

УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

БОЕВ Н. В., УСТИНОВ Ю. А.

Методом однородных решений исследуется пространственное напряженно-деформированное состояние трехслойной сферической оболочки с коническими вырезами. Построение однородных решений для слоистых сферических оболочек в случае осесимметричной деформации осуществлено в [1, 2]. Однако полного анализа спектра однородных решений для конкретных слоистых оболочек и качественного анализа напряженно-деформированного состояния при изменениях параметров оболочки в цитируемых работах не приводится. Ниже представлено детальное исследование спектра, однородных решений для трехслойной сферической оболочки и дается качественная и количественная оценки ее напряженно-деформированного состояния.

При помощи однородных решений рассмотрены две конкретные краевые задачи. Дан количественный анализ напряженного состояния трехслойной сферической оболочки несимметричного строения с легким наполнителем как внутри области, так и в окрестности конического выреза.

1. Трехслойная сферическая оболочка отнесена к сферической системе координат r, θ, φ и занимает объем $\Omega = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2] [0, 2\pi]$. Слои оболочки работают без отрыва и проскальзывания. Сферические части границы (назовем их лицевыми) свободны от напряжений, а конические срезы (боковая поверхность) оболочки подвержены механическим воздействиям, оставляющим оболочку в равновесии. На лицевых поверхностях может быть задана произвольная гладкая нагрузка. Она снимается частным (неоднородным) решением уравнений теории упругости для замкнутого сферического слоя, и задача сводится к сформулированной. Методы решения задач для замкнутого сферического слоя не рассматриваются, однако укажем, что для тонких неоднородных по толщине оболочек неоднородное решение можно построить на основе первого итерационного процесса асимптотического метода [3]¹.

Пусть ν_i — коэффициенты Пуассона, μ_i — модули сдвига i -го слоя ($i = 1, 2, 3$), причем $\mu_1 = \mu_3$. Слои пронумерованы от внутреннего к внешнему. Введем безразмерные параметры $p = \mu_2/\mu_1$, $\alpha_i = h_i/h$, где h_i — толщины слоев, $2h$ — общая толщина оболочки.

Для решения задачи воспользуемся методом однородных решений. При помощи представлений [4, 5] плоского векторного поля $\{u_\theta, u_\varphi\}$ в виде

$$u_\theta = r \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad u_\varphi = \frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - r \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

исходная трехмерная краевая задача приводится к двум независимым относительно пары функций u_r, Φ (потенциальная задача):

$$L_1(u_r, \Phi) = 0, \quad L_2(u_r, \Phi) = 0 \quad (1.1)$$

$$M_1(u_r, \Phi)|_{r=r_j} = 0, \quad M_2(u_r, \Phi)|_{r=r_j} = 0 \quad (j=1, 2) \quad (1.2)$$

¹ См. Боев Н. В. Трехмерное напряженно-деформированное состояние неоднородной по толщине сферической оболочки. Ростов-на-Дону, 1978. — 12 с. Деп. в ВИНТИ 20.07.78; № 2439-78.

и функции Ψ (вихревая задача):

$$\begin{aligned}
 L_3(\Psi) &= 0, \quad M_3(\Psi)|_{r=r_j} = 0 \quad (j=1, 2) & (1.3) \\
 L_1(u_r, \Phi) &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \left(\frac{2}{r} u_r + \Delta_0 \Phi \right) + \kappa \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] + \\
 &+ \frac{4\mu}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} - \Delta_0 \Phi \right) + \frac{\mu}{r} \Delta_0 \left(u_r + 2r\Phi + r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \\
 L_2(u_r, \Phi) &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \right] + \frac{3\mu}{r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + \\
 &+ \frac{\kappa}{r} \Delta_0 \Phi + (\lambda + \kappa) \frac{u_r}{r^2} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2\mu}{r} \Phi \\
 L_3(\Psi) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + 3\mu \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\mu}{r} (\Delta_0 \Psi + 2\Psi) \\
 M_1(u_r, \Phi) &= \kappa \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left(2 \frac{u_r}{r} + \Delta_0 \Phi \right), \quad \kappa = \lambda + 2\mu \\
 M_2(u_r, \Phi) &= \mu \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right), \quad M_3(\Psi) = \mu r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\
 \Delta_0(\cdot) &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(\cdot) + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta}(\cdot) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(\cdot)
 \end{aligned}$$

Операторы L_s , M_s выписаны для случая, когда параметры Ламе $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$ являются произвольными кусочно-непрерывными функциями переменной r .

Очевидно, что для аксиально-симметричного нагружения (в дальнейшем оно и рассматривается) компоненты u_r и u_θ полностью определяются решением потенциальной задачи, а u_φ — вихревой.

Введем новую радиальную переменную ξ , связанную с r соотношением $\xi = (1/\varepsilon) \ln(r/r_0)$, $r_0 = (r_1 r_2)^{1/2}$, $\xi \in [-1, 1]$, $r \in [r_1, r_2]$. С каждым слоем свяжем местную координату ξ_i , определяемую соотношением $\xi_i = (1/\varepsilon) \ln(r/r_{0i})$, $r_{0i} = (r_{1i} r_{2i})^{1/2}$, $\varepsilon = (1/2) \ln(r_2/r_1)$, $\omega_i = (1/\varepsilon) \ln(r_{2i}/r_{1i})$, $\xi_i \in [-\omega_i, \omega_i]$, $r \in [r_{1i}, r_{2i}]$, где r_{1i} , r_{2i} ($i=1, 2, 3$) — соответственно внутренний и внешний радиусы i -го слоя, а ε — параметр, характеризующий тонкостенность оболочки.

В каждом слое частные решения потенциальной (1.1), (1.2) и вихревой (1.3) задач будем отыскивать в виде $u_r(\xi_i, \theta) = u(\xi_i) T_{z-1/2}(\cos \theta)$, $\Phi(\xi_i, \theta) = \varphi(\xi_i) T_{z-1/2}(\cos \theta)$, $\Psi(\xi_i, \theta) = \psi(\xi_i) T_{z-1/2}(\cos \theta)$. Здесь функция $T_{z-1/2}(\cos \theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_0 T_{z-1/2}(\cos \theta) + (z^2 - 1/4) T_{z-1/2}(\cos \theta) = 0, \quad \Delta_0(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(\cdot) + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta}(\cdot)$$

Относительно функций $u(\xi_i)$, $\varphi(\xi_i)$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, решение которой известно [6] и в переменных ξ_i приводится к виду

$$\begin{aligned}
 u(\xi_i) &= (\lambda + 1) [\lambda - 2(1 - 2\nu_i)] A_i \exp[(\lambda + 1)\varepsilon \xi_i] + \\
 &+ \lambda B_i \exp[(\lambda - 1)\varepsilon \xi_i] + \lambda(\lambda + 3 - 4\nu_i) C_i \exp(-\lambda\varepsilon \xi_i) - \\
 &- (\lambda + 1) D_i \exp[-(\lambda + 2)\varepsilon \xi_i] \\
 \varphi(\xi_i) &= (\lambda + 5 - 4\nu_i) A_i \exp[(\lambda + 1)\varepsilon \xi_i] + \\
 &+ B_i \exp[(\lambda - 1)\varepsilon \xi_i] + [-\lambda + 4(1 - \nu_i)] C_i \exp(-\lambda\varepsilon \xi_i) + \\
 &+ D_i \exp[-(\lambda + 2)\varepsilon \xi_i], \quad \lambda = z - 1/2
 \end{aligned}$$

Для вихревой задачи получаем $\psi(\xi_i) = E_i \exp[(z + 3/2)\varepsilon \xi_i] + F_i \exp[-(z - 3/2)\varepsilon \xi_i]$. Выполнение граничных условий на лицевых поверхностях и условий сопряжения слоев (равенство перемещений и напряжений на поверхностях контакта слоев) дает в случае потенциальной задачи однородную линейную алгебраическую систему двенадцатого порядка относительно постоянных A_i, B_i, C_i, D_i ($i=1, 2, 3$), а для вихревой — шестого порядка относительно E_i и F_i . Из условий существования нетривиальных решений этих систем получаем характеристические уравнения для определения собственных значений z .

В потенциальной задаче уравнение имеет вид

$$\det |a_{ij}(z; p, \varepsilon, \nu_s, \omega_s)| = 0 \quad (i, j=1, 2, \dots, 12; s=1, 2, 3) \quad (1.4)$$

Элементы матрицы a_{ij} однородной системы из-за их громоздкости не приводятся.

В вихревой задаче

$$(4z^2 - 9)d(z) = 0 \quad (1.5)$$

$$d(z) = d_0(z) + p d_1(z) + p^2 d_2(z), \quad d_0(z) = (4z^2 - 9) \prod_{s=1}^3 \text{sh } 2z\varepsilon\omega_s$$

$$d_1(z) = 2 \left[9 \prod_{s=1}^3 \text{sh } 2z\varepsilon\omega_s + 3z \text{sh } 2z\varepsilon\omega_2 \text{sh } 2z\varepsilon(\omega_3 - \omega_1) + 2z^2 \text{ch } 2z\varepsilon\omega_2 \text{sh } 2z\varepsilon(\omega_1 + \omega_3) \right]$$

$$d_2(z) = -9 \prod_{s=1}^3 \text{sh } 2z\varepsilon\omega_s - 6z \text{sh } 2z\varepsilon\omega_2 \text{sh } 2z\varepsilon(\omega_3 - \omega_1) + 4z^2 \text{sh } 2z\varepsilon\omega_2 \text{ch } 2z\varepsilon\omega_1 \text{ch } 2z\varepsilon\omega_3$$

2. Исследуем спектр более простой вихревой задачи. Нули уравнения (1.5) можно разбить на три группы. Первая группа состоит из пары $z = \pm 3/2$, которая не зависит ни от p , ни от ε . Вторая группа также состоит из пары $z = \pm z_2$, поведение которой при $p \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ зависит от отношения p/ε . Полагая $p = \varepsilon^\alpha$ ($0 < \alpha < \infty$), можно выделить три основных случая асимптотического поведения z_2 :

первый случай ($\alpha > 2$):

$$z_2 = \frac{3}{2} - \frac{\omega_1 + \omega_3}{12\omega_1\omega_2\omega_3} \varepsilon^\beta + \Omega(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \varepsilon^\nu + \dots, \quad \beta = \alpha - 2, \quad \nu > \beta$$

второй случай ($\alpha = 2$):

$$z_2 = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\omega_1 + \omega_3}{9\omega_1\omega_2\omega_3} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\omega_2(\omega_3 - \omega_1)}{9\omega_1\omega_2\omega_3 - \omega_1 - \omega_3} \varepsilon + \dots \right],$$

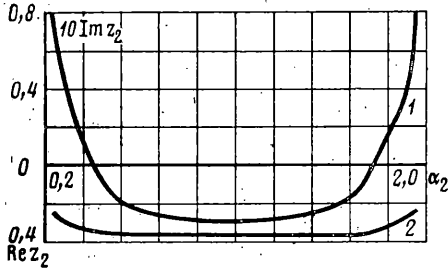
$$z_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{3(\omega_3 - \omega_1)}{\omega_1\omega_3} \right]^{1/2} \varepsilon^{1/2} \left[1 - \frac{18\omega_1\omega_3 + 1}{6(\omega_3 - \omega_1)} \varepsilon + \dots \right], \quad 9\omega_1\omega_2\omega_3 = \omega_1 + \omega_3$$

третий случай ($\alpha < 2$):

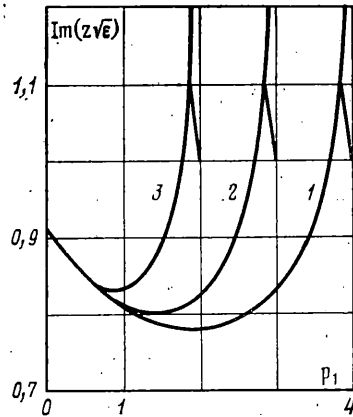
$$z_2 = i\varepsilon^{-\gamma/2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1 + \omega_3}{\omega_1\omega_2\omega_3} \right)^{1/2} + \Omega(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \varepsilon^\nu + \dots \right], \quad \gamma = 2 - \alpha, \quad \nu > 0, \quad i = \sqrt{-1}$$

В первом и третьем случаях Ω и ν существенно зависят соответственно от β и γ и приведены в [7].

Третья группа состоит из трех счетных множеств мнимых корней порядка $O(\varepsilon^{-1})$, асимптотика которых по параметру p с учетом двух первых членов выписана в [7]. Заметим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ для $t = z\varepsilon$ из (1.5) получают-



Фиг. 1



Фиг. 2

ся известные трансцендентные уравнения вихревых задач растяжения и изгиба трехслойной плиты [8].

Для оболочки симметричного строения зависимость z_2 от α_2 при $\epsilon_0 = 4h(r_1 + r_2)^{-1} = 0,05$ для двух значений $p = 10^{-4}$ и 10^{-5} приводится на фиг. 1. Если при $p = 10^{-k}$ ($k=1, 2, 3$) для выбранного ϵ_0 корень z_2 чисто мнимый, то при $p = 10^{-4}$ (фиг. 1, кривая 1) в промежутке $\alpha_2 \in [0,25; 1,75]$ и при $p = 10^{-5}$ (кривая 2) он принимает действительные значения.

Исследование спектра потенциальной задачи позволяет выделить три группы корней уравнения (1.4). К первой группе отнесем корни, которые имеют относительно ϵ порядок $O(1)$, ко второй — корни порядка $O(\epsilon^{-1/2})$, к третьей — $O(\epsilon^{-1})$.

Первая группа состоит из пары корней $z = \pm 3/2$.

Вторая группа состоит из четырех симметрично расположенных в комплексной плоскости корней. Если для однородной оболочки корни с асимптотическим поведением $O(\epsilon^{-1/2})$ определяют простой краевой эффект, то для трехслойной оболочки картина напряженно-деформированного состояния, соответствующая этой группе корней, более сложная и существенно зависит от сочетания геометрических и упругих параметров отдельных слоев.

На фиг. 2 для оболочки несимметричного строения ($\alpha_1 = 0,3$, $\alpha_2 = 1,6$, $\alpha_3 = 0,1$) приведены кривые зависимости мнимой части (ею определяется показатель краевого эффекта) корня, расположенного в первом квадранте, от параметра p для трех значений ϵ_0 ($\epsilon_0 = 0,001$ — кривая 1, $\epsilon_0 = 0,01$ — кривая 2, $\epsilon_0 = 0,1$ — кривая 3). Для каждого ϵ_0 можно выделить три промежутка параметра $p_1 = -\lg p$, различаемых по степени затухания краевого эффекта. На первом участке $p_1 \in [0, p_{1j}]$ ($j=1, 2, 3$) показатель затухания для трехслойной оболочки меньше, чем для однородной. На втором $p_1 \in [p_{1j}, p_{1j}^*]$ затухание краевого эффекта для слоистой оболочки более быстрое, чем в однородном случае. При $p_1 = p_{1j}^*$ происходит слияние на мнимой оси корней из первого и второго квадрантов (при этом $z_2 \epsilon^{1/2} = i\gamma_*$, $\gamma_* \approx 1,1$) с последующим (при $p_1 > p_{1j}^*$) ветвлением вдоль мнимой оси. Один корень движется вверх, а модуль другого стремится к нулю.

Третью группу образует счетное множество корней, симметрично расположенных в комплексной плоскости. При $\epsilon \rightarrow 0$ для $t = z\epsilon$ из (1.4) получается трансцендентное уравнение, которое определяет однородные решения трехслойной плиты. Для плиты симметричного строения корни соответствующего трансцендентного уравнения изучены в [8]. Для плиты с произвольным числом чередующихся жестких и мягких слоев структура спектра изучена в [9]. Для трехслойной оболочки корни определяются путем уточнения корней характеристических уравнений трехслойной плиты. Расчеты показали, что при определенных параметрах оболочки наименьшие корни третьей группы с увеличением кривизны существенно отличаются от корней для плиты.

Вычисление корней проводилось на основе сочетания принципа аргумента [10] с методом Ньютона.

Численный анализ позволил выявить в потенциальной задаче пару корней, поведение которых в зависимости от отношения p/ϵ эквивалентно поведению второй группы собственных значений вихревой задачи.

Дадим краткую характеристику поведения однородных решений, соответствующих выделенным группам собственных значений вихревой и потенциальной задач.

Первая группа корней $z = \pm 3/2$ определяет внутреннее напряженно-деформированное состояние оболочки, которое в каждом коническом сечении эквивалентно главному вектору и главному моменту, направленным вдоль оси симметрии. Остальные группы корней определяют напряженное состояние, самоуравновешенное в каж-

дом сечении $\theta = \text{const}$. Напряженное состояние, соответствующее второй группе корней вихревой задачи и эквивалентной ей группе корней потенциальной задачи, может быть как слабозатухающим (слабым), так и сильнозатухающим (сильным) погранслоем. Корни порядка $O(\varepsilon^{-1/2})$ в потенциальной задаче дают напряженное состояние типа простого краевого эффекта. Наименьшие корни $O(\varepsilon^{-1})$ при определенных сочетаниях параметров оболочки дают слабые погранслои. Остальные корни порождают сильные погранслои типа краевых эффектов Сен-Венана в теории толстых плит.

Укажем выявленные особенности трехмерного решения. Для оболочек с достаточно мягким заполнителем установлено существование двух погранслойных решений типа простого краевого эффекта, что обусловлено ветвлением соответствующих собственных значений. При этом одно решение может иметь показатель затухания значительно меньший, чем в однородном случае, а другое — больший. Для оболочек с мягким заполнителем существуют два конечных множества решений, определяющих в совокупности слабый погранслой. При этом одно из множеств присуще только сильнонеоднородным оболочкам. Оно состоит из двух элементарных решений, определяемых парой вещественных значений (по модулю меньших $3/2$). Решения другого множества определяют напряженное состояние оболочки, аналогичное слабому погранслою трехслойной плиты.

3. При помощи однородных решений дадим решение двух краевых задач.

Исследуем пространственное напряженное состояние трехслойной сферической оболочки, когда ее лицевые поверхности $r=r_j$ ($j=1, 2$) свободны от усилий, а на конических срезах $\theta=\theta_j$ ($\theta_1 < \theta_2$) (θ_j — постоянные) заданы следующие граничные условия: $\sigma_{\theta\varphi}(\xi, \theta_1) = \tau(\xi)$, $u_{\varphi}(\xi, \theta_2) = 0$.

Граничным условиям на боковой поверхности удовлетворим при помощи построенных выше однородных решений вихревой задачи. Решение задачи будем отыскивать в виде

$$u_{\varphi}(\xi, \theta) = r_0 e^{\varepsilon \xi} \sum_{h=1}^{\infty} \psi_h(\xi) T_{z_h^{-1/2}}^{(4)}(\cos \theta), \quad T_{z_h^{-1/2}}^{(4)} = \frac{d}{d\theta} T_{z_h^{-1/2}}$$

$$T_{z_h^{-1/2}}(\cos \theta) = M_h P_{z_h^{-1/2}}(\cos \theta) + N_h Q_{z_h^{-1/2}}(\cos \theta)$$

где $P_{z_h^{-1/2}}(\cos \theta)$, $Q_{z_h^{-1/2}}(\cos \theta)$ — функции Лежандра соответственно первого и второго рода индекса $z_h^{-1/2}$, а M_h и N_h — произвольные постоянные. Функции $\psi_h(\xi)$ в каждом слое выписаны в п. 1.

Разложим функцию $\tau(\xi)$ в ряд по функциям $\psi_h(\xi)$, которые образуют полную систему $\tau(\xi) = \sum_{h=1}^{\infty} a_h \psi_h(\xi)$. Выполнение граничных условий при-

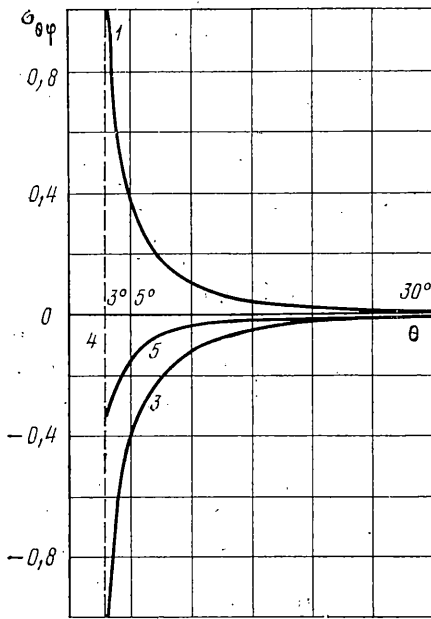
водит к линейной алгебраической системе второго порядка относительно M_h и N_h , которые таким образом определяются через a_h .

Численный анализ задачи проведен в случае, когда $\tau(\xi_2)$ имеет вид $\tau(\xi_1) = q$, $\tau(\xi_2) = 0$, $\tau(\xi_3) = -q$ ($\xi_i \in [-\omega_i, \omega_i]$ ($i=1, 2, 3$)).

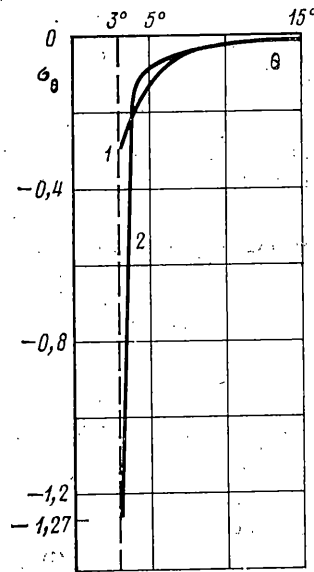
Численный расчет позволяет установить при различных параметрах оболочки значение каждого элементарного решения для напряженного состояния. Количество элементарных решений в ряду $\sigma_{\theta\varphi}$ определяется по степени выполнения граничных условий. В достаточно широком диапазоне изменения параметров граничные условия выполняются с относительной погрешностью не более 3% при помощи двух первых решений — проникающего (соответствующего $z = \pm 3/2$) и слабого погранслоя ($z = \pm z_2$).

На фиг. 3 приведены кривые зависимости напряжений $\sigma_{\theta\varphi}$ на срединных поверхностях несущих слоев как в краевой зоне (вблизи конического среза $\theta = \theta_1$), так и при удалении от нее в глубь области. При расчетах полагали $\theta_1 = 3^\circ$, $\theta_2 = 80^\circ$, $q = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,3$, $p = 10^{-5}$, $\varepsilon_0 = 0,01$, $\alpha_1 = 0,2$, $\alpha_2 = 1,4$, $\alpha_3 = 0,4$.

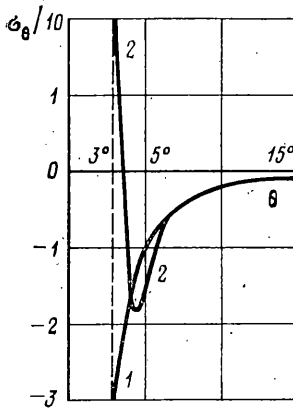
Кривые 1 построены на основе трехмерного решения (с учетом проникающего решения и слабого погранслоя) во внутреннем несущем слое, а кривые 3 — во внешнем. Кривые 4 и 5 соответствуют поведению прони-



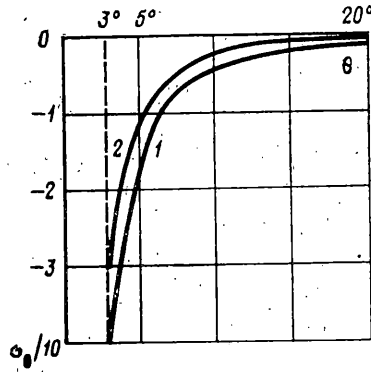
Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4



Фиг. 6

кающего решения во внутреннем и внешнем слоях. Для оболочек несимметричной структуры краевой эффект, определяемый поведением слабого погранслоя, в несущих слоях различен. В более тонком внутреннем слое (фиг. 3) слабый погранслой дает существенную поправку к проникающему решению (в краевой зоне до 130–170%), а во внешнем, более толстом слое эта поправка не превышает 30–60%. Для оболочек с мягким наполнителем (фиг. 3, $p=10^{-5}$) слабый погранслой проникает достаточно далеко в глубь области (порядка 10–15 толщин). Это указывает на то, что решение слабого погранслоя может давать значительную добавку во внутреннее напряженное состояние слоистой оболочки.

Рассмотрим задачу, когда лицевые поверхности оболочки свободны от усилий, а на конических срезах заданы следующие граничные условия:

$$u_0(\xi, \theta_1) = v(\xi), \quad \sigma_{r_0}(\xi, \theta_1) = \tau(\xi), \quad u_0(\xi, \theta_2) = 0, \quad \sigma_{r_0}(\xi, \theta_2) = 0 \quad (3.1)$$

Выполнение граничных условий на конических срезах осуществим с использованием однородных решений потенциальной задачи.

Применение теоремы Бэтти на коническом срезе $\theta = \theta_1$ дает следую-

щее условие ортогональности:

$$\int_{-1}^1 e^{2\varepsilon\xi} (\varphi_k \sigma_{3m} - u_m \sigma_{1k}) d\xi = 0 \quad (k \neq m) \quad (3.2)$$

Здесь u_n , φ_n , σ_{1n} , σ_{3n} — функции радиальной переменной в представлениях компонент перемещений и напряжений, соответствующих n -му собственному значению потенциальной спектральной задачи

$$u_{rn}(\xi, \theta) = u_n(\xi) T_{z_n - 1/2}(\cos \theta), \quad u_{\theta n}(\xi, \theta) = \varphi_n(\xi) T_{z_n - 1/2}^{(1)}(\cos \theta)$$

$$\sigma_{r\theta n}(\xi, \theta) = \sigma_{1n}(\xi) T_{z_n - 1/2}^{(1)}(\cos \theta), \quad \sigma_{\theta n}(\xi, \theta) = \sigma_{2n}(\xi) \operatorname{ctg} \theta T_{z_n - 1/2}^{(1)}(\cos \theta) + \sigma_{3n}(\xi) T_{z_n - 1/2}(\cos \theta)$$

В качестве постоянных A_{in} , B_{in} , C_{in} , D_{in} в функциях u_n , φ_n возьмем алгебраические дополнения к первой строке матрицы a_{ij} .

Первое граничное условие в (3.1) с использованием условия (3.2) приводит к уравнению

$$M_n P_{z_n - 1/2}^{(1)}(\cos \theta_1) + N_n Q_{z_n - 1/2}^{(1)}(\cos \theta_1) = H_n \quad (3.3)$$

$$H_n = \left[\int_{-1}^1 e^{2\varepsilon\xi} (\varphi_n \sigma_{3n} - u_n \sigma_{1n}) d\xi \right]^{-1} \int_{-1}^1 e^{2\varepsilon\xi} (v \sigma_{3n} - \tau \sigma_{1n}) d\xi$$

Второе граничное условие в (3.1) дает

$$M_n P_{z_n - 1/2}^{(1)}(\cos \theta_2) + N_n Q_{z_n - 1/2}^{(1)}(\cos \theta_2) = 0 \quad (3.4)$$

Из неоднородной системы (3.3), (3.4) определяются постоянные M_n и N_n . Суммирование однородных решений в порядке, соответствующем возрастанию $\operatorname{Im} z_n > 0$ корней уравнения (1.4), позволяет находить характеристики напряженно-деформированного состояния с заданной точностью.

Численный анализ рассматриваемой задачи проведен в случае отсутствия сил трения при $v(\xi) = \delta [1 - c \operatorname{sh}^{-2} \varepsilon (e^{\varepsilon\xi} - \operatorname{ch} \varepsilon)^2]$, что соответствует параболическому закону изменения $v(\xi)$ по толщине.

На фиг. 4–6 приведены зависимости напряжений σ_θ от координаты θ на внутренней сферической границе оболочки и на срединной поверхности. Кривые 1 соответствуют проникающему решению, а кривые 2 — трехмерному. Граничные условия при расчетах выполнялись с относительной погрешностью не более 0,5%. При этом учитывалось до 14–18 элементарных потенциальных решений. При расчетах полагали $\delta = 1$, $c = 0,3$, $v_1 = v_2 = v_3 = 0,3$, $\theta_1 = 3^\circ$, $\theta_2 = 80^\circ$.

Для тонких оболочек $\varepsilon_0 = 0,01$ с достаточно мягким наполнителем $p = 10^{-4}$, 10^{-2} и тонкими внешними несущими слоями ($\alpha_1 = 0,1$, $\alpha_2 = 1,8$, $\alpha_3 = 0,1$; $\alpha_1 = 0,3$, $\alpha_2 = 1,6$, $\alpha_3 = 0,1$; $\alpha_1 = 0,1$, $\alpha_2 = 1,6$, $\alpha_3 = 0,3$) и в несущих слоях и в наполнителе погранслоя локализован у боковой поверхности, где его поправка может достигать значительной величины. В несущих слоях она может достигать 150–200% ($p = 10^{-2}$, $\varepsilon_0 = 0,01$, $\alpha_1 = 0,3$, $\alpha_2 = 1,6$, $\alpha_3 = 0,1$ (фиг. 4)). На боковой поверхности наполнителя погранслоя добавка может превышать проникающее решение в 10–15 раз ($p = 10^{-2}$, $\varepsilon_0 = 0,01$, $\alpha_1 = 0,3$, $\alpha_2 = 1,6$, $\alpha_3 = 0,1$ (фиг. 5)). При этом в окрестности ребер оболочки появляются зоны отрицательных контактных давлений (фиг. 4), что эквивалентно появлению зон отрыва.

С увеличением кривизны оболочки до $\varepsilon_0 = 0,1$ ($p = 10^{-2}$, $\alpha_1 = 0,1$, $\alpha_2 = 1,8$, $\alpha_3 = 0,1$) затухание погранслоевых решений более медленное, а их поправка к проникающему решению у боковой поверхности несущих слоев составляет — 25%, в наполнителе — 40%.

Для толстых оболочек с мягким наполнителем и толстыми несущими слоями ($p = 10^{-4}$, $\varepsilon_0 = 0,5$, $\alpha_1 = 0,5$, $\alpha_2 = 1,0$, $\alpha_3 = 0,5$ (фиг. 6)) добавка слабого погранслоя к проникающему решению достигает значительной величины не только в краевой зоне, но и в глубине области, где она составляет 20–25%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зюзин В. А., Мусяка В. Г.* Осесимметричная деформация полой многослойной сферы.— В кн.: Теоретические и экспериментальные исследования прочности, устойчивости и динамики конструкций. Днепропетровск: Изд. Днепропетр. гос. ун-та, 1973, с. 3—5.
2. *Зюзин В. А., Мусяка В. Г.* Осесимметричная деформация многослойной сферической оболочки.— В кн.: Теоретические и экспериментальные исследования прочности, устойчивости и динамики конструкций. Днепропетровск: Изд-е ДГУ, 1973, с. 6—10.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 4, с. 593—608.
4. *Гутман С. Г.* Общее решение задачи теории упругости в обобщенных цилиндрических координатах.— Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники, 1948, т. 37, с. 89—101.
5. *Пуро А. Э.* Разделение уравнений теории упругости при радиальной неоднородности.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 1139—1144.
6. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
7. *Боев Н. В.* Качественный анализ задачи кручения трехслойной сферической оболочки.— Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Естеств. науки, 1978, № 4, с. 21—25.
8. *Кадолицев И. Г.* Краевой эффект в трехслойной плите.— Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Естеств. науки, 1973, № 4, с. 35—37.
9. *Устинов Ю. А.* О структуре погранслоя в слоистых плитах.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 2, с. 325—328.
10. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
20.XII.1983