

УДК 539.3

## ОПТИМАЛЬНАЯ СТРУКТУРА НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ С НЕПРЕРЫВНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СВОЙСТВ ПО ТОЛЩИНЕ

АПТУКОВ В. Н.

В [1] введено понятие качества материала  $Q$  как отношения динамической твердости  $H$  к плотности  $\rho$ , показано, что этот параметр играет существенную роль в формировании оптимальной структуры пластины минимального веса, которая может объединять материалы с различным качеством. Предположение о линейной связи  $H(\rho) = B + A\rho$  обеспечивало максимальное качество материалам, лежащим на границах области допустимых управлений:  $\rho_1, H_1(\rho_1)$  при  $B > 0$  и  $\rho_2, H_2(\rho_2)$  при  $B < 0$ ; в случае  $B = 0$  качество всех материалов одинаково  $Q = \text{const}, \forall \rho \in [\rho_1, \rho_2]$ .

Публикуемая работа посвящена выяснению критериев оптимальной структуры пластины минимального веса с нелинейной связью  $H = \varphi(\rho)$ , поиску оптимальных управлений.

1. Задача поиска оптимального распределения механических характеристик пластины по толщине при произвольной связи  $H = \varphi(\rho)$  в случае удара цилиндра с плоским торцом формулируется следующим образом [2] (для линейной связи  $H(\rho)$  постановка подробно описана в [1]).

Дифференциальное уравнение для фазовой координаты процесса и краевые условия

$$(y^1)' = -E[\varphi(\rho) + \rho y^1], \quad y^1 = v^2 \quad (1.1)$$

$$(y^1)_{t=0} = y_0^1, \quad (y^1)_{t=t_k} = 0, \quad E = 2S/M$$

где  $v$  — текущая скорость внедрения,  $t = L$  — текущая глубина внедрения (аналог времени),  $M$  — масса цилиндра,  $S$  — площадь поперечного сечения цилиндра,  $t_k$  — нефиксированное время окончания процесса; точкой обозначена операция дифференцирования по времени.

Оптимальное управление  $\rho^\circ(t)$ , принадлежащее области допустимых управлений  $\Omega = \{\rho(t) : \rho_1 \leq \rho(t) \leq \rho_2 (t \in [0, t_k])\}$ , доставляет минимум функционалу (погонный вес пластины)  $\int \rho d\tau$  ( $0 \leq \tau \leq t_k$ ).

Гамильтониан системы равен

$$h = \psi_0 \rho - \psi_1 E[\varphi(\rho) + \rho y^1] \quad (1.2)$$

Дифференциальные уравнения, определяющие сопряженные переменные, имеют вид

$$\psi_0' = 0, \quad \psi_1' = E\rho\psi_1 \quad (1.3)$$

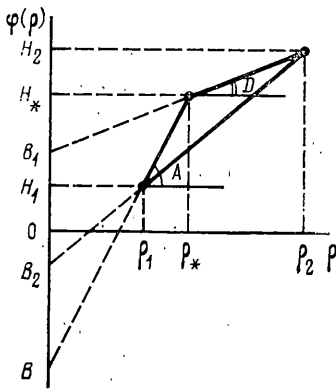
Принцип максимума записывается в форме

$$\max_{\rho \in \Omega} h(\psi(t), y(t), t, \rho) = h(\psi(t), y(t), t, \rho^\circ(t)) \quad (1.4)$$

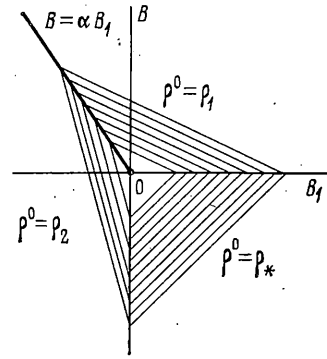
Условие трансверсальности

$$h(\psi(t_k), y(t_k), t_k, \rho^\circ(t_k)) = 0 \quad (1.5)$$

Так как  $\psi_0 \neq 0$  (случай  $\psi_0 = 0$  ведет к  $\psi_1(t) = 0$ , т. е. к нарушению необходимых условий оптимальности [2]), то без ограничения общности мож-



Фиг. 1



Фиг. 2

но положить в (1.2)  $\psi_0 = -1$ . Тогда с учетом (1.3) гамильтониан примет вид

$$h = \rho \left[ -1 - C_1 E y^t \exp \left( E \int_0^t \rho d\tau \right) \right] - C_1 E \varphi(\rho) \exp \left( E \int_0^t \rho d\tau \right)$$

Из условия (1.5) получим  $C_1 = -(f/E) \exp \left( -E \int_0^{t_k} \rho^\circ d\tau \right)$ ,  $f = \rho_h^\circ / \varphi(\rho_h^\circ)$ ,  $\rho_h^\circ = (\rho^\circ)_{t=t_k}$ .

Тогда окончательное выражение для гамильтониана при  $\rho = \rho^\circ$  будет

$$h = \rho^\circ \Phi_1 + \varphi(\rho^\circ) \Phi_2 \quad (1.6)$$

$$\Phi_1 = -1 + y^t f Z, \quad \Phi_2 = f Z, \quad Z = \exp \left( -E \int_0^{t_k} \rho^\circ d\tau \right) \quad (1.7)$$

Очевидно, что  $(\Phi_1)_{t=t_k} = -1$ , а  $\Phi_2$  является положительной, монотонно возрастающей функцией.

2. Рассмотрим частный случай зависимости  $\varphi(\rho)$  (фиг. 1)

$$\varphi(\rho) = A\rho + B \quad (\rho \in \Omega_1), \quad \varphi(\rho) = D\rho + B_1 \quad (\rho \in \Omega_2) \quad (2.1)$$

$$B_1 = B + \rho_* (A - D), \quad \Omega_1 = \{\rho(t) : \rho_1 \leq \rho(t) \leq \rho_*, (t \in [0, t_k])\}$$

$$\Omega_2 = \{\rho(t) : \rho_* < \rho(t) \leq \rho_2, (t \in [0, t_k])\}, \quad \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$$

При этом гамильтониан  $h$  становится кусочно-линейной функцией  $\rho^\circ$  с угловым коэффициентом  $\Phi$ :

$$\Phi = -1 + (Z\rho_h^\circ / (B + A\rho_h^\circ)) (A + y^t) \quad (\rho \in \Omega_1)$$

$$\Phi = -1 + (Z\rho_h^\circ / (B_1 + D\rho_h^\circ)) (D + y^t) \quad (\rho \in \Omega_2)$$

В конечный момент времени  $t = t_k$ :

$$\Phi_h = -B / (B + A\rho_h^\circ) \quad (\rho \in \Omega_1), \quad \Phi_h = -B_1 / (B_1 + D\rho_h^\circ) \quad (\rho \in \Omega_2) \quad (2.2)$$

Рассмотрим различные варианты оптимального управления в окрестности  $(t_*, t_k)$ ,  $0 < t_* < t_k$ :

в области  $B > 0 \wedge B_1 > 0$  имеем  $(\forall \rho \in \Omega_2 \rightarrow \rho^\circ = \rho_*) \wedge (\forall \rho \in \Omega_1 \rightarrow \rho^\circ = \rho_1) \rightarrow \rho^\circ = \rho_1$ ;

в области  $B < 0 \wedge B_1 < 0$ , по аналогии,  $\rho^\circ = \rho_2$ ;

в области  $B < 0 \wedge B_1 > 0$ , по аналогии,  $\rho^\circ = \rho_*$ ;

в области  $B > 0 \wedge B_1 < 0$  «подозрительными» на оптимальность являются два управления:  $\rho^\circ = \rho_1$  и  $\rho^\circ = \rho_2$ .

Оценим для последнего случая качество материалов с характеристиками  $\rho_1, H_1$  и  $\rho_2, H_2$ . В [1] показано, что для линейной связи  $H(\rho)$  максимальное значение  $Q$  достигается на тяжелом материале, если ордината пересечения прямой  $H(\rho)$  с осью  $\rho = 0$  отрицательна (фиг. 1). Ордината  $B_2$  прямой, проходящей через рассматриваемые точки, выражается как  $B_2 = [B\rho_2(\rho_* - \rho_1) + B_1\rho_1(\rho_2 - \rho_*)] / [\rho_*(\rho_2 - \rho_1)]$ . Отсюда следует, что если  $B > \alpha B_1$ , то  $\rho^\circ = \rho_1$ , иначе  $\rho^\circ = \rho_2$ . Параметр  $\alpha$  определяется через характерные плотности  $\alpha = -(\rho_1/\rho_2)(\rho_2 - \rho_*) / (\rho_* - \rho_1)$ .

Если  $\rho_* \rightarrow \rho_2$ , то  $\alpha \rightarrow 0$  и управление  $\rho^\circ = \rho_1$  справедливо при  $\forall B_1 \wedge B > 0$ . Если  $\rho_* \rightarrow \rho_1$ , то  $\alpha \rightarrow -\infty$  и управление  $\rho^\circ = \rho_2$  справедливо при  $\forall B \wedge B_1 < 0$ .

Как и ранее [1], используя решение уравнения движения при  $\rho = \text{const}$ , можно показать, что оптимальное управление  $\rho_k^\circ$  остается оптимальным при любом  $t \in [0, t_k]$ . Области значений параметров  $B$  и  $B_1$ , определяющих характеристики оптимальной однородной пластины, показаны на фиг. 2.

3. Рассмотрим нелинейную зависимость  $\varphi(\rho)$ , заданную в виде

$$\varphi(\rho) = B + A\rho^n \quad (A > 0, n > 0) \quad (3.1)$$

Вьясним, прежде всего, условия существования материала с максимальным качеством  $Q$ , достигаемым во внутренней точке допустимой области управлений  $\Omega_0 = \{\rho(t) : \rho_1 < \rho(t) < \rho_2, (t \in [0, t_k])\}$ .

Требование существования локального максимума функции  $Q$  приводит к зависимостям  $(Q')_{\rho=\rho^\circ} = -B(\rho^\circ)^{-2} + A(n-1)(\rho^\circ)^{n-2} = 0$ ,  $(Q'')_{\rho=\rho^\circ} = 2B(\rho^\circ)^{-3} + A(n-1)(n-2)(\rho^\circ)^{n-3} < 0$ . Штрихом обозначена операция дифференцирования по управлению  $\rho$ .

Первое условие дает  $(\rho^\circ)^n = B/[A(n-1)]$ , второе условие преобразуется к виду  $Bn < 0$ . Так как  $n$  положительно, то  $B < 0$ . Тогда для положительности  $\rho^\circ$  необходимо  $n < 1$ . Итак, условие  $\max_{\rho \in \Omega} \{Q\} = Q(\rho^\circ)$  при  $\rho^\circ \in \Omega_0$  может

выполниться лишь при  $B < 0$  и  $0 < n < 1$ .

Гамильтониан (1.6) при  $\rho = \rho^\circ$  имеет следующие формы:

$$h = \rho^\circ \Phi_1 + [A(\rho^\circ)^n + B] \Phi_2, \quad h = \rho^\circ \Phi(\rho^\circ) + B \Phi_2 \quad (3.2)$$

$$\Phi = -1 + f_n Z [y^1 + A(\rho^\circ)^{n-1}], \quad f_n = \rho_k^\circ / [B + A(\rho_k^\circ)^n]$$

Очевидно, что  $\Phi_k = -(B/\rho_k^\circ) f_n$ . Полная производная с учетом уравнения движения (1.1) равна

$$\Phi^* = f_n Z [-EB + A(n-1)(\rho^\circ)^{n-2}(\rho^\circ)'] \quad (3.3)$$

В случае  $\rho^\circ = \text{const}$  знак производной  $\Phi^*$  определяется знаком постоянной  $B$ . Используя решение уравнения движения для случая постоянного управления, можно показать, что  $(\Phi)_{t=0} = -B[B + \rho^\circ(y_0^1 + A(\rho^\circ)^{n-1})]^{-1}$ .

Таким образом, существуют постоянные управления  $\rho^\circ = \rho_1$ , если  $B > 0$ , и  $\rho^\circ = \rho_2$ , если  $B < 0$ , подозрительные на оптимальность.

Рассмотрим условия существования других решений

$$(h')_{\rho=\rho^\circ} = \Phi_1 + An\Phi_2(\rho^\circ)^{n-1} = 0 \quad (3.4)$$

$$(h'')_{\rho=\rho^\circ} = An(n-1)\Phi_2(\rho^\circ)^{n-2} < 0$$

Первое уравнение (3.4) дает

$$\rho^\circ = [-\Phi_1 / (An\Phi_2)]^m, \quad m = 1/(n-1) \quad (3.5)$$

В силу положительности  $\Phi_2$  отсюда вытекает ограничение  $\Phi_1 < 0$ . Второе неравенство (3.4) справедливо при  $n < 1$ .

Таким образом, для  $n < 1$  (кривая  $H(\rho)$  выпукла кверху) в окрестности  $(t_*, t_k)$ ,  $0 < t_* < t_k$  всегда выполняются необходимые условия существо-

вания непрерывного управления. Интервал  $(t_*, t_k)$  будет совпадать с общим временным интервалом  $[0, t_k]$ , если  $(\Phi_1)_{t=0} < 0$ . Уравнение (3.5) представим в виде

$$An(\rho^\circ)^{n-1} = (f_n Z)^{-1} - y^1 \quad (3.6)$$

Дифференцируя уравнение (3.6) по  $t$ , с учетом (4.1) преобразуем его к виду

$$(\rho^\circ)' = -G(\rho^\circ)^2 [1 + B/(A(1-n))] (\rho^\circ)^{-n}, \quad G = E/n \quad (3.7)$$

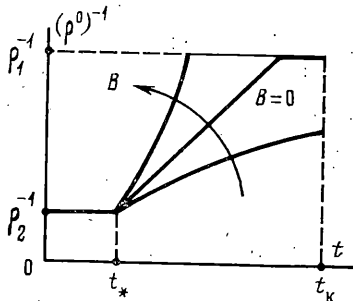
Для анализа решений этого уравнения воспользуемся методом последовательных приближений. Первое приближение определяется дифференциальным уравнением  $(\rho^\circ)' = -G(\rho^\circ)^2$ , откуда следует

$$(\rho^\circ)^{-1} = \rho_2^{-1} + G(t - t_*) \quad (3.8)$$

Решение (3.8) будет точным решением уравнения (3.7) при  $B=0$ .

Второе приближение является решением уравнения  $(\rho^\circ)' = -G(\rho^\circ)^2 \{1 + B/(A(1-n)) [G(t - t_*) + \rho_2^{-1}]^n\}$  и имеет вид

$$(\rho^\circ)^{-1} = \rho_2^{-1} + G(t - t_*) + [B/(A(1-n^2))] \times \\ \times \{[\rho_2^{-1} + G(t - t_*)]^{n+1} - \rho_2^{-(n+1)}\} \quad (3.9)$$



Фиг. 3

В решениях (3.8), (3.9) предполагалось выполнение условия  $(\rho^\circ)_{t=t_*} = \rho_2$ . Характер изменения второго приближения в зависимости от значения параметра  $B$  и оптимальное управление на всем сегменте  $[0, t_k]$  показаны на фиг. 3. Чем больше значение  $B$ , тем меньше размеры участка с непрерывным распределением плотности  $\rho^\circ$  по толщине пластины. При малых  $B$  возможно отсутствие минимально допустимого управления  $\rho_1$  в оптимальном решении. Положение точки  $t_*$  определяется численно, оно может совпадать с началом процесса  $t=0$  или даже быть меньше его  $t_* < 0$ . Последнее означает отсутствие максимально допустимого управления  $\rho_2$  в оптимальном решении. В любом случае, при  $n < 1$  справедливо неравенство  $t_* < t_k$ .

Сравнивая полученные результаты с условием локального максимума качества  $Q$  в области  $\Omega_0$ , можно заметить наличие общего условия  $n < 1$ . Однако результаты, показанные на фиг. 3, свидетельствуют о наличии в структуре пластины, «подозрительной» на оптимальность, материалов с различным значением качества  $Q$ , не обязательно максимальным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ангуков В. Н., Петрухин Г. И., Поздеев А. А. Оптимальное торможение твердого тела неоднородной пластиной при ударе по нормали. — Изв. АН СССР. МТТ, № 1, 1985, с. 165–170.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

Пермь

Поступила в редакцию  
30.VIII.1983