

УДК 539.3

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СИММЕТРИЧНОГО СТРОЕНИЯ

РЯЗАНЦЕВА М. Ю.

Для трехслойных упругих пластин симметричного строения построены асимптотически точные уравнения, которые учитывают низкочастотную (классическую) ветвь колебаний, первую высокочастотную ветвь (см. [1–3]) и их взаимодействие. Полученные уравнения по форме аналогичны уравнениям типа Тимошенко (см. [4]) и в случае однородных пластин переходят в уравнения, построенные в [5, 6]. Из асимптотического анализа трехмерной задачи теории упругости найдены коэффициенты этих уравнений.

1. Постановка задачи. Рассматривается трехслойная пластина постоянной толщины h , отнесенная к декартовой системе координат x, x^α (греческие индексы пробегает значения 1, 2). Срединная поверхность расположена в плоскости $x=0$ и обозначена Ω , граница Ω — через Γ . Движение упругого тела определяется функциями $w_i(x, x^\alpha, t)$ — проекциями вектора перемещений на оси координат (латинские индексы пробегает значения 1, 2, 3). Функции w_i предполагаются непрерывными и кусочно-дифференцируемыми. Толщины внешних и внутреннего слоев обозначены через h_1 и h_2 соответственно ($2h_1+h_2=h$).

Материал каждого слоя считается однородным и изотропным. Упругие характеристики λ, μ , а также плотность ρ являются четными функциями координаты x . (В дальнейшем индекс 1 будет отмечать характеристики внешних слоев, а индекс 2 — характеристики внутреннего слоя). На лицевых поверхностях пластины действуют переменные во времени поверхностные нагрузки. Предполагается, что боковая поверхность $\Gamma \times [-h/2, h/2]$ свободна от нагрузок.

Требуется построить приближенные двумерные уравнения такой пластины, которые асимптотически точно описывают низкочастотную и первую высокочастотную ветви колебаний в области длинных волн (длина волны l гораздо больше толщины пластины h) и качественно правильно колебания в области коротких волн. В случае однородных пластин эта задача решена в [5, 6].

2. Зависимость перемещений от поперечной координаты. Как и в случае однородной пластины, распределения перемещений по поперечной координате можно построить при помощи вариационно-асимптотического метода [6], рассматривая свободные колебания пластины в длинноволновом приближении.

1. На первом шаге асимптотической процедуры для перемещений получается краевая задача

$$\begin{aligned} \frac{4}{h^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \mu \frac{\partial w_\alpha}{\partial \xi} &= \rho \frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial t^2}, & \frac{\partial w_\alpha}{\partial \xi} &= 0 & (\xi = \pm 1) \\ \frac{4}{h^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial \xi} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, & \frac{\partial w}{\partial \xi} &= 0 & (\xi = \pm 1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$(\xi = 2x/h, |\xi| \leq 1)$$

которая представляет задачу о собственных колебаниях поперечного волокна пластины (в данном случае — составного стержня). Из решения задачи (2.1) следует, что в упругой пластине при высокочастотных изгибных колебаниях для поперечного волокна характерны две серии движений, в одной из которых преобладающим является поперечное перемещение w , а в другой серии преобладающим является тангенциальное перемещение w_α . Колебания этих серий обозначаются $F_\perp(n)$ и $F_\parallel(n)$ соответственно, где n — номер ветви. Собственные формы колебаний имеют вид

$$F_\perp(n): w = v f(\xi), w_\alpha = 0$$

$$f(\xi) = \cos(\alpha_2 b) \cos(\alpha_1 - \alpha_1 \xi) / \cos(\alpha_1 a) \quad (b \leq \xi \leq 1)$$

$$f(\xi) = \cos(\alpha_2 \xi) \quad (0 \leq \xi \leq b), \quad f(-\xi) = f(\xi) \quad (2.2)$$

$$F_\parallel(n): w = 0, w_\alpha = \psi_\sigma g(\xi)$$

$$g(\xi) = \sin(\beta_2 b) \cos(\beta_1 - \beta_1 \xi) / \cos(\beta_1 a) \quad (b \leq \xi \leq 1)$$

$$g(\xi) = \sin \beta_2 \xi \quad (0 \leq \xi \leq b), \quad g(-\xi) = -g(\xi)$$

$$(a = 2h_1/h, b = h_2/h, a + b = 1) \quad (2.3)$$

Здесь v и ψ — амплитуды колебаний, α_1 , α_2 , β_1 и β_2 — безразмерные частотные параметры слоев, которые выражаются через собственную частоту ветви по формулам

$$F_\perp(n): \alpha_1 = \frac{\omega h}{2} \sqrt{\frac{\rho_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}}, \quad \alpha_2 = \frac{\omega h}{2} \sqrt{\frac{\rho_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}}$$

$$F_\parallel(n): \beta_1 = \frac{1}{2} \omega h \sqrt{\rho_1 / \mu_1}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2} \omega h \sqrt{\rho_2 / \mu_2}$$

Спектр собственных частот колебаний трехслойной пластины находится из решения соответствующих частотных уравнений:

$$F_\perp(n): \operatorname{tg}(\alpha_1 a) + \sqrt{\frac{\rho_2(\lambda_2 + 2\mu_2)}{\rho_1(\lambda_1 + 2\mu_1)}} \operatorname{tg}(\alpha_2 b) = 0 \quad (2.4)$$

$$F_\parallel(n): \operatorname{tg}(\beta_1 a) \operatorname{tg}(\beta_2 b) = \sqrt{\rho_2 \mu_2 / (\rho_1 \mu_1)} \quad (2.5)$$

Величины α_1 , α_2 , β_1 и β_2 пробегает счетное число значений (номер ветвей опущены).

Для ветви $F_\perp(0)$ собственная частота равна нулю, такая ветвь была названа классической.

2. Будем рассматривать классическую изгибную ветвь $F_\perp(0)$, для которой в первом приближении поперечное перемещение постоянно по толщине, а продольные равны нулю, и первую высокочастотную ветвь $F_\parallel(0)$, для которой поперечное перемещение в первом приближении равно нулю, а распределение продольного перемещения по толщине определяется функцией $g(\xi)$ (2.3). Поэтому главные члены распределения перемещений по толщине возьмем в виде

$$w = u(x^\beta, t) + \dots, \quad w_\alpha = \psi_\alpha(x^\beta, t) g(\xi) + \dots \quad (2.6)$$

где амплитуды соответствующих собственных форм u и ψ считаются функциями x^β и t .

Функция u описывает прогиб срединной поверхности пластины. Функции $2\psi_\alpha/h$ имеют смысл углов поворота поперечного волокна, которое принимает форму некоторой кривой с изломом в точке контакта слоев в соответствии с формулой (2.3).

3. Для построения уравнений необходимо указать следующие члены разложения в формулах (2.6). Вычисления приводят к выражениям (запятой в индексах обозначено дифференцирование по x^α):

$$w = u + 1/4 h^2 \Delta u y(\xi), \quad w_\alpha = \psi_\alpha g(\xi) - 1/2 h u_{,\alpha} \xi \quad (2.7)$$

$$y(\xi) = \begin{cases} 1/6 \sigma_1 (3\xi^2 - 2b^3 - 1) + 1/3 \sigma_2 b^3 & (b \leq \xi \leq 1) \\ 1/6 \sigma_2 (3\xi^2 - 3b^2 + 2b^3) - 1/6 \sigma_1 (1 - 3b^2 + 2b^3) & (0 \leq \xi \leq b) \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \lambda_1 / (\lambda_1 + 2\mu_1), \quad \sigma_2 = \lambda_2 / (\lambda_2 + 2\mu_2), \quad y(-\xi) = y(\xi)$$

В разложении (2.7) слагаемое, содержащее $\psi_{,\alpha}$, не учитывается, однако этот член может оказаться существенным при восстановлении трехмерного напряженно-го состояния по двумерному. Приведем соответствующие формулы

$$w = u + 1/4 h^2 \Delta u y(\xi) + 1/2 \psi_{,\alpha} h z(\xi)$$

$$z(\xi) = \begin{cases} C_1 \sin(\alpha_1 \xi) + C_2 \cos(\alpha_1 \xi) + \frac{1}{\beta_1} \frac{\sin(\beta_2 b)}{\cos(\beta_1 a)} \sin(\beta_1 - \beta_1 \xi) & (b \leq \xi \leq 1) \\ C_3 \cos(\alpha_2 \xi) + \cos(\beta_2 \xi) / \beta_2 & (0 \leq \xi \leq b) \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \beta_1 \mu_1 / (\lambda_1 + 2\mu_1), \quad \alpha_2 = \beta_2 \mu_2 / (\lambda_2 + 2\mu_2)$$

$$C_1 = R_1 / R, \quad C_2 = R_2 / R, \quad C_3 = R_3 / R$$

$$R = \kappa_1 \alpha_1 [\kappa_2 \alpha_2 \cos(\alpha_1 a) \sin(\alpha_2 b) + \alpha_1 \kappa_1 \cos(\alpha_2 b) \sin(\alpha_1 a)]$$

$$R_1 = \kappa_2 \alpha_2 \sin(\alpha_2 b) [d_1 \cos(\alpha_1 b) + d_2 \kappa_1 \alpha_1 \sin \alpha_1] + \kappa_1 \alpha_1 \cos(\alpha_2 b) [d_3 \sin \alpha_1 - d_1 \sin(\alpha_1 b)]$$

$$R_2 = \kappa_2 \alpha_2 \sin(\alpha_2 b) [d_2 \kappa_1 \alpha_1 \cos \alpha_1 - d_1 \sin(\alpha_1 b)] + \kappa_1 \alpha_1 \cos(\alpha_2 b) [d_3 (\cos \alpha_1 - d_1 \cos(\alpha_1 b))]$$

$$R_3 = \kappa_1 \alpha_1 [d_3 \cos(\alpha_1 a) - d_1 - \kappa_1 \alpha_1 d_2 \sin(\alpha_1 a)]$$

$$d_1 = 2\mu_1 \sin(\beta_2 b) / \cos(\beta_1 a)$$

$$d_2 = \cos(\beta_2 b) / \beta_2 - \sin(\beta_2 b) \operatorname{tg}(\beta_1 a) / \beta_1$$

$$d_3 = 2 \sin(\beta_2 b) (\mu_1 - \mu_2), \quad \kappa_1 = \lambda_1 + 2\mu_1, \quad \kappa_2 = \lambda_2 + 2\mu_2$$

3. Лагранжиан двумерной теории. Распределения перемещений по толщине (2.7) принимаются в качестве исходных гипотез. Подстановка формул (2.7) в функционал действия трехмерного упругого тела

$$I = \frac{h}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \int_{-1}^1 (U - K) d\xi d\omega dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \{P^i w_i\} d\omega dt \quad (3.1)$$

$$2K = \rho (w_{,t}^2 + w_{\alpha,t} w_{,t}^\alpha), \quad 2U = \lambda (\varepsilon_i^i)^2 + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon^{ij}$$

$$\{P^i w_i\} = P_+^i w_i^+ + P_-^i w_i^-, \quad P_\pm^i = P|_{\xi=\pm 1}^i$$

приводит к следующему выражению для энергии:

$$\langle 2K \rangle = \langle \rho \rangle u_{,t}^{\circ 2} + \langle \rho g^2 \rangle \psi_{\alpha,t}^\circ \psi_{,t}^{\circ \alpha}, \quad \langle 2U \rangle = 1/2 h^2 [\langle \mu \sigma \xi^2 \rangle \Delta u^{\circ 2} +$$

$$+ \langle \mu \xi^2 \rangle u_{,\alpha\beta}^\circ u_{,\alpha\beta}^{\circ \alpha\beta}] + h [r \psi_{,\alpha}^{\circ \alpha} \Delta u^\circ + \langle \mu y g_{,t} \rangle \psi^{\circ \alpha} \Delta u_{,\alpha}^\circ - 2 \langle \mu g \xi \rangle u_{,\alpha\beta}^\circ \psi^{\circ \alpha, \beta}] +$$

$$+ (4/h^2) [\langle \mu g_{,t}^2 \rangle \psi_{\alpha}^\circ \psi^{\circ \alpha}]$$

$$r = \langle \lambda g y_{,t} \rangle - \langle \kappa \sigma^2 g \xi \rangle - 2 \langle \mu \sigma g \xi \rangle \quad (3.2)$$

Символом $\langle \dots \rangle$ обозначен интеграл по ξ в пределах $[-1, 1]$.

В выражении (3.2) опущены малые в асимптотическом смысле члены (слагаемое, содержащее $\Delta u_{,\alpha}^{\circ 2}$, и члены, содержащие градиенты скорости $u_{,t}^\circ$). Слагаемые, содержащие квадраты производных ψ_{α}° во внутренней энергии опускаются, поскольку предполагается, что уравнения должны правильно описывать для высокочастотной ветви собственную частоту, а не кривизну дисперсионной кривой.

В динамические уравнения войдут три искомые функции координат и

времени $u^\circ(x^\beta, t)$ и $\psi_\alpha^\circ(x^\beta, t)$ (соответствующие обозначения без градуса зарезервированы для функций, которые будут в окончательных уравнениях). Для дальнейших преобразований в энергии введем замены для функций u° и ψ_α° , смысл которых состоит в том, чтобы из всех асимптотически эквивалентных на длинных волнах функционалов выбрать тот, лагранжиан которого будет иметь строго положительные квадратичные формы для U и K и содержать только первые производные от искомым функций.

Произведем прежде преобразования во внутренней энергии, приводящие ее к сумме квадратов

$$\begin{aligned} \langle 2U \rangle = & \frac{1}{2} h^2 \langle \mu \xi^2 \rangle \left[u_{,\alpha\beta}^\circ - 2 \frac{\langle \mu g \xi \rangle}{h \langle \mu \xi^2 \rangle} \psi_{(\alpha,\beta)}^\circ \right]^2 + \\ & + \frac{1}{2} h^2 \langle \mu \sigma \xi^2 \rangle \left[\Delta u^\circ - 2 \frac{\langle \mu g \xi \rangle}{h \langle \mu \xi^2 \rangle} \psi_{,\alpha}^\circ \right]^2 + 4 \langle \mu g_{,\epsilon}^2 \rangle [\psi_\alpha^\circ + s h^3 \Delta u_{,\alpha}^\circ]^2 / h^2 \\ & s = \frac{\langle \mu y g_{,\epsilon} \rangle - p}{8 \langle \mu g_{,\epsilon}^2 \rangle}, \quad p = \frac{r}{2} + \frac{\langle \mu g \xi \rangle \langle \mu \sigma \xi^2 \rangle}{\langle \mu \xi^2 \rangle} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Круглыми скобками в индексах обозначена операция симметрирования.

Замены искомым функций вводятся по формулам

$$u = u^\circ, \quad -\psi_\alpha = u_{,\alpha}^\circ - \frac{2 \langle \mu g \xi \rangle}{h \langle \mu \xi^2 \rangle} [\psi_\alpha^\circ + h^3 s \Delta u_{,\alpha}^\circ] \quad (3.4)$$

После преобразований в кинетической энергии при помощи замен (3.4) и отбрасывания малых членов окончательно двумерный лагранжиан запишется в виде

$$\langle 2\Lambda \rangle = h^2 \mu^\sim \psi_{(\alpha,\beta)} \psi^{(\alpha,\beta)} + h^2 \lambda^\sim (\psi_{,\alpha}^\alpha)^2 + \quad (3.5)$$

$$+ G (\psi_\alpha + u_{,\alpha})^2 - 2 \rho^\sim u_{,\epsilon}^2 - \frac{1}{4} m h^2 \psi_{\alpha,\epsilon} \psi_{,\epsilon}^\alpha$$

$$\mu^\sim = \frac{1}{2} \langle \mu \xi^2 \rangle, \quad \lambda^\sim = \frac{1}{2} \langle \mu \sigma \xi^2 \rangle, \quad \rho^\sim = \frac{1}{2} \langle \rho \rangle$$

$$m = \frac{\langle \rho g^2 \rangle \langle \mu \xi^2 \rangle^2}{\langle \mu g \xi \rangle^2}, \quad G = \frac{\langle \mu g_{,\epsilon}^2 \rangle \langle \mu \xi^2 \rangle^2}{\langle \mu g \xi \rangle^2} \quad (3.6)$$

Коэффициент G , стоящий при члене $(\psi_\alpha + u_{,\alpha})$, имеет смысл коэффициента поперечного сдвига; коэффициенты μ^\sim , λ^\sim определяют изгибную жесткость пластины.

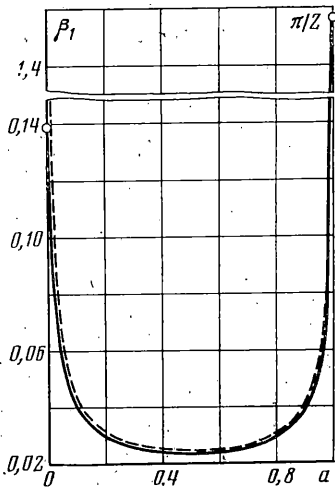
4. Уравнения вынужденных колебаний трехслойной пластины. Лагранжиан (3.5) является квадратичной формой по u и ψ_α и их производным первого порядка. Соответствующие уравнения Эйлера являются уравнениями гиперболического типа и для случая вынужденных колебаний они имеют вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} G (\psi_{,\alpha}^\alpha + \Delta u) + \rho^\sim u_{,\epsilon\epsilon} &= \{P\} / h \\ -\frac{1}{4} h^2 (2\lambda^\sim + \mu^\sim) \psi_{,\alpha\beta}^\beta - \frac{1}{4} h^2 \mu^\sim \Delta \psi_\alpha + \frac{1}{2} G (\psi_\alpha + \\ & + u_{,\alpha}) + \frac{1}{8} h^2 m \psi_{\alpha,\epsilon\epsilon} = \mu^\sim \langle \mu g \xi \rangle^{-1} [P_\alpha] g|_{\epsilon=-1} \\ \{P\} &= P|_{\epsilon=1} + P|_{\epsilon=-1}, \quad [P^\alpha] = P|_{\epsilon=1}^\alpha - P|_{\epsilon=-1}^\alpha \end{aligned} \quad (4.1)$$

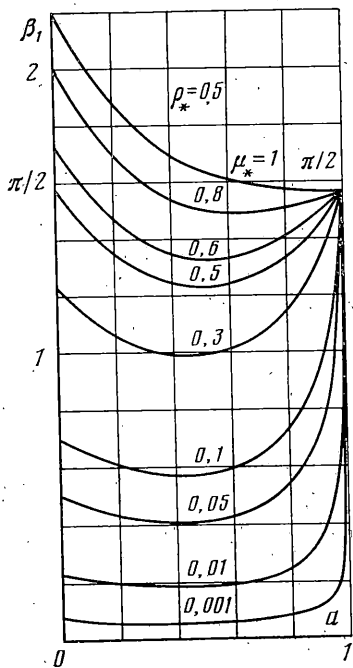
Если край пластины жестко заделан, то $u = \psi_\alpha = 0$ на контуре. Для случая свободного края естественные граничные условия записываются в виде $(\psi_\alpha + u_{,\alpha}) \nu^\alpha = 0$, $\mu^\sim \psi_{(\alpha,\beta)} \nu^\beta + \lambda^\sim \psi_{,\beta} \nu_\alpha = 0$ на Γ , где ν_α — вектор, нормальный к контуру Γ и лежащий в плоскости пластины.

Для трехслойной пластины коэффициенты уравнений (4.1) вычисляются по формулам

$$\rho^\sim = \rho_2 b + \rho_1 a, \quad \mu^\sim = \frac{1}{3} [\mu_1 (1 - b^3) + \mu_2 b^3]$$



Фиг. 1



Фиг. 2

(4.2)

$$2\lambda\tilde{\nu} + \mu\tilde{\nu} = \frac{1}{3} [\mu_1(2\sigma_1 + 1)(1 - b^3) + \mu_2 b^3(2\sigma_2 + 1)]$$

$$g|_{\xi=1} = \sin(\beta_2 b) / \cos(\beta_1 a)$$

$$\langle \mu \tilde{\xi}^2 \rangle = \frac{2}{3} [\mu_1(1 - b^3) + \mu_2 b^3]$$

$$\langle \mu g \tilde{\xi} \rangle = 2 \frac{\mu_1}{\beta_1^2} \frac{\sin(\beta_2 b)}{\cos(\beta_1 a)} [1 - \cos(\beta_1 a) + b \beta_1 \sin(\beta_1 a)] +$$

$$+ 2 \frac{\mu_2}{\beta_2^2} [\sin(\beta_2 b) - b \beta_2 \cos(\beta_2 b)]$$

$$\langle \mu g \tilde{\xi}^2 \rangle = \mu_1 \beta_1 \left[\frac{\sin(\beta_2 b)}{\cos(\beta_1 a)} \right]^2 [a \beta_1^{-1/2} \sin(2\beta_1 a)] + \mu_2 \beta_2 [b \beta_2 + \frac{1}{2} \sin(2\beta_2 b)]$$

$$\langle \rho g^2 \rangle = \frac{\rho_1}{2\beta_1} \left[\frac{\sin(\beta_2 b)}{\cos(\beta_1 a)} \right]^2 [2a\beta_1 + \sin(2\beta_1 a)] + \frac{\rho_2}{2\beta_2} [2b\beta_2 - \sin(2\beta_2 b)]$$

Отметим, что формулы для коэффициентов двумерных уравнений (3.6) справедливы для неоднородных по толщине пластин с произвольным симметричным строением. Для вычисления коэффициентов необходимо решить соответствующую задачу о собственных значениях (2.1).

5. Исследование частотного уравнения. Собственная частота ветви $F_{\parallel}(0)$ является первым корнем частотного уравнения (2.5). Это уравнение можно переписать следующим образом:

$$\operatorname{tg}(\beta_1 a) \operatorname{tg}(\beta_1 \sqrt{\rho_* / \mu_*} b) = \sqrt{\rho_* \mu_*} \quad (5.1)$$

$$(\mu_* = \mu_2 / \mu_1, \rho_* = \rho_2 / \rho_1)$$

Здесь использовано соотношение $\beta_2 = \beta_1 (\rho_* / \mu_*)^{1/2}$.

Обычно в трехслойных конструкциях жесткими являются внешние несущие слои, поэтому будем считать, что $\mu_* < 1$ и $\rho_* < 1$. При $\mu_* \ll 1$ для β_1

справедлива следующая асимптотическая формула: $\beta_1 = c\mu_*^{1/2}$, где постоянная c находится из уравнения $c \operatorname{tg}(c\rho_*^{1/2}b) = \rho_*^{1/2}/a$.

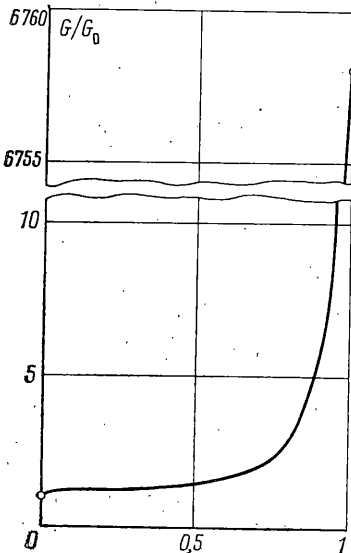
Если предположить, что $\rho_* \ll 1$, то

$$\beta_1 = \sqrt{\mu_*/(ab)} \quad (5.2)$$

Из формулы (5.2) следует, что собственная частота ω зависит при фиксированных материалах от соотношения толщин слоев и для материалов с большим перепадом упругих характеристик достигает минимального значения при $a=b=0,5$.

На фиг. 1 приведены результаты вычисления первого корня уравнения (5.1) для пластины толщиной $h=0,02$ м, у которой внешние слои сделаны из алюминия, а мягкий заполнитель — из пенополиуретана ($\mu_*=0,00015$, $\rho=0,019$). На графиках сплошной линией обозначена зависимость параметра β_1 от относительной толщины внешнего слоя a , построенная из решения уравнения (5.1). Точка $a=0$ соответствует однородной пластине толщиной $h=0,02$ м из пенополиуретана, для которой $\beta_1 = (\pi/2)(\mu_*/\rho_*)^{1/2}$. Однородной пластине из алюминия соответствует значение $a=1$; в этом случае $\beta_1 = \pi/2$ [5].

Расчеты показали, что функция $\beta_1(a)$ имеет минимум вблизи точки $a=0,5$. При $a=b=0,5$ рассматриваемая трехслойная пластина для ветви $F_{II}(0)$ имеет собственную частоту $\omega = 7668$ сек⁻¹; для однородной пластины такой же толщины из алюминия $\omega = 497\,000$ сек⁻¹, а для пластины из пенополиуретана $\omega = 44\,000$ сек⁻¹. На фиг. 1



Фиг. 3

штриховой линией обозначена зависимость $\beta_1(a)$, построенная по асимптотической формуле (5.2). Таким образом, в неоднородных упругих пластинах с большим перепадом упругих модулей наблюдается значительное понижение собственной частоты первой сдвиговой высокочастотной ветви, поэтому ее рассмотрение становится существенным.

На фиг. 2 приведено семейство кривых, полученных из решения уравнения (5.1) при условии, что ρ_* фиксировано ($\rho_*=0,5$), а μ_* изменяется в широком диапазоне ($\mu_*=0,001-1$). Приведенные графики иллюстрируют изменение характера зависимости β_1 от a при различных соотношениях параметров трехслойной пластины.

6. Одна оценка коэффициента поперечного сдвига. Покажем, что для коэффициента G справедлива следующая оценка снизу, связывающая его с собственной частотой первой высокочастотной ветви, геометрией пластины и упругими характеристиками материалов слоев:

$$G \geq 1/4 \omega^2 h^2 \langle \mu \zeta^2 \rangle^2 / \langle \rho^{-1} \mu^2 \zeta^2 \rangle \quad (6.1)$$

Действительно, из утверждения о стационарности частного Релея собственная частота определяется по формуле $\omega^2 = (4/h^2) \langle \mu g, \zeta^2 \rangle / \langle \rho g^2 \rangle$. Поэтому, согласно (3.6), справедливо равенство

$$G = 1/4 \omega^2 h^2 \langle \rho g^2 \rangle \langle \mu \zeta^2 \rangle^2 / \langle \mu g \zeta \rangle^2 \quad (6.2)$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, можно записать

$$\langle \mu g \zeta \rangle^2 \leq \langle \rho g^2 \rangle \langle \rho^{-1} \mu^2 \zeta^2 \rangle \quad (6.3)$$

Подстановка (6.3) в (6.2) приводит к оценке (6.1).

Из формулы (3.6) следует, что для пластины при заданных материалах коэффициент поперечного сдвига зависит от соотношения толщин слоев. На фиг. 3 представлена зависимость коэффициента G от относительной толщины внешнего слоя a для пластины, у которой $h=0,02$ м, $\mu_*=0,00015$, $\rho_*=0,019$. Через G_0 обозначен коэффициент поперечного сдвига однородной пластины, изготовленной из материала внутреннего

слоя ($a=0$). Для однородной пластины, согласно [5, 6], коэффициент поперечного сдвига $G_0 = \mu (\pi^2/24)^2$.

Автор благодарит В. Л. Бердичевского за внимание к данной работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lamb H.* On waves in an elastic plate.—Proc. Long Math., Soc., 1889/1890, v. 21, N 360, p. 70–90.
2. *Mindlin R. D.* Waves and vibrations in isotropic elastic plates.—Structural Mechanics, N. Y., 1960, 209 p.
3. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.—Киев: Наукова думка, 1981. 283 с.
4. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек.—М.: ВИНТИ, 1973, 272 с.
5. *Бердичевский В. Л., Ле Хань Чау.* Высокочастотные колебания оболочек.—Докл. АН СССР, 1982, т. 267, № 3, с. 584–589.
6. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды.—М.: Наука, 1983. 447 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.IX.1984