МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1985

УДК 539.3

О РЕШЕНИИ ФИЗИЧЕСКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

ТРОШИН В. Г.

При рассмотрении физически и геометрически нелинейных задач статики тонкостенных конструкций наиболее часто используется техническая теория оболочек [1] и теория малых упругопластических деформаций [2], а геометрическая нелинейность учитывается в квадратичном приближении. При этом линеаризация физических соотношений осуществляется, как правило, с помощью методов либо дополнительных нагрузок [2], либо переменных параметров упругости (жесткости) [3], что на каждом шаге итерации приводит к линейной системе разрешающих уравнений в частных производных.

При рассмотрении геометрически нелинейных задач решение может осуществляться или сведением исходных уравнений к обыкновенным дифференциальным или алгебраическим уравнениям, или с помощью непосредственной линеаризации системы разрешающих уравнений. При одновременном учете обоих нелинейных факторов наиболее удобен второй подход, где линеаризация разрешающих уравнений не связана с конкретным способом решения краевой задачи. Основными методами, реализующими такой подход, являются метод простой итерации и метод последовательных нагружений [4]. В [5] линеаризация осуществляется введением дополнительных параметров кривизны, кручения и изгибной жесткости. В публикуемой работе рассматриваются несколько способов линеаризации исходной системы разрешающих уравнений, которые учитывают оба нелинейных фактора в рамках единого итерационного процесса и обобщают указанные выше подходы.

1. В рамках технической теории и теории малых упругопластических деформаций рассматривается задача о равновесии тонкой изотропной оболочки с учетом геометрической нелинейности в квадратичном приближении. Оболочка находится под действием произвольной системы сил с компонентами X_1, X_2, X_3 в системе координат $\alpha_1\alpha_2 z$ (α_1, α_2 — направления главных кривизн k_1, k_2, z — нормаль к поверхности приведения). Толщина оболочки h_1+h_2 произвольная и может быть несимметричной относительно поверхности приведения. Система разрешающих уравнений в смешанной форме относительно прогиба w и функции напряжений Φ, описывающая равновесие оболочки с учетом сжимаемости материала, может быть получена с помощью методики [6], если учесть, что связь между мембранными усилиями N_{ij}, изгибающими и крутящими моментами M_{ij} и компонентами тензора деформации ε_{ij}, изменения кривизн и кручения $\varkappa_{ij}$ поверхности приведения имеет вид

$$\begin{gathered}
N_{11}=a_0\varepsilon_{11}+b_0\varepsilon_{22}+a_1\varkappa_{11}+b_1\varkappa_{22},\quad N_{22}=b_0\varepsilon_{11}+a_0\varepsilon_{22}+b_1\varkappa_{11}+a_1\varkappa_{22}\\
N_{12}=(a_0-b_0)\varepsilon_{12}/2+(a_1-b_1)\varkappa_{12},\quad M_{11}=a_1\varepsilon_{11}+b_1\varepsilon_{22}+a_2\varkappa_{11}+b_2\varkappa_{22}\\
M_{22}=b_1\varepsilon_{11}+a_1\varepsilon_{22}+b_2\varkappa_{11}+a_1\varkappa_{22},\quad M_{12}=(a_1-b_1)\varepsilon_{12}/2+(a_2-b_2)\varkappa_{12}\\
a_k=\int\limits_{-h_1}^{h_2}\frac{Ez^k}{1-\nu^2}dz,\quad b_k=\int\limits_{-h_1}^{h_2}\frac{\nu Ez^k}{1-\nu^2}dz\quad (k=0,1,2)
\end{gathered}\tag{1.1}$$

где E, ν — переменные модуль упругости и коэффициент Пуассона, зависящие от отношения интенсивностей тензоров напряжений и деформаций (см. [3]).

Окончательно система разрешающих уравнений может быть приведена к виду

$$\Delta(D_1\Delta w+S_2\Delta\Phi)+\Delta_k\Phi-L(D_2,\ w)+L(S_1,\ \Phi)+L(w,\ \Phi)=p_1 \quad (1.2)$$

$$\Delta(H_1\Delta\Phi-S_2\Delta w)-\Delta_k w-L(H_2,\ \Phi)-L(S_1,\ w)-L(w,\ w)/2=p_2$$

$$p_1=\Delta[(2S_2+S_1)U]+(k_1+k_2)U+X_3, \qquad p_2=\Delta[(2H_1-H_2)U]$$

$$H_1=a_0/(a_0^2-b_0^2), \qquad H_2=1/(a_0-b_0)$$

$$S_1=(a_1-b_1)/(a_0-b_0), \qquad S_2=(a_0b_1-a_1b_0)/(a_0^2-b_0^2)$$

$$D_1=a_2-\frac{a_0(a_1^2+b_1^2)-2a_1b_0b_1}{a_0^2-b_0^2}, \quad D_2=a_2-b_2-\frac{(a_1-b_1)^2}{a_0-b_0}$$

Здесь U — потенциал компонент касательной нагрузки X_1 и X_2, Δ, Δ_k, L — известные дифференциальные операторы (см., например, [5]), H_i, S_i, D_i — жесткостные параметры оболочки, зависящие от ее напряженно-деформированного состояния.

Система (1.2) является обобщением уравнений [6] для случая переменного модуля упругости и коэффициента Пуассона. Данная система является существенно нелинейной, так как кроме билинейных операторов, учитывающих геометрическую нелинейность, в нее входят жесткостные параметры, зависящие от разрешающих функций. В общем случае эта зависимость не может быть получена в явном виде.

Жесткостные параметры, как функции w и Φ, определяются обычно численным интегрированием, причем подынтегральная функция ищется в процессе последовательных приближений. Однако если предположить, что в пластической стадии деформирования материал оболочки несжимаемый ($\nu=0{,}5$), то для конкретного вида обобщенной диаграммы растяжения — сжатия эта зависимость может быть получена в аналитическом виде. Например, для диаграммы с линейным упрочнением с модулем упругости E_0, модулем упрочнения E_1 и деформацией текучести ε_t будем иметь

$$a_k=\frac{E_0}{1-\nu_0^2}\frac{\zeta_2^{k+1}-\zeta_1^{k+1}}{k+1}+\frac{4}{3}[P_k(-h_1,\zeta_1)+P_k(\zeta_2,h_2)]$$

$$b_k=\frac{\nu_0E_0}{1-\nu_0^2}\frac{\zeta_2^{k+1}-\zeta_1^{k+1}}{k+1}+\frac{2}{3}[P_k(-h_1,\zeta_1)+P_k(\zeta_2,h_2)] \quad (1.3)$$

$$P_k(z_1,z_2)=E_1\frac{z_2^{k+1}-z_1^{k+1}}{k+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}(E_0-E_1)\varepsilon_t\int_{z_1}^{z_2}\frac{z^k\,dz}{(B_1z^2-2B_2z+b_3)^{1/2}}$$

где ν_0 — коэффициент Пуассона для упругого состояния, B_i — величины, зависящие от разрешающих функций w и Φ, ζ_j — аппликаты границы раздела зон упругих и пластических деформаций по толщине оболочки, которые также вычисляются через w и Φ.

Интегралы, входящие в (1.3), являются табличными и могут быть найдены в элементарных функциях. Таким образом, соотношения (1.3) определяют в явном виде зависимость жесткостных параметров оболочки от разрешающих функций w и Φ.

По аналогии с [5] введем в рассмотрение следующие величины (α — некоторая константа):

$$\varphi_1=\alpha\Phi-D_2, \qquad \varphi_2=(1-\alpha)w+S_1, \qquad \varphi_3=w/2+S_1 \quad (1.4)$$

Система (1.2) может быть приведена к виду

$$R_1 \equiv \Delta(D_1\Delta w + S_2\Delta\Phi) + \Delta_k\Phi + L(\varphi_1, w) + L(\varphi_2, \Phi) = p_1 \qquad (1.5)$$
$$R_2 \equiv \Delta(H_1\Delta\Phi - S_2\Delta w) - \Delta_k w - L(H_2, \Phi) - L(\varphi_3, w) = p_2$$

2. Рассмотрим некоторые возможные способы линеаризации системы уравнений (1.5).

2.1. Решение системы (1.5) будем искать в процессе последовательных приближений, строя итерационный процесс по схеме

$$R_j[W^{(k)}, D^{(k-1)}] = p_j \qquad (j=1, 2) \qquad (2.1)$$

где W — вектор разрешающих функций w, Φ, а D — вектор жесткостных параметров H_i, S_i, D_i, φ_i.

Задаем некоторое начальное приближение $W^{(0)}$ и для него из (1.3) и (1.4) определяем параметры жесткости $D^{(0)}$. Подставляя эти величины в (2.1) и решая полученную линейную систему относительно W, получаем следующее приближение $W^{(1)}$. Процесс продолжается до достижения требуемой точности. На каждом шаге итерации следует решать линейную систему дифференциальных уравнений вида (2.1) с уточняемыми от шага к шагу коэффициентами.

Если рассматривать геометрически линейную задачу ($\varphi_1 = -D_2$, $\varphi_2 = \varphi_3 = S_1$), то придем к методу переменных параметров жесткости. При рассмотрении упругой геометрически нелинейной задачи ($\varphi_1 = \alpha\Phi$, $\varphi_2 = (1-\alpha)w$, $\varphi_3 = w/2$, H_i, S_i, D_i — заданные функции координат) получаем соотношения подхода [5]. В общем случае и физическая, и геометрическая нелинейности учитываются одновременно в рамках единого итерационного процесса.

2.2. Предположим, что найдено решение системы (1.5) W и соответствующие значения параметров жесткости D для некоторой нагрузки p_j. Эти величины удовлетворяют системе уравнений вида

$$R_j[W, D] = p_j \qquad (j=1, 2) \qquad (2.2)$$

Дадим нагрузке некоторое приращение δp_j. Соответствующие приращения получат разрешающие функции δW и параметры жесткости δD. Новое состояние описывается системой уравнений

$$R_j[W+\delta W, D+\delta D] = p_j + \delta p_j \qquad (j=1, 2) \qquad (2.3)$$

Если из (2.3) вычесть уравнения (2.2) и перенести в правую часть все слагаемые, содержащие приращения параметров жесткости, то для определения приращений разрешающих функций может быть построен следующий итерационный процесс:

$$R_j[\delta W^{(k)}, D] = \delta p_j + q_j^{(k-1)} \quad (j=1,2), \quad q_j^{(k-1)} = -R_j[W+\delta W^{(k-1)}, \delta D^{(k-1)}] \qquad (2.4)$$

Задаем некоторое начальное приближение $\delta W^{(0)}$ и для $W+\delta W^{(0)}$ находим соответствующие значения параметров жесткости $D^{(0)}$ и их приращения $\delta D^{(0)}$. Для этих величин строим начальное приближение $q_j^{(0)}$. Подставляя $q_j^{(0)}$ в (2.4) и решая полученную линейную систему дифференциальных уравнений, находим следующее приближение $\delta W^{(1)}$. Процесс продолжается до достижения требуемой точности. Коэффициенты системы (2.4) — заданные величины и не меняются в процессе последовательных приближений. Таким образом, на каждом шаге итерации следует решать систему вида (2.4) с неизменной левой частью и уточняемыми грузовыми членами.

Если для геометрически линейной задачи в (2.4) положить $q_j = 0$, то приходим к шаговому методу. Если для упругой геометрически нелинейной задачи в (2.4) пренебрегать членами вида $\delta W \cdot \delta\varphi_i$, то получаем соотношения метода последовательных нагружений. Отбрасывание этих членов приводит, как правило, к накоплению погрешности линеаризации в процессе нагружения. В общем случае весь процесс нагружения разбивается на ряд этапов, на каждом из которых в качестве коэффициентов системы (2.4) выбираются параметры жесткости с предыдущего этапа нагружения, а приращения разрешающих функций в пределах этапа уточняются итерационно.

Следует отметить, что при подходе (2.1) на каждом шаге итерации уточняются все коэффициенты системы (2.1), а при подходе (2.2) – только правые части системы (2.4). Следовательно, в первом случае на каждом шаге итерации следует строить общее решение однородной системы (или пересчитывать всю матрицу соответствующего алгебраического аналога), а во втором – только частное решение неоднородной системы (столбец свободных членов). Таким образом, с вычислительной точки зрения алгоритм, соответствующий подходу (2.2), является более экономичным. Однако подход (2.1) может быть несколько модифицирован.

2.3. Для решения системы (1.5) построим следующий итерационный процесс: зададим некоторое начальное приближение $W^{(0)}$ и из (1.3) и (1.4) найдем параметры жесткости $D^{(0)}$. Подставляем эти значения в систему (2.1), решая которую определяем $W^{(1)}$. В дальнейшем итерационный процесс строим по следующей схеме:

$$R_j[W^{(k)}, D^{(0)}] = p_j + q_j^{(k-1)} \quad (j=1,2) \tag{2.5}$$

$$q_j^{(k-1)} = -R_j[W^{(k-1)}, \delta D^{(k-1)}], \quad \delta D^{(k-1)} = D^{(k-1)} - D^{(0)}$$

В этом случае на каждом шаге итерации следует решать систему вида (2.5), коэффициенты которой не изменяются в процессе последовательных приближений, а уточняются только правые части. Если для геометрически линейной задачи в (2.5) в качестве $D^{(0)}$ принять упругие жесткости оболочки, то придем к методу дополнительных нагрузок. Если для упругой геометрически нелинейной задачи положить $\varphi_i^{(0)}=0$, то получим соотношения метода простой итерации.

Соотношения подходов (2.2) и (2.3) отличаются только коэффициентами систем (2.4) и (2.5). Если при подходе (2.2) эти коэффициенты известны с предыдущего этапа нагружения, то при подходе (2.3) они вычисляются на первом шаге итерационного процесса.

Таким образом, рассмотренные способы обобщают указанные выше методы линеаризации физически и геометрически нелинейных уравнений технической теории оболочек. В этих способах учет обоих нелинейных факторов осуществляется в рамках единого итерационного процесса.

3. Так как рассматривается геометрически нелинейная задача, то кривая деформирования может быть функцией немонотонной и для ее построения алгоритм должен предусматривать смену ведущего параметра. Для этого внешнюю нагрузку представим в виде $p_j=Qp_{j0}(\alpha_1, \alpha_2)$ $(j=1, 2)$, где p_{j0} – заданные функции координат, Q – неизвестная константа.

Система разрешающих уравнений для каждого шага итерации запишется так:

$$R_j[W, D] = Qp_{j0} + q_j \quad (j=1, 2) \tag{3.1}$$

При подходе (2.1) в системе (3.1) следует положить $q_j=0$, а при подходе (2.2) в качестве W следует принять приращения разрешающих функций, а в качестве Q – приращение параметра нагрузки δQ. Предположим, что линеаризованная система дифференциальных уравнений (3.1) каким-либо образом дискретизирована, т. е. решение определяется через N независимых переменных z_j. Система (3.1) в этом случае заменяется некоторым алгебраическим аналогом $\sum A_{ij}z_j = QP_i + F_i$ $(i, j=1, 2, \ldots, N)$. В силу линейности решение этой системы представимо в виде

$$z_j = Q\xi_{1j} + \xi_{2j}, \qquad \sum_{j=1}^{N} A_{ij}\xi_{1j} = P_i, \qquad \sum_{j=1}^{N} A_{ij}\xi_{2j} = F_i \tag{3.2}$$

Кривую деформирования построим в $(N+1)$-мерном пространстве переменных z_j и параметра нагрузки Q. Весь процесс нагружения разобьем на ряд этапов, на каждом из которых в качестве ведущего параметра λ может быть принята некоторая комбинация переменных z_j и Q, т. е. $\lambda = G(z_1, z_2, \ldots, z_N, Q)$.

Если в качестве G взять линейную форму этих переменных, то решение ищется на гиперплоскости. Если данная плоскость параллельна одной из координатных плоскостей, то приходим к обычному варианту метода продолжения по параметру [7]. В [5] решение отыскивалось на плоскости, нормальной к прямой, проходящей через две точки, соответствующие предыдущим этапам нагружения, а в качестве ведущего принимался параметр этой прямой. В [8] в качестве ведущего параметра принималась длина дуги S кривой деформирования, а в качестве G выбиралось уравнение гиперсферы радиусом ΔS_p (приращение длины дуги на p-м этапе нагружения) с центром в точке $z_j^{(p)}$, соответствующей предыдущему этапу нагружения

$$(Q-Q^{(p)})^2+\sum_{j=1}^{N}(z_j-z_j\quad)^2=\Delta S_p^2 \tag{3.3}$$

Подставляя (3.2) в (3.3) и разрешая полученное соотношение относительно Q, получаем

$$Q=[C_2\pm\sqrt{C_2^2-C_1(C_3-\Delta S_p^2)}]/C_1 \tag{3.4}$$

$$C_1=1+\sum_{j=1}^{N}\xi_{1j}^2,\quad C_2=Q^{(p)}-\sum_{j=1}^{N}\xi_{1j}(\xi_{2j}-z_j^{(p)}),$$

$$C_3=(Q^{(p)})^2+\sum_{j=1}^{N}(\xi_{2j}-z_j^{(p)})^2$$

Соотношение (3.4) определяет значение параметра нагрузки на каждом шаге итерационного процесса и совместно с (3.2) дает решение z_j. Так как кривая деформирования обязательно пересекает поверхность сферы, то такой выбор ведущего параметра всегда обеспечивает существование решения (подкоренное выражение в (3.4) при правильном выборе начального приближения всегда положительно).

Так как решение ищется в конечном числе точек, соответствующем выбранному числу этапов нагружения, то кривая деформирования заменяется многозвенной ломаной, а длина дуги определяется расстоянием между соседними точками. В качестве начальной точки, в которой строится сфера (3.3), может быть принято начало координат $z_j=0$. Приращение длины дуги ΔS_0 в начале движения следует выбирать таким образом, чтобы, во-первых, на первом этапе оболочка оставалась упругой и, во-вторых, влияние геометрической нелинейности было заведомо незначительным, например при максимальном прогибе порядка 0,2 толщины оболочки. В дальнейшем ΔS_p может увеличиваться либо уменьшаться в зависимости от скорости сходимости итерационного процесса на предыдущем этапе нагружения. По аналогии с [5] можно зафиксировать некоторое число итераций r_0, а приращение дуги на p-м этапе нагружения брать в виде $\Delta S_p=\Delta S_{p-1}+(r_0-r_{p-1})/(r_0+r_{p-1})$, где r_{p-1} — число итераций, которое потребовалось для построения решения на предыдущем этапе нагружения.

При отсутствии точек ветвления на кривой деформирования каждому значению S соответствует единственный вектор решения $\{z_1, z_2, \ldots, z_N, Q\}$. Поэтому при построении итерационного процесса на p-м нагружении нулевое приближение $z_j^{(p0)}$ можно выбирать в виде полинома Лагранжа n-й степени по переменной S

$$z_j^{(p0)}=\sum_{i=p-n-1}^{p-1} z_j^{(i)}\frac{(S-S_{p-n-1})\dots(S-S_{i-1})}{(S_i-S_{p-n-1})\dots(S_i-S_{i-1})}\frac{(S-S_{i+1})\dots(S-S_{p-1})}{(S_i-S_{i+1})\dots(S_i-S_{p-1})} \tag{3.5}$$

Соотношение (3.4) дает два действительных значения параметра Q, одно из которых соответствует предыдущему этапу нагружения, а другое — последующему. Для правильного выбора значения Q (соответствующего последующему этапу) следует построить по аналогии с (3.5) начальное значение $Q^{(p0)}$, а затем из (3.4) выбрать Q, ближайшее к $Q^{(p0)}$. Если при этом итерационный процесс все-таки сойдется к точке, соответствующей предыдущему этапу, то начальное приближение для Q выбрано неверно и следует опять вернуться в исходную точку и строить итерационный процесс, сменив знак в (3.4) на противоположный.

Для иллюстрации сходимости построенных алгоритмов в качестве примера рассмотрена пологая над планом оболочка, для которой можно считать, что метрика поверхности приведения совпадает с метрикой плоскости. Вычисления выполнялись для прямоугольной в плане $a\times b$ сферической панели ($k_1=k_2=k$) постоянной толщины $2h$, края которой опираются шарнирно подвижно. Решение линеаризованной системы (3.1) отыскивалось методом Бубнова – Галеркина в двойных тригонометрических рядах. В этом случае в качестве переменных z_j выступают коэффициенты разложения в ряд Фурье прогиба и функции напряжения w_{nm}, Φ_{nm}. При вычислении квадратур метода Бубнова – Галеркина применялась процедура двойного интегрирования по частям, что позволяло избежать дифференцирования жесткостных параметров H_i, S_i, D_i, φ_i. Сходимость итерационного процесса контролировалась с помощью величины $|(Q^{(k)}-Q^{(k-1)})/Q^{(k-1)}|+\sum|(z_j^{(k)}-z_j^{(k-1)})/z_j^{(k-1)}|<\varepsilon$, где ε — заданная точность, k — номер приближения.

Вычисления выполнялись для случая равномерно распределенной поперечной нагрузки p_0 ($p_1=p_0$, $p_2=0$) и для следующих значений физико-геометрических параметров: $b=a$, $\nu_0=0{,}3$, $E_1/E_0=0{,}01$, $k=36\,a/h^2$, $S_t=\varepsilon_t a^2/h^2=20$, 40, 60, ∞.

Значение приведенного предела текучести $S_t=\infty$ соответствует чисто упругому случаю деформирования. Кривые деформирования строились в пространстве безразмерных переменных $w_{1nm}=w_{nm}/h$, $\Phi_{1nm}=\Phi_{nm}/(E_0h^3)$, $p_{10}=10^{-3}p_0a^4/(E_0h^4)$ равномерным приращением длины дуги, причем величина приращения ΔS выбиралась в зависимости от значения приведенного предела текучести S_t. Для упругого случая $S_t=\infty$ величина приращения выбиралась равной $\Delta S=1$, что на начальном шаге обеспечивало прогиб в центре панели порядка $0{,}2h$. Для остальных значений S_t приращение ΔS принималось в виде $\Delta S=S_t/100$, что позволяло алгоритму сделать два-три этапа нагружения после появления пластических деформаций до достижения первой предельной точки.

Итерационный процесс строился в трех рассмотренных вариантах, в каждом из которых сходимость осуществлялась до достижения точности $\varepsilon=1\%$. При этом оказалось, что решения, полученные по каждому из вариантов в рамках заданной точности, не отличаются друг от друга. Кроме того, оказалось, что скорость сходимости итерационных процессов в вариантах (2.2) и (2.3) абсолютно одинакова. Для варианта (2.1) скорость сходимости несколько лучше, чем вариантов (2.2) и (2.3), но на докритическом участке (до предельной точки) это отличие весьма несущественно (одна-две итерации).

На закритическом участке скорость сходимости вариантов (2.2) и (2.3) резко ухудшается, а при значительных прогибах (порядка две-три толщины) сходимость процессов нарушается. В то же время итерационный процесс в варианте (2.1) устойчиво сходится при весьма значительных прогибах (до пяти-шести толщин). Ниже приведены результаты вычислений в варианте (2.1) для упругого случая (в (1.4) принималось $\alpha=0$; начальное приближение строилось в форме (3.5) при $n=3$; в тригонометрических рядах удерживалось 9 членов)

w/h	0,202	0,414	0,639	0,881	1,143	1,433	1,765	2,171	2,750	3,736
p_{10}	0,404	0,788	1,149	1,484	1,788	2,053	2,269	2,409	2,399	2,039
k	3	4	3	3	3	6	5	8	13	9

w – прогиб в центре панели, p_{10} – параметр нагрузки, k – число итераций, которое потребовалось для построения решения с точностью 1% на данном этапе нагружения.

В таблице приведены те же величины для значений $S_t=20$, 40, 60, причем данные приводятся с момента появления пластических деформаций (до этой точки они

$\frac{w}{h}$	p_{10}	k	$\frac{w}{h}$	p_{10}	k	$\frac{w}{h}$	p_{10}	k
0,668	1,045	8	1,282	1,793	5	2,204	2,294	8
0,770	1,096	10	1,473	1,861	7	2,617	2,315	9
0,890	1,136	9	1,721	1,891	9	2,945	2,301	12
1,033	1,157	10	2,067	1,833	12	3,262	2,081	9
1,198	1,156	19	2,351	1,780	8	3,547	1,911	8

совпадают с приведенными данными). Видно, что скорость сходимости итерационного процесса в окрестности предельной точки несколько ухудшается.

Вычислительные затраты при использовании итерационного процесса в варианте (2.1) растут пропорционально квадрату числа степеней свободы задачи (число удерживаемых членов ряда). При использовании вариантов (2.2) и (2.3) они увеличиваются пропорционально первой степени этой величины. Таким образом, варианты (2.2) или (2.3), с вычислительной точки зрения, являются более экономичными по сравнению с вариантом (2.1), что особенно сказывается при решении задачи в высоких приближениях. Поэтому при построении кривых деформирования на докритическом участке следует использовать варианты (2.2) или (2.3) итерационного процесса, дающих хорошую сходимость при минимальных вычислительных затратах. После прохождения предельной точки алгоритм следует переключить на вариант (2.1) итерационного процесса, так как сходимость вариантов (2.2) и (2.3) резко ухудшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.– Л.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
2. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.– Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
3. *Биргер И. А.* Некоторые общие методы решения задач теории пластичности.– ПММ, 1951, т. 15, вып. 6, с. 765–770.
4. *Петров В. В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. 119 с.
5. *Трошин В. Г.* Об одном подходе к решению геометрически нелинейных задач технической теории оболочек.– ПММ, 1983, т. 47, вып. 1, с. 101–107.
6. *Lukasiewicz S.* The equations of the technical theory of shells of variable rigidity.– Arch. Mech. Stosow., 1961, v. 13, No. 1, p. 107–116.
7. *Валишвили Н. В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
8. *Трошин В. Г.* Выбор ведущего параметра при решении геометрически нелинейных задач технической теории оболочек при многопараметрическом нагружении.– В кн.: Актуальные проблемы механики оболочек: Тез. докл. Всесоюзной школы молодых ученых. Казань: Изд-е Казан. авиац. ин-та, 1983, с. 212–213.

Днепропетровск

Поступила в редакцию 17.XI.1983