta_1)]}{\lambda^2 F(\eta_1, \eta_2)}$$

$$D_1 = \frac{\lambda \rho_* \{ \lambda^2 z(\eta_1) [g(\eta_2) - h(\eta_2)] + v(\eta_1) s(\eta_2) \}}{F(\eta_1, \eta_2)} + \frac{g(\eta_1) [y(\eta_2) + z(\eta_2)]}{F(\eta_1, \eta_2)}$$

$$D_2 = \frac{z(\eta_2) [g(\eta_1) - h(\eta_1)] + \lambda^2 s(\eta_1) v(\eta_2)}{\lambda^2 F(\eta_1, \eta_2)} + \frac{\lambda^3 \rho_* g(\eta_2) [y(\eta_1) + z(\eta_1)]}{\lambda^2 F(\eta_1, \eta_2)}$$

$$F(\eta_1, \eta_2) = s(\eta_1) [y(\eta_2) + z(\eta_2)] + \lambda \rho_* s(\eta_2) [y(\eta_1) + z(\eta_1)]$$

$$g(\eta) = (\sin \eta + m \eta \cos \eta) / \eta^2, \quad h(\eta) = (\operatorname{sh} \eta + m \eta \operatorname{ch} \eta) / \eta^2$$

$$y(\eta) = \eta (1 - \sin \eta \operatorname{sh} \eta + \cos \eta \operatorname{ch} \eta - 2m \eta \sin \eta \operatorname{ch} \eta)$$

$$z(\eta) = \eta (1 + \sin \eta \operatorname{sh} \eta + \cos \eta \operatorname{ch} \eta + 2m \eta \cos \eta \operatorname{sh} \eta)$$

$$v(\eta) = [\operatorname{ch} \eta + \cos \eta + m \eta (\operatorname{sh} \eta - \sin \eta)] / \eta$$

$$s(\eta) = \sin \eta \operatorname{ch} \eta + \cos \eta \operatorname{sh} \eta + 2m \eta \cos \eta \operatorname{ch} \eta$$

Анализ выражения (2.4), описывающего деформации элементов крестообразной конструкции, показывает, что существуют критические зна-

чения η_i^* , при приближении к которым прогиб конструкции стремится к бесконечности. Критические значения η_i^* находятся из уравнения $F(\eta_1, \eta_2) = 0$, описывающего семейство кривых в плоскости (η_1, η_2) . Подобный эффект для одной балки, лежащей в плоскости орбиты, изучался в [4].

Чтобы понять природу этого явления, рассмотрим поперечные упругие колебания элементов конструкции. Следует иметь в виду, что колебания балки, перпендикулярной плоскости орбиты, будут носить трехмерный характер. Временно отвлекаясь от этого, будем считать, что колебания балок происходят в плоскости x, x_3 в поле сил, задаваемых выражением (1.3). Рассмотрим геометрически симметричные формы колебаний. Деформации конструкции будут описываться уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_i^4} \frac{\partial^4 u(t, x_i)}{\partial x_i^4} &= u(t, x_i) + ({}^{1/2}x_i^2 - \gamma_i) \frac{l_i}{R} - \\ &- \frac{\partial^2 u(t, x_i)}{3\omega^2 \partial t^2} + f_i'(t) \delta(x_i), \quad \frac{\partial^2 u_i(t, \pm 1)}{\partial x_i^2} = 0 \\ \frac{1}{\eta_i^4} \frac{\partial^3 u_i(t, \pm 1)}{\partial x_i^3} &= \mp m_i \left[u_i(t, \pm 1) + ({}^{1/2} - \gamma_i) \frac{l_i}{R} - \frac{\partial^2 u_i(t, \pm 1)}{3\omega^2 \partial t^2} \right] \\ f_i'(t) &= - \int_{-1}^1 \left[u(t, x_i) + ({}^{1/2}x_i^2 - \gamma_i) \frac{l_i}{R} - \frac{\partial^2 u(t, x_i)}{3\omega^2 \partial t^2} \right] dx_i - \\ &- m_i \left[u_i(t, 1) + u_i(t, -1) + (1 - 2\gamma_i) \frac{l_i}{R} - \frac{\partial^2 u_i(t, 1)}{3\omega^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 u_i(t, -1)}{3\omega^2 \partial t^2} \right] \end{aligned}$$

Решение будем искать в виде $u(t, x) = u(x) + w(t, x)$, где $u(x)$ есть решение статической задачи (2.1)–(2.2) и определяется выражением (2.4), а $w(t, x)$ удовлетворяет уравнению упругих колебаний

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_i^4} \frac{\partial^4 w(t, x_i)}{\partial x_i^4} &= w(t, x_i) - \frac{\partial^2 w(t, x_i)}{3\omega^2 \partial t^2} + f_i''(t) \delta(x_i) \\ \frac{\partial^2 w_i(t, \pm 1)}{\partial x_i^2} &= 0, \quad \frac{1}{\eta_i^4} \frac{\partial^3 w_i(t, \pm 1)}{\partial x_i^3} = \mp m_i \left[w_i(t, \pm 1) - \right. \\ &- \left. \frac{\partial^2 w_i(t, \pm 1)}{3\omega^2 \partial t^2} \right], \quad f_i''(t) = - \int_{-1}^1 \left[w(t, x_i) - \frac{\partial^2 w(t, x_i)}{3\omega^2 \partial t^2} \right] dx_i - \\ &- m_i \left[w_i(t, 1) + w_i(t, -1) - \frac{\partial^2 w_i(t, 1)}{3\omega^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 w_i(t, -1)}{3\omega^2 \partial t^2} \right] \end{aligned}$$

Выражение для $w(t, x_i)$ определяется формулой

$$w(t, x_i) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x_i) \sin(\Omega_n t + \varphi_n), \quad \Omega_n^2 = \omega_n^2 - 3\omega^2 \quad (2.5)$$

где ω_n — частоты поперечных колебаний свободной крестообразной конструкции, $X_n(x_i)$ — формы колебаний. Из этого соотношения следует, что частоты малых колебаний конструкции, находящейся на околоземной орбите, меньше соответствующих частот колебаний свободной конструкции.

Формы упругих колебаний $X(x_i)$ в общем виде задаются выражением

$$\begin{aligned} X(x_i) &= A_i \sin k_i x_i + B_i \cos k_i x_i + C_i \operatorname{sh} k_i x_i + D_i \operatorname{ch} k_i x_i - \\ &- 2[B_i g(k_i) + D_i h(k_i)] k_i (\operatorname{sh} k_i x_i - \sin k_i x_i) e(x_i) / v(k_i) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$k_i^4 = \omega_n^2 \rho_i l_i^4 / (E_i I_i)$$

Константы A_i, B_i, C_i, D_i могут быть определены из краевых условий и соотношений $w(t, x_1)|_{x_1=0} = w(t, x_2)|_{x_2=0}, f_1'' = -f_2''$.

В результате получится система однородных линейных уравнений относительно A_i, B_i, C_i, D_i , которая имеет нетривиальное решение в том случае, если детерминант системы равен нулю. После соответствующих выкладок, которые здесь опускаются, условие существования нетривиального решения примет вид $F(k_1, k_2) = 0$. Таким образом, величина коэффициентов k_i , определяющих частоты собственных упругих колебаний конструкции, находится из того же соотношения, что и критические значения параметров η_i^* .

Рассмотрим одну из кривых семейства $F(k_1, k_2) = 0$, соответствующую первой гармонике упругих колебаний $\omega_1 = k_1^2 [E_1 I_1 / (\rho_1 l_1^4)]^{1/2}$. Из (1.2) и (2.6) можно получить соотношение $\omega_1^2 = 3\omega^2 k_1^4 / \eta_1^4$. Если величины параметров η_i будут увеличиваться, приближаясь к критическим значениям η_i^* , то при этом ω_1^2 , постепенно уменьшаясь, будет стремиться к $3\omega^2$, т. е. $\Omega_1^2 \rightarrow 0$. При дальнейшем увеличении η_i величина Ω_1^2 становится отрицательной, а в выражении (2.5) появляется член вида $\text{sh} |\Omega_1| t$.

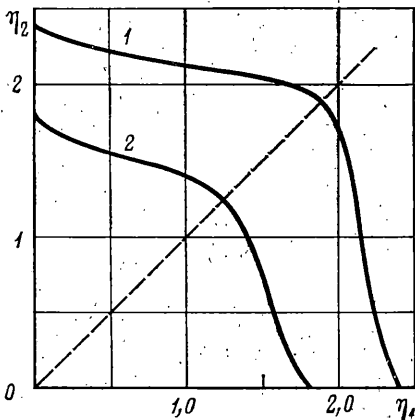
Проведенный анализ упругих колебаний конструкции нельзя считать полным в силу трехмерного характера колебаний балки, перпендикулярной плоскости орбиты. Тем не менее можно сделать вывод, что если $\eta_i < \eta_i^*$, то будет наблюдаться тенденция к увеличению начальных отклонений от положения равновесия $u(x_1)$ по экспоненциальному закону, т. е. что при этом не существует устойчивых конфигураций прогиба конструкции (по крайней мере, в рамках сделанных предположений).

На фиг. 2 представлены области значений η_i , ограниченные кривой $F(\eta_1, \eta_2) = 0$, построенные для случая $\rho_1 = \rho_2, E_1 I_1 = E_2 I_2, m_1 = m_2$. Кривая 1 соответствует случаю $m_i = 0$, кривая 2 — случаю $m_i = 1$. Следует отметить, что на кривой $F(\eta_1, \eta_2) = 0$ существует особая точка. Во всех точках кривой, кроме этой точки, определяемой условием $\eta_1^* = \eta_2^*$, выражение для деформации конструкции обращается в бесконечность. В тоже время в точке $\eta_1^* = \eta_2^*$ прогиб конструкции является конечной величиной, равной

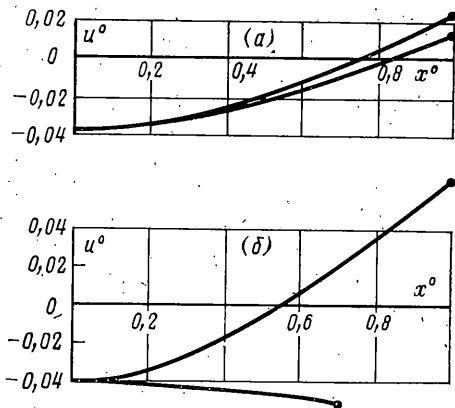
$$u(x) = \frac{l}{R} \left[\frac{1+3m}{6(1+m)} - \frac{x^2}{2} + \frac{g(\eta^*) \text{ch } \eta^* x + h(\eta^*) \cos \eta^* x}{s(\eta^*)} \right]$$

Здесь индексы, обозначающие принадлежность переменной к i -й балке, опущены, поскольку параметры обеих балок одинаковы. Однако это выражение описывает неустойчивую конфигурацию прогиба, поскольку частота первой гармоники упругих колебаний обращается в нуль.

В зависимости от соотношения параметров η_i возможны различные кон-



Фиг. 2



Фиг. 3

Фигурации прогиба конструкции. Эпюры прогибов изображены на фиг. 3. Здесь для удобства прогибы обеих балок изображены в одной плоскости, кроме того, в силу четности выражения (2.4) достаточно представить деформации половины каждой из балок. По оси абсцисс отложена безразмерная координата $x^0 = x/l_1$, по оси ординат — безразмерный прогиб $u^0 = uR/l_1^2$, где x_i и u — размерные переменные. На фиг. 3, а изображена эпюра прогиба крестообразной конструкции с параметрами $\eta_1=1, \eta_2=0,99, m_1=m_2=1, \lambda=0,99$. На фиг. 3, б — $\eta_1=1, \eta_2=0,7, m_1=m_2=1, \lambda=0,7$. В обоих случаях считалось, что $\rho_1=\rho_2, E_1I_1=E_2I_2$. Видно, что картины прогибов существенно различны. Кроме того, прогиб конструкции во втором случае больше, хотя общие габариты (длина одной из балок) меньше. Это объясняется действием сосредоточенной силы, возникающей в узле соединения балок.

3. Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Пусть выполняется условие $\eta_i \ll 1$. Тогда уравнения (2.1) — (2.2) преобразуются к виду

$$\frac{1}{\eta_i^4} \frac{d^4 u(x_i)}{dx_i^4} = \frac{l_i}{R} \left(\frac{x_i^2}{2} - \gamma_i \right) + f_i' \delta(x_i), \quad \frac{d^2 u_i(\pm 1)}{dx_i^2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{\eta_i^4} \frac{d^3 u_i(\pm 1)}{dx_i^3} = \mp m_i \left(\frac{1}{2} - \gamma_i \right) \frac{l_i}{R}, \quad f_i' = -\frac{l_i}{R} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} x_i^2 - \gamma_i \right) dx_i + m_i (1 - 2\gamma_i)$$

Решение этого уравнения будет задаваться выражением

$$u(x_i) = \frac{l_i}{R} \eta_i^4 \left\{ \left[\frac{1}{4} - \gamma_i + m_i (1 - 2\gamma_i) \right] \frac{x_i^2}{4} - \left[\frac{1}{6} - \gamma_i + \frac{m_i}{2} (1 - 2\gamma_i) \right] \frac{x_i^3 \operatorname{sign} x_i}{6} - \gamma_i \frac{x_i^4}{24} + \frac{x_i^6}{720} \right\}$$

Здесь принимается $u_i(0) = 0$.

б) Пусть $\eta_1 \ll 1, \eta_2 = O(1)$. Прогиб меньшей балки будет описываться уравнением (3.1), решение которого запишем в виде

$$u(x_1) = \frac{l_1}{R} \left\{ a + \eta_1^4 \left\{ \left[\frac{1}{4} - \gamma_1 + m_1 (1 - 2\gamma_1) \right] \frac{x_1^2}{4} - \left[\frac{1}{6} - \gamma_1 + \frac{m_1}{2} (1 - 2\gamma_1) \right] \frac{x_1^3 \operatorname{sign} x_1}{6} - \gamma_1 \frac{x_1^4}{24} + \frac{x_1^6}{720} \right\} \right\}$$

$$a = \gamma + \frac{\lambda^2 [g(\eta_2) - h(\eta_2)] + b [z(\eta_2) + y(\eta_2)]}{s(\eta_2)}$$

$$b = \frac{2\gamma_1 - 1/3 + m_1(2\gamma_1 - 1)}{4} \rho_* \frac{l_1}{R}$$

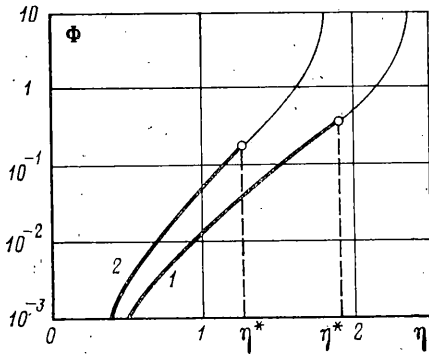
Прогиб большей балки описывается уравнением (2.1). Решение этого уравнения будет задаваться выражением

$$u(x_2) = \frac{l_2}{R} \left[\gamma_2 - \frac{x_2^2}{2} + c \cos \eta_2 x_2 + d \operatorname{ch} \eta_2 x_2 - \frac{cg(\eta_2) + dh(\eta_2)}{v(\eta_2)} \eta_2 (\operatorname{sh} \eta_2 x_2 - \sin \eta_2 x_2) \operatorname{sign} x_2 \right]$$

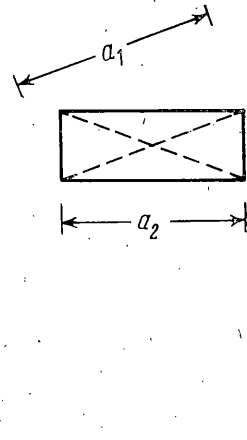
$$c = \frac{\lambda^{-2} by(\eta_2) - h(\eta_2)}{s(\eta_2)} \quad d = \frac{\lambda^{-2} bz(\eta_2) + g(\eta_2)}{s(\eta_2)}$$

в) Рассмотрим равноплечную крестообразную конструкцию ($\eta_1 = \eta_2 = \eta, m_1 = m_2 = m, l_1 = l_2 = l, \rho_* = 1$). Тогда выражение для деформации конструкции примет вид

$$u(x) = \frac{l}{R} \left[\frac{1 + 3m}{6(1 + m)} - \frac{x^2}{2} + \frac{g(\eta) \operatorname{ch} \eta x - h(\eta) \cos \eta x}{s(\eta)} \right] \quad (3.2)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Это выражение совпадает с выражением, полученным в [4] для прогиба одной упругой балки, лежащей в плоскости орбиты. Однако области значений параметра η , при которых существуют устойчивые конфигурации прогиба для одной балки, лежащей в плоскости орбиты, и равноплечной крестообразной конструкции, различны. Левая часть уравнения $F(\eta, \eta) = 0$, описывающего границу области существования устойчивой конфигурации прогиба крестообразной конструкции, распадается на множители $F = 2s(\eta)[y(\eta) + z(\eta)]$. Причем первый нуль функции F связан с условием $y(\eta) + z(\eta) = 0$. Таким образом, выражение (3.2) описывает устойчивую конфигурацию прогиба крестообразной конструкции при $\eta < \eta^*$, где η^* есть минимальное положительное решение уравнения $y(\eta) + z(\eta) = 0$. Прогиб одной балки, лежащей в плоскости орбиты, описываемый тем же выражением (3.2), будет иметь устойчивую конфигурацию при $\eta < \eta^0$, где η^0 — минимальное положительное решение уравнения $s(\eta) = 0$, причем $\eta^* < \eta^0$, т. е. область значений параметра η , при которых существует устойчивая конфигурация прогиба, для равноплечной крестообразной конструкции меньше.

Максимальный прогиб конструкции можно записать в виде $\Delta(u) = u(1) - u(0) = \Phi(\eta, m)l/R$. Зависимость Φ от величины параметра η представлена на фиг. 4, где кривая 1 соответствует случаю $m=0$, а кривая 2 — случаю $m=1$.

4. Выше предполагалось, что оси связанной системы координат x_1, x_2, x_3 и орбитальной системы координат X_1, X_2, X_3 совпадают (фиг. 1). Рассмотрим теперь влияние на прогиб конструкции углов ориентации, считая их малыми. Введем углы тангажа α_1 (поворот относительно оси x_1), крена α_2 (поворот относительно x_2) и рысканья α_3 (поворот относительно x_3). Несовпадение осей орбитальной и связанной систем координат приведет к появлению моментов, вызывающих движение всей конструкции, которое описывается линейризованными уравнениями [6]:

$$\begin{aligned} I_1 \alpha_1'' + 3(I_2 - I_3) \omega^2 \alpha_1 &= 0 \\ I_2 \alpha_2'' + (I_2 + I_3 - I_1) \omega \alpha_3' + 4(I_1 - I_3) \omega^2 \alpha_2 &= 0 \\ I_3 \alpha_3'' - (I_2 + I_3 - I_1) \omega \alpha_2' + (I_1 - I_2) \omega^2 \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

где I_i — главные центральные моменты инерции конструкции относительно оси x_i .

При этом на элементы конструкции будет действовать дополнительная поперечная нагрузка. Ее можно найти аналогично тому, как было получено выражение (1.3). Плотность распределенной поперечной нагрузки, действующей на балку, направленную вдоль оси x_1 , будет задаваться выражением $q_1(x_1) = \rho_1(-4\omega^2 \alpha_2 + \alpha_2'' + 2\omega \alpha_3')$.

Для балки, направленной вдоль оси x_2 , плотность распределенной поперечной нагрузки равна $q_2(x_2) = \rho_2(3\omega^2 \alpha_1 - \alpha_1'')$.

Учитывая уравнения движения конструкции как целого, можно показать, что если $I_1 + I_2 = I_3$, то дополнительная нагрузка тождественно равна

нулю. Это условие выполняется для любой крестообразной конструкции. Следовательно, ее прогиб не зависит от малых углов ориентации.

5. Результаты, полученные для монолитной конструкции, могут быть распространены на балки, представляющие собой ферменные конструкции, если вместо механических характеристик материала (плотность, модуль Юнга, модуль сдвига и т. д.) использовать соответствующим образом рассчитанные эквивалентные характеристики ферменной конструкции. Например, для ферменной балки, структура которой показана на фиг. 5, эквивалентные значения линейной плотности и изгибной жесткости задаются формулами [7]:

$$\rho' = 3\rho_0 (S_2 + a_3 S_3 / a_2 + 2a_1 S_1 / a_2)$$

$$(EI)' = \frac{a_3^2}{2k} E \left(S_2 k + \frac{1}{2} \frac{a_2^3}{a_1^3} S_1 \right), \quad k = 1 + 2 \frac{a_3^3}{a_1^3} \frac{S_1}{S_3}$$

где a_1, a_2, a_3 — геометрические параметры фермы (фиг. 5), S_1, S_2, S_3 — площади поперечного сечения соответствующих элементов фермы, ρ_0 — плотность материала, из которого изготовлена конструкция.

Соотношение прогибов для ферменной и монолитной балочных конструкций одинаковых размеров с одинаковыми присоединенными массами (безразмерными) определяется отношением параметров η , рассчитанных для ферменной (η') и монолитной (η) конструкций $\eta'/\eta = \sqrt[4]{(\rho'/\rho)EI/(EI)'}$.

В предположении $S_1 = S_2 = S_3$ получим

$$\frac{\eta'}{\eta} = \sqrt[4]{\frac{(1 + a_3/a_2 + 2a_1/a_2)(1 + 2a_3^3/a_1^3)}{4(1 + 2a_3^3/a_1^3 + 1/2 a_2^3/a_1^3)}}$$

Это выражение в большом диапазоне значений параметров фермы близко к единице. Следовательно, деформации рассматриваемой ферменной конструкции по порядку величины совпадают с деформациями монолитных конструкций тех же размеров, в то время как масса (а следовательно, и стоимость выведения на околоземную орбиту) значительно меньше. Такой же вывод может быть сделан для других ферменных конструкций, структура которых приведена в [7], а также для тонкостенных конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глазер П. Э. Перспективы космической солнечной энергетики. — Ракетн. техн. и космонавтика, 1979, т. 17, № 1, с. 176—189.
2. Буякас В. И., Гвализава А. С., Горшков Л. А. и др. Неограниченно наращиваемый космический радиотелескоп. — Космич. исследования, 1978, т. 16, вып. 5, с. 767—777; вып. 6, с. 924—936.
3. Bekey I., Mauger H. 1980—2000 raising our sights for advanced space systems. — Astronaut. and Aeronaut.; 1976, v. 14, No. 7—8, p. 34—63.
4. Ломаченко А. И., Мамалыга В. М. Деформации протяженных упругих тел на орбите. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 4, с. 27—35.
5. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971, 807 с.
6. Велецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
7. Нур А. К., Андерсон М. С., Грин В. Х. Континуальные модели решетчатых конструкций типа балок и пластин. — Ракетн. техн. и космонавтика, 1978, т. 16, № 12, с. 6—17.

Москва

Поступила в редакцию
1.VII.1983