

УДК 539.3:534.1

**О МАКСИМИЗАЦИИ ОСНОВНОЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ
И ПОЛИМОДАЛЬНОСТИ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ОРТОТРОПНЫХ
ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ**

МЕДВЕДЕВ Н. Г.

Различные задачи оптимизации частот колебаний пластин переменной толщины рассмотрены в [1-3].

В [4] изучается задача о максимизации основной собственной частоты пластины при ограничениях на вес и толщину, когда управлением является функция толщины пластины. Доказывается существование оптимального управления и установлены результаты по аппроксимации бесконечномерной задачи оптимизации последовательностью конечномерных задач.

Аналогичным вопросам, в случае ортотропных оболочек вращения, когда управления являются функции толщины и радиус кривизны образующей оболочки, посвящена работа [5]¹.

Результаты [4, 5] распространяются на случай ортотропных некруговых цилиндрических оболочек, когда управлениями являются функции толщины и радиуса кривизны направляющей оболочки при ограничениях на вес, толщину, внутренний объем и другие параметры. При этом приводятся численные примеры решения задач о максимизации основной собственной частоты цилиндрических оболочек переменной толщины и изучаются спектральные особенности рассматриваемых оптимальных задач. Показывается, что на оптимальных решениях реализуется наибольшая кратность наименьшего собственного значения, определяющего квадрат основной собственной частоты колебаний оболочки.

1. Задача оптимального управления собственной частотой оболочки.

Пусть Ω — прямоугольная область в R^2 : $\Omega = \{(\varphi, z) | 0 < \varphi < 2\pi, 0 < z < L\}$; $H_+ = (W_{2+^1}(\Omega))^2 \times W_{2+^2}(\Omega)$ — прямое произведение пространств С. Л. Соболева [6] периодических по φ с периодом 2π функций.

Обозначим через H замыкание в норме $\|\omega\|_H^2 = \|u\|_{W_{2+^1}(\Omega)}^2 + \|v\|_{W_{2+^1}(\Omega)}^2 + \|w\|_{W_{2+^2}(\Omega)}^2$ множества бесконечно дифференцируемых в полуплоскости $0 < z < L$, $-\infty < \varphi < \infty$ периодических по φ функций ω из H_+ , удовлетворяющих граничным условиям решаемой задачи [7].

Введем в рассмотрение множество $U = \{t = (h, R) | h \in W_{p+^1}(\Omega), p > 2; R \in W_{2+^2}(0, 2\pi); h_- < h < h_+; R_- < R < R_+\}$, где $h_-, h_+, R_-, R_+ = \text{const} > 0$, которое снабжаем топологией, порожденной произведением слабых топологий пространств $W_{p+^1}(\Omega)$, $p > 2$ и $W_{2+^2}(0, 2\pi)$.

Определим далее на пространстве $H \times H$ семейства билинейных симметричных форм $a_t(\omega', \omega'')$, $b_t(\omega', \omega'')$, зависящих от параметра $t \in U$:

$$a_t(\omega', \omega'') = \int_{\Omega} (1 - \nu_1 \nu_2)^{-1} \left\{ h [E_1 \varepsilon_{11}' \varepsilon_{11}'' + \nu_2 E_1 (\varepsilon_{11}' \varepsilon_{22}'' + \varepsilon_{11}'' \varepsilon_{22}')] + \right.$$

¹ См. также: Братусь А. С. Оптимальное управление собственными частотами цилиндрической оболочки переменной толщины. — Совещание «Оптимизация конструкций при динамических нагрузках»: Тез. докл. Тарту: Изд-во Тарт. гос. ун-та, 1982, с. 14-16.

$$\begin{aligned}
& +E_2\varepsilon_{22}'\varepsilon_{22}''+(1-\nu_1\nu_2)G\varepsilon_{12}'\varepsilon_{12}''+\frac{h^3}{12}[E_1\gamma_{11}'\gamma_{11}''+\nu_2E_1(\gamma_{11}'\gamma_{22}''+\gamma_{11}''\gamma_{22}')+ \\
& \quad +E_2\gamma_{22}'\gamma_{22}''+4(1-\nu_1\nu_2)G\gamma_{12}'\gamma_{12}'']\}R\,d\Omega \\
b_i(\omega',\omega'') & =\int_{\Omega} \rho h(u'u''+v'v''+w'w'')R\,d\Omega \quad (\rho=\text{const}>0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}(\omega,R) & =\frac{\partial u'}{\partial z}, & \varepsilon_{22}(\omega,R) & =\frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}+w\right), & \varepsilon_{12}(\omega,R) & =\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\frac{\partial v}{\partial z} \\
\gamma_{11}(\omega,R) & =-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, & \gamma_{22}(\omega,R) & =-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}-v\right)\right], \\
\gamma_{11}(\omega,R) & =-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial z}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)
\end{aligned}$$

Здесь ε_{ik}' , γ_{ik}' , ε_{ik}'' , γ_{ik}'' — компоненты деформаций некруговой цилиндрической оболочки [8], вызываемые смещениями срединной поверхности ω' , $\omega'' \in H$ и зависящие от радиуса кривизны направляющей $R(\varphi) \in W_{2+^2}(0, 2\pi)$; E_1 , E_2 , ν_1 , ν_2 , $G = \text{const} > 0$ — соответственно модули упругости, коэффициенты Пуассона и модуль сдвига, причем $E_1\nu_2 = E_2\nu_1$ ($|\nu_i| < 1$); L , ρ и h — длина, плотность материала и толщина оболочки, $h \in W_{p+^1}(\Omega)$, $p > 2$, $d\Omega = d\varphi dz$.

Собственные частоты и формы колебаний оболочек определяются из решения задачи на собственные значения

$$a_i(\omega', \omega'') = \lambda b_i(\omega', \omega'') \quad \forall \omega'' \in H \quad (1.1)$$

имеющей дискретный спектр: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$

При этом $\lambda_k = \inf \left\{ \frac{a_i(\omega, \omega)}{b_i(\omega, \omega)} \mid \omega \in H, \omega \neq 0, b_i(\omega, \omega) = 0 (1 \leq i \leq k-1) \right\}$.

Очевидно, что первое собственное значение λ_1 и соответствующая собственная функция ω_1 задачи (1.1) зависят от параметра $t = (h, R)$. Обозначая эти зависимости λ_t , ω_t , будем управлять параметром t с тем, чтобы максимизировать λ_t , определяющей квадрат основной частоты колебаний оболочки. В связи с этим введем допустимое множество управлений

$$\begin{aligned}
U_0 & = \{t = (h, R) \mid h \in W_{p+^1}(\Omega), \quad p > 2; R \in W_{2+^2}(0, 2\pi); h_- \leq h \leq h_+; \\
& R_- \leq R \leq R_+; \|h\|_{W_{p+^1}(\Omega)} \leq c_h; \|R\|_{W_{2+^2}(0, 2\pi)} \leq c_R; \Psi_i(t, \omega_i) \leq 0 (i=1, l)\}
\end{aligned}$$

где c_h , $c_R = \text{const} > 0$, $(t, \omega) \rightarrow \Psi_i(t, \omega)$ — непрерывные отображения $U \times H$ (с топологией, порожденной произведением слабых топологий пространств $W_{p+^1}(\Omega)$, $p > 2$, $W_{2+^2}(0, 2\pi)$ и сильной топологией пространства H) в R ($i=1, l$).

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: найти функцию $t_0 = (h_0, R_0)$ и соответствующую пару $(\lambda_{t_0}, \omega_{t_0})$, для которых

$$t_0 \in U_0; \quad \omega_{t_0} \in H, \quad \lambda_{t_0} = \sup_{t \in U_0} \inf_{\substack{\omega \in H \\ \omega \neq 0}} \frac{a_i(\omega, \omega)}{b_i(\omega, \omega)} = \sup_{t \in U_0} \lambda_t \quad (1.2)$$

Отметим, что неравенства $\Psi_i(t, \omega_t) \leq 0$ накладывают ограничения на физические и геометрические параметры оболочки в зависимости от решаемой задачи. Например, в случае ограничения на максимальный вес P_0 и минимальный внутренний объем V_0 оболочки соответствующие функ-

ции Ψ_1, Ψ_2 имеют вид

$$\Psi_1 = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^L R h d\varphi dz - P_0, \quad \Psi_2 = V_0 - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left(R - \frac{h}{2} \right) d\varphi dz$$

Аналогично [5] доказано существование решения задачи оптимизации (1.2) и рассмотрены вопросы ее приближенного решения, которое можно строить с помощью тензорного произведения линейных и кубических сплайнов [9].

2. Численные исследования. Аналогично задачам об устойчивости оболочек [10] приближенное решение задачи (1.1), т. е. приближения для собственных частот и форм колебаний оболочки, находятся методом Рунга — Тимошенко с использованием тензорного произведения кубических сплайнов и тригонометрических полиномов.

В дальнейшем при решении задачи оптимизации толщина оболочки будет зависеть только от осевой координаты z , т. е. $h=h(z)$. В этом случае собственные функции, представленные в виде тензорных произведений кубических сплайнов и тригонометрических полиномов, по окружной координате φ определяются точно и зависят только от одной гармоники n , т. е.

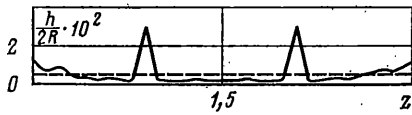
$$u = \sum_{i=0}^{N_1} c_{1i} s_{1i}(z) \sin n\varphi, \quad v = \sum_{i=0}^{N_2} c_{2i} s_{2i}(z) \cos n\varphi, \quad w = \sum_{i=1}^{N_3-1} c_{3i} s_{3i}(z) \sin n\varphi \quad (2.1)$$

где $s_{ij}(z)$ и N_j ($j=1, 2, 3$) — фундаментальные кубические сплайны [11], удовлетворяющие граничным условиям рассматриваемой задачи и количества узлов разбиения отрезка $[0, L]$ соответственно для u, v, w . Аналогично тому, как это сделано в [12], можно доказать сходимость полученных приближений к точному решению задачи (1.1).

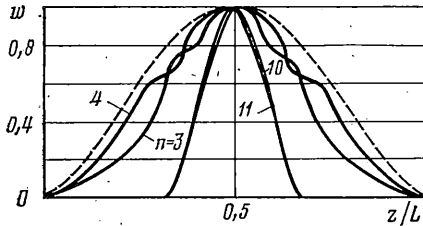
Рассмотрим жестко защемленную на торцах изотропную цилиндрическую оболочку постоянной толщины с параметрами $L=3$ м, $R=1$ м, $h=10^{-2}$ м, $\nu=0,29$, $E=2,17 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho=7,8 \cdot 10^3$ кг/м³. Основная собственная частота колебаний такой оболочки, найденная с помощью кубических сплайнов и тригонометрических функций, равна $f_1=5,69$ Гц. Соответствующая ей форма колебаний образует по окружной координате φ пять волн, т. е. в соотношениях (2.1) $n=5$. Найденные приближения с высокой степенью точности согласуются с известными результатами для цилиндрических оболочек постоянной толщины.

Решим задачу о максимизации основной собственной частоты колебаний рассматриваемой оболочки, когда управлением является функция толщины оболочки при

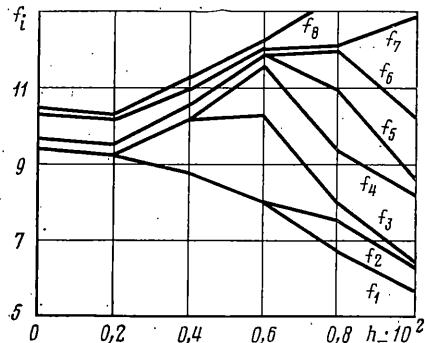
z_i	$h=0,01 \cdot 10^{-2}$	$0,2 \cdot 10^{-2}$	$0,4 \cdot 10^{-2}$	$0,6 \cdot 10^{-2}$	$0,8 \cdot 10^{-2}$
0,0	1,68	2,26	2,24	1,79	0,80
0,1	1,57	1,23	0,89	0,76	0,80
0,2	1,70	1,57	1,70	0,88	0,80
0,3	1,14	1,05	0,93	0,65	0,80
0,4	1,01	0,98	0,74	0,60	0,80
0,5	0,66	0,66	0,46	0,60	0,80
0,6	0,57	0,57	0,51	0,60	0,80
0,7	0,51	0,40	0,40	0,60	0,80
0,8	0,01	0,20	0,40	0,60	0,80
0,9	5,84	5,81	5,69	5,63	3,90
1,0	0,17	0,30	0,40	0,60	0,80
1,1	0,27	0,27	0,40	0,60	0,80
1,2	0,20	0,20	0,40	0,60	0,80
1,3	0,48	0,48	0,40	0,60	0,80
1,4	0,01	0,20	0,40	0,60	0,80
1,5	0,04	0,20	0,40	0,60	0,80
f_1	9,39	9,25	8,80	8,10	6,70



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

ограничениях на толщину оболочки сверху h_+ , снизу h_- и вес $P(h)$, который должен быть не выше веса P_0 оболочки постоянной толщины при $h=10^{-2}$ м. При этом толщина оболочки отыскивается в классе кусочно-линейных непрерывных функций, зависящих от осевой координаты z ($h=h(z)$), симметричных относительно середины ($z=1,5$ м) оболочки с количеством параметров оптимизации $N=16$.

Используя метод штрафных функций, задача оптимизации, сформулированная как задача нелинейного программирования, сводится к задаче оптимизации без ограничений. Последняя решается методом покоординатного спуска в сочетании с одномерным поиском по Фибоначчи.

В таблице приведены значения оптимальных законов распределения толщины оболочки $h(z_i) \cdot 10^2$ м в узлах z_i ($i=1,16$) по осевой координате z до середины оболочки ($0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{16} = 1,5$ м), а также соответствующие значения основной собственной частоты колебаний $f_1 = f_1(h)$ в Гц. Из таблицы видно, что основная собственная частота колебаний $f_1(h)$ на оптимальных законах изменения толщины оболочки при нижнем ограничении $h_- = 0,8 \cdot 10^{-2}$ м, $0,6 \cdot 10^{-2}$ м, $0,4 \cdot 10^{-2}$ м, $0,2 \cdot 10^{-2}$ м, $0,01 \cdot 10^{-2}$ м повышается, соответственно, примерно на 17,5; 42; 54,5; 62,5; 65% по сравнению с оболочкой постоянной толщины ($h=10^{-2}$ м) при их одинаковом весе.

На фиг. 1 (сплошной линией) показано оптимальное распределение толщины оболочки при $h_- = 0,2 \cdot 10^{-2}$ м, характеризующееся тем, что дальнейшее уменьшение h_- , как следует из таблицы, практически не повышает основную частоту колебаний f_1 . Штриховая линия соответствует оболочке постоянной толщины.

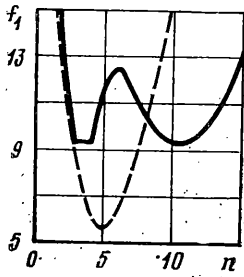
Из фиг. 1 и таблицы видно, что на оптимальных законах распределения толщины материал оболочки концентрируется на жестко заземленных торцах и в центральной части в виде двух симметрично расположенных «шпангоутов».

Исследованы спектральные особенности оптимальной задачи о колебании рассматриваемой цилиндрической оболочки. На фиг. 2 приводится зависимость спектра собственных частот колебаний f_i ($i=1,8$; $0 < f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_8$) от нижнего предела h_- для решения оптимальной задачи. С уменьшением h_- одновременно с ростом основной частоты колебаний f_1 оболочки возрастает и ее кратность. Так, при $h_- = 0,6 \cdot 10^{-2}$ м и $h_- = 0,4 \cdot 10^{-2}$ м кратность f_1 равна 2, т. е. форма колебаний оболочки является бимодальной. Одна мода образует 3 волны по окружной координате ϕ , другая — 4, т. е. в соотношениях (2.1) $n=3,4$. При $h_- = 0,2 \cdot 10^{-2}$ м и $h_- = 0,01 \cdot 10^{-2}$ м кратность f_1 равна 4. В этом случае колебания оболочки могут происходить с четырьмя модами при $n=3, 4, 10, 11$.

На фиг. 3 показаны 4 такие моды колебаний по компоненте w в зависимости от продольной координаты z при $\phi=90^\circ$, соответствующие $n=3, 4, 10, 11$ для закона изменения толщины приведенного на фиг. 2, т. е. при $h_- = 0,2 \cdot 10^{-2}$ м. Штриховая линия соответствует форме колебаний оболочки постоянной толщины, для которой $n=5$.

На фиг. 4 приведены зависимости основной собственной частоты колебаний f_1 от количества волн n по окружной координате ϕ для оболочки постоянной толщины при $h=10^{-2}$ м (пунктирная линия) и для оболочки с оптимальным распределением толщины (сплошная линия) при $h_- = 0,2 \cdot 10^{-2}$ м. Видно, что эти спектральные зависимости существенно отличаются; на оптимальной толщине минимальная основная собственная частота колебаний оболочки реализуется при четырех значениях $n=3, 4, 10, 11$, а для оболочки постоянной толщины при одном другом значении — $n=5$. В связи с этим отметим следующее: решение задачи о максимизации минимальной основной собственной частоты колебаний оболочки $f_1(h)$ требует многократного решения прямой задачи для определения минимального значения $f_1(h)$ в зависимости от n . При этом в процессе поиска оптимального решения, т. е. при изменении

толщины оболочки, значение n , на котором достигается минимальное значение $f_1(h)$, изменяется и может существенно отличаться от n , на котором реализуется минимальное значение $f_1(h)$ для оболочки постоянной толщины. Поэтому при решении оптимальных задач о колебании оболочек переменной толщины нужно учитывать это явление и при решении прямой задачи искать минимальное значение $f_1(h)$ в широком диапазоне изменения n . В противном случае можно получить неоправданный выигрыш в весе или в основной собственной частоте колебаний соответственно при фиксированной основной собственной частоте или весе оболочки.



Фиг. 4

Полученные результаты, связанные с кратностью спектра на оптимальных решениях, получены с точностью до 1%, т. е. с точностью, с которой решалась прямая задача. При этом в соотношениях (2.1) количество узлов разбиения отрезка $[0, L]$ $N_j=51$ ($j=1, 2, 3$).

Отметим, что аналогичное явление кратности спектра собственных значений на оптимальных решениях обнаружено также в задачах устойчивости цилиндрических оболочек переменной толщины [13]. При этом кратность наименьшего положительного собственного значения, определяющего критическую нагрузку оптимальной оболочки, равна пяти (имеется одна общая форма потери устойчивости и четыре местные).

Полученные результаты согласуются также с данными, полученными в ряде задач оптимизации конструкций.

В [14] найдены оптимальные распределения толщин заземленной балки с целью максимизации критической нагрузки. При этом оптимальное собственное значение, определяющее критическую нагрузку, имеет кратность два.

Та же кратность первого собственного значения получена в задачах о максимизации основной собственной частоты колебаний пластин [1]².

ЛИТЕРАТУРА

1. Арман Ж.-Л. П., Лурье К. А., Черкаев А. В. К решению задач оптимизации собственных значений, возникающих при проектировании упругих конструкций. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 159—162.
2. Ваничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
3. Братусь А. С., Картвелишвили В. М. Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 6, с. 119—129.
4. Литвинов В. Г. Задача оптимального управления собственной частотой пластины переменной толщины. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, № 4, с. 866—877.
5. Медведев Н. Г. Задача оптимального управления собственной частотой колебаний ортотропной оболочки вращения и ее конечномерная аппроксимация. — ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1104—1109.
6. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 478 с.
7. Медведев Н. Г. О разрешимости задач теории ортотропных некруговых цилиндрических оболочек. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 10, с. 908—911.
8. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Расчет некруговых цилиндрических оболочек. Киев: Наук. думка, 1977. 102 с.
9. Барга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М.: Мир, 1974. 126 с.
10. Медведев Н. Г., Пантелеев А. Д. Об одном приближенном методе расчета оболочек вращения переменной толщины. — Прикл. механика, 1980, т. 16, № 5, с. 133—136.
11. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 316 с.
12. Медведев Н. Г. Сплайн-функции в задачах о колебании ортотропных оболочек переменной толщины. — Матем. физика, 1982, вып. 32, с. 109—113.
13. Медведев Н. Г. Некоторые спектральные особенности оптимальных задач устойчивости оболочек переменной толщины. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 9, с. 59—63.
14. Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций. М.: Мир, 1981. 276 с.

Киев

Поступила в редакцию
1.XII.1983

² См. также: Братусь А. С., Сайранян А. П. Бимодальные формы в задачах оптимизации конструкций. — В кн: IV Всес. конф. по оптимальному управлению в механических системах. М.: 1982, с. 37, где для случая стержней найдены необходимые и достаточные условия экстремума, когда оптимальное решение характеризуется двукратным собственным значением. Подобный эффект безразличия оптимальной конструкции к двум формам потери устойчивости обнаружен также в задачах аэроупругости: Сайранян А. П. Анализ чувствительности и оптимизация характеристик аэроупругой устойчивости. — Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1980, № 162. 58 с.