МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1985

УДК 531.381

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ЗАКРЕПЛЕННОГО В НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

ВОРОТНИКОВ В. И.

Приводятся являющиеся «неаналитическими» функциями фазовых переменных законы управления, стабилизирующие перманентные вращения тяжелого твердого тела, закрепленного в неподвижной точке.

1. Рассмотрим динамические уравнения Эйлера движения тяжелого твердого тела, закрепленного в неподвижной точке

$$x_1^\bullet=(B-C)x_2x_3+mg(x_{3c}\eta_2-x_{2c}\eta_3)/A+u_1/A$$
$$\eta_1^\bullet=x_3\eta_2-x_2\eta_3 \quad (1\ 2\ 3,\ A\ B\ C) \tag{1.1}$$

Здесь A, B, C — главные моменты инерции тела, x_i $(i=1, 2, 3)$ — проекции угловой скорости тела на главные оси инерции, η_i $(i=1, 2, 3)$ — проекции на главные оси единичного вектора, направленного вдоль неподвижной вертикальной оси, x_{ic} $(i=1, 2, 3)$ — координаты центра инерции тела в главных осях инерции, mg — вес тела, u_i $(i=1, 2, 3)$ — управляющие моменты.

При $u_i=0$ $(i=1, 2, 3)$ решения

$$x_i=\omega l_i,\quad \eta_i=l_i \quad (i=1, 2, 3) \tag{1.2}$$

где ω — угловая скорость, l_i — направляющие косинусы перманентной оси в главных осях инерции, не могут быть асимптотически устойчивыми в смысле Ляпунова в силу консервативности системы (1.1). В [1] дано решение задачи стабилизации решений (1.2) на базе метода функций Ляпунова. В публикуемой работе, в отличие от [1], дается решение указанной задачи при помощи подхода, рассмотренного в [2, 3]. Это позволит установить более сильный вид устойчивости — экспоненциальную асимптотическую устойчивость.

2. Вводя новые переменные $\xi_i=x_i-\omega l_i$, $w_i=\eta_i-l_i$ $(i=1, 2, 3)$, составим уравнения возмущенного движения

$$\xi_1^\bullet=\frac{B-C}{A}(\xi_2+\omega l_2)(\xi_3+\omega l_3)+\frac{1}{A}mg[x_{3c}(w_2+l_2)-x_{2c}(w_3+l_3)]+\frac{1}{A}u_1$$
$$w_1^\bullet=(\xi_3+\omega l_3)(w_2+l_2)-(\xi_2+\omega l_2)(w_3+l_3)\ (1\ 2\ 3,\ A\ B\ C) \tag{2.1}$$

Теорема 1. Если $l_2\neq 0$, а законы управления u_i $(i=1, 2, 3)$ имеют вид

$$u_1=\frac{A}{l_2+w_2}\Phi_1(\xi, w)+\frac{A}{B}\frac{l_1+w_1}{l_2+w_2}u_2,\qquad u_2=B[\Gamma_5\xi_2-f_2(\xi, w)]$$
$$u_3=\frac{C}{l_2+w_2}\Phi_2(\xi, w)+\frac{C}{B}\frac{l_3+w_3}{l_2+w_2}u_2 \tag{2.2}$$
$$\Phi_1(\xi, w)=-\Gamma_3w_3-\Gamma_4\mu_2+f_2(\xi, w)(l_1+w_1)-$$
$$-f_1(\xi, w)(l_2+w_2)-\psi_2(\xi, w)(\xi_1+\omega l_1)+\psi_1(\xi, w)(\xi_2+\omega l_2)$$

$$\Phi_2(\xi, w)=\Gamma_1 w_1+\Gamma_2\mu_1-f_3(\xi, w)(l_2+w_2)-$$
$$-\psi_2(\xi, w)(\xi_3+\omega l_3)+f_2(\xi, w)(l_3+w_3)+\psi_3(\xi, w)(\xi_2+\omega l_2)$$
$$\mu_1=\psi_1(\xi, w), \quad \mu_2=\psi_3(\xi, w), \quad \Gamma_j=\text{const}<0 \ (i=1, \dots, 5)$$
$$f_1(\xi, w)=\frac{B-C}{A}(\xi_2+\omega l_2)(\xi_3+\omega l_3)+\frac{1}{A}mg[x_{3c}(w_2+l_2)-x_{2c}(w_3+l_3)]$$
$$\psi_1(\xi, w)=(\xi_3+\omega l_3)(w_2+l_2)-(\xi_2+\omega l_2)(w_3+l_3) \quad (1\,2\,3, A\,B\,C)$$

то движение $\xi_i=w_i=0$ ($i=1$, 2, 3) экспоненциально асимптотически устойчиво.

Доказательство. Опуская промежуточные выкладки, получим, что переменные w_1, w_3, μ_1, μ_2, ξ_2 замкнутой системы (2.1), (2.2) удовлетворяют уравнениям

$$w_1^{\cdot}=\mu_1, \quad \mu_1^{\cdot}=\Gamma_1 w_1+\Gamma_2\mu_1 \tag{2.3}$$
$$w_3^{\cdot}=\mu_2, \quad \mu_2^{\cdot}=\Gamma_3 w_3+\Gamma_4\mu_2, \quad \xi_2^{\cdot}=\Gamma_5\xi_2$$

Поскольку $\Gamma_i=\text{const}<0$ ($i=1, \dots, 5$), то движение $\xi_2=w_1=w_3=\mu_1=\mu_2=0$ системы (2.3) экспоненциально асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова и, следовательно, движение $\xi_i=0$, $w_i=0$ ($i=1$, 2, 3) системы (2.1), (2.2) экспоненциально асимптотически устойчиво относительно ξ_2, w_1, w_3. Из геометрического соотношения $\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2=1$ следует равенство $(w_1+l_1)^2+(w_2+l_2)^2+(w_3+l_3)^2=1$, решая которое относительно w_2, будем иметь две возможности

$$w_2(t)=-l_2+\sqrt{l_2^2-w_1^2(t)-w_3^2(t)-2l_1w_1(t)-2l_3w_3(t)} \tag{2.4}$$
$$w_2(t)=-l_2-\sqrt{l_2^2-w_1^2(t)-w_3^2(t)-2l_1w_1(t)-2l_3w_3(t)} \tag{2.5}$$

Пусть $l_2>0$. Поскольку l_2 — некоторое фиксированное число, то в начальный момент времени $t=t_0$ решение (2.5) не будет принадлежать достаточно малой окрестности начала координат $\xi_i=0$, $w_i=0$ ($i=1$, 2, 3) и, следовательно, должно быть исключено из рассмотрения устойчивости в смысле Ляпунова решения $\xi_i=0$, $w_i=0$ ($i=1$, 2, 3) системы (2.1), (2.2). Учитывая вид оставшегося соотношения (2.4), заключаем, что движение $\xi_i=0$, $w_i=0$ ($i=1$, 2, 3) системы (2.1), (2.2) будет при достаточно малых начальных возмущениях ξ_{i0}, w_{i0} ($i=1$, 2, 3) экспоненциально асимптотически устойчивым не только по ξ_2, w_1, w_3, но и по w_2. В случае $l_2<0$ приходим к тому же результату; однако в этом случае необходимо исключить из рассмотрения решение (2.4).

Из уравнений системы (2.1), (2.2) можно вывести равенства

$$\xi_3(t)=\frac{w_1^{\cdot}(t)+\xi_2 l_3-w_2\omega l_3+w_3(\xi_2+\omega l_2)}{l_2+w_2}=$$
$$=\frac{\mu_1(t)+\xi_2 l_3-w_2\omega l_3+w_3(\xi_2+\omega l_2)}{l_2+w_2}$$
$$\xi_1(t)=-\frac{w_3^{\cdot}(t)-\xi_2 l_1+w_2\omega l_1-w_1(\xi_2+\omega l_2)}{l_2+w_2}= \tag{2.6}$$
$$=\frac{\mu_2(t)-\xi_2 l_1+w_2\omega l_1-w_1(\xi_2+\omega l_2)}{l_2+w_2}$$

из которых заключаем, что при достаточно малых ξ_{i0}, w_{i0} ($i=1$, 2, 3) движение $\xi_i=0$, $w_i=0$ ($i=1$, 2, 3) системы (2.1), (2.2) экспоненциально асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова. Теорема доказана.

Проведем оценки отклонений возмущенных движений.

Теорема 2. Если начальные возмущения ξ_{i0}, w_{i0} ($i=1$, 2, 3) в системе

(2.1), (2.2) удовлетворяют неравенству

$$R_1^2+R_2^2+2|l_1|R_1+2|l_3|R_2\leqslant r^2<l_2^2$$

$$R_1=\sqrt{w_{10}^2+\frac{(2\Psi_{10}-\Gamma_2 w_{10})^2}{-4\Gamma_1-\Gamma_2^2}},\quad R_2=\sqrt{w_{30}^2+\frac{(2\Psi_{30}-\Gamma_4 w_{30})^2}{-4\Gamma_3-\Gamma_4^2}}$$

$$\Psi_{i0}=\Psi_i(\xi(t_0),\ w(t_0))\quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

то для решений $\xi_i(t)$, $w_i(t)$ $(i=1, 2, 3)$ системы (2.1), (2.2) при всех $t\geqslant t_0$ справедливы оценки

$$|\xi_i(t)|\leqslant A_i\exp[\alpha_i(t-t_0)],\quad t\geqslant t_0$$

$$|w_i(t)|\leqslant A_{3+i}\exp[\alpha_{3+i}(t-t_0)],\quad t\geqslant t_0\quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

$$A_1=\frac{1}{\sqrt{\beta^2-r^2}}\{R_2\sqrt{-\Gamma_3}+|l_1\xi_{20}|+A_5|\omega l_1|+R_1(|\xi_{20}|+|\omega l_2|)\}$$

$$A_2=|\xi_{20}|,\quad A_3=\frac{1}{\sqrt{\beta^2-r^2}}\{R_1\sqrt{-\Gamma_1}+|l_3\xi_{20}|+R_2(|\xi_{20}|+|\omega l_2|)\}$$

$$A_4=R_1,\quad A_5=\sqrt{R_1^2+R_2^2+2|l_1|R_1+2|l_3|R_2}$$

$$A_6=R_2,\quad \alpha_i=\max(-1/2\Gamma_2,\ -1/2\Gamma_4,\ -\Gamma_5),\quad i\neq 2,\quad \alpha_2=-\Gamma_5$$

Доказательство. Поскольку решения $w_1(t)$, $w_3(t)$ системы (2.3) имеют вид

$$w_1(t)=R_1\sin[\sqrt{-\Gamma_1-1/4\Gamma_2^2}t+\beta_1]\exp[1/2\Gamma_2(t-t_0)]\tag{2.7}$$

$$w_2(t)=R_2\sin[\sqrt{-\Gamma_3-1/4\Gamma_4^2}t+\beta_2]\exp[1/2\Gamma_4(t-t_0)]$$

$$\beta_1=\operatorname{arctg}\frac{(-\Gamma_1-{}^1/_4\Gamma_2^2)w_{10}}{w_{10}^{\boldsymbol\cdot}-{}^1/_2\Gamma_2 w_{10}},\quad \beta_2=\operatorname{arctg}\frac{(-\Gamma_3-{}^1/_4\Gamma_4^2)w_{30}}{w_{30}^{\boldsymbol\cdot}-{}^1/_2\Gamma_4 w_{30}}\tag{2.8}$$

и, следовательно

$$w_1^{\boldsymbol\cdot}(t)=R_1\sqrt{-\Gamma_1}\sin[\sqrt{-\Gamma_1-{}^1/_4\Gamma_2^2}t+\beta_1+\beta_3]\exp[{}^1/_2\Gamma_2(t-t_0)]$$

$$w_3^{\boldsymbol\cdot}(t)=R_2\sqrt{-\Gamma_3}\sin[\sqrt{-\Gamma_3-{}^1/_4\Gamma_4^2}t+\beta_2+\beta_4]\exp[{}^1/_2\Gamma_4(t-t_0)]$$

где β_3, β_4 — некоторые постоянные, то из (2.7), (2.8) заключаем, что при всех $t\geqslant t_0$ справедливы неравенства $|w_1(t)+w_3(t)+2l_1w_1(t)+2l_3w_3(t)|\leqslant$ $\leqslant R_1^2+R_2^2+2|l_1|R_1+2|l_3|R_2\leqslant r^2<l_2^2$.

Но тогда из (2.4), (2.5) с учетом неравенств $|-l_2+\sqrt{l_2^2+f(t)}|\leqslant\sqrt{|f(t)|}$ $(l_2>0)$, $|-l_2-\sqrt{l_2^2+f(t)}|\leqslant\sqrt{|f(t)|}$ $(l_2<0)$ вытекает оценка

$$|w_2(t)|\leqslant A_5\exp[\alpha_5(t-t_0)],\quad t\geqslant t_0$$

а из равенств (2.6), (2.7) — оценки

$$|\xi_j(t)|\leqslant A_j\exp[\alpha_j(t-t_0)],\quad t\geqslant t_0\quad (j=1,\ 3)$$

Теорема доказана.

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Апыхтин Н. Г.* О стабилизации перманентных вращений твердого тела.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 3, с. 521–524.
2. *Воротников В. И.* Об устойчивости движения относительно части переменных для некоторых нелинейных систем.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 441–450.
3. *Воротников В. И.* О полной управляемости и стабилизации движения относительно части переменных.— Автоматика и телемеханика, 1982, № 3, с. 15–21.

Нижний Тагил

Поступила в редакцию 3.I.1984