МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1985

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ ОСНОВАНИЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

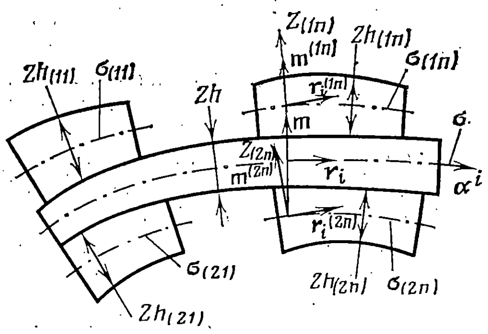
ПАЙМУШИН В. Н., ФИРСОВ В. А.

Задачи контактного взаимодействия различных деформируемых тел в настоящее время изучены достаточно подробно [1–3]. В публикуемой статье рассматривается не изученный ранее класс деформируемых систем, представляющих собой тонкую оболочку, скрепленную по некоторым участкам внешней и внутренней лицевых поверхностей с деформируемыми основаниями переменной толщины, расположенными сверху или снизу оболочки. Предполагается, что у внешних лицевых поверхностей верхних оснований и внутренних поверхностей нижних оснований заданы известные векторы смещений.

При линейной аппроксимации векторов перемещений в основаниях по их толщине построена приближенная теория контактного взаимодействия оболочки с основаниями указанного вида при их конечных перемещениях, базирующаяся на применении соотношений теории «типа Тимошенко» без учета напряжений поперечного обжатия в оболочке.

Выводятся вариационные и дифференциальные уравнения, отвечающие предварительному удовлетворению условиям сопряжения оболочки с основаниями по перемещениям, а также рассматривается вариант упрощения основных зависимостей для случая трансверсально-мягких оснований.

1. Постановка задачи. Пусть пространство оболочки V ограничено граничной поверхностью $S=\Sigma+S^{(+)}+S^{(-)}$, состоящей из внешней $S^{(+)}$ и внутренней $S^{(-)}$ лицевых поверхностей и поверхности граничного среза Σ. Произвольную точку M этого пространства будем определять радиус-вектором $\mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2)$ точек срединной поверхности σ, отнесенной к гауссовым координатам α^1, α^2, и расстоянием z, измеренным по направлению единичной нормали $\mathbf{m}$ к σ. Предположим, что на конечном множестве подобластей поверхностей $S^{(+)}$ и $S^{(-)}$ оболочка скреплена с n_1 (верхними) и n_2 (нижними) деформируемыми основаниями, пространства $V_{(ln)}$ которых определены векторами $\boldsymbol{\rho}^{(ln)}$ в следующей форме:



Фиг. 1

$$\boldsymbol{\rho}^{(ln)}=\mathbf{r}^{(ln)}+z_{(ln)}\mathbf{m}^{(ln)}\ (-h_{(ln)}\leqslant z_{(ln)}\leqslant h_{(ln)}) \tag{1.1}$$

Здесь и дальше для верхних оснований индексу l присваивается значение 1, а индекс n пробегает значения 0, 1, ... n_1; для нижних оснований $l=2$, $n=\overline{0, n_2}$ (0 — в случае отсутствия оснований); $h_{(ln)}$ — толщины оснований; $z_{(ln)}$ — координатные оси, направленные по единичным нормалям $\mathbf{m}^{(ln)}$ к срединным поверхностям $\sigma_{(ln)}$ оснований; $\mathbf{r}^{(ln)}$ — радиус-векторы точек поверхностей $\sigma_{(ln)}$, которые в соответствии с [4] будем определять равенствами (фиг. 1)

$$\mathbf{r}^{(ln)}=\mathbf{r}+\delta_{(l)}t^{(ln)}\mathbf{m}=\mathbf{r}+H^{(ln)}\mathbf{m}, \qquad H^{(ln)}=\delta_{(l)}t^{(ln)} \tag{1.2}$$

В этих и последующих формулах символам $\delta_{(l)}$ присваивается значение 1 для верхних и -1 — для нижних оснований.

Равенство (1.2) представляет собой отображение поверхностей $\sigma_{(ln)}$ на срединную поверхность оболочки σ методом конечных фиктивных деформаций [5]. Поэтому по аналогии с соотношениями дифференциальной геометрии, известными в теории конечных деформаций поверхностей [6], для $\sigma_{(ln)}$ можно выписать формулы, по которым определяются базисные векторы

$$\begin{gathered}\mathbf{r}_i^{(ln)}=\partial\mathbf{r}^{(ln)}/\partial\alpha^i=\mathbf{r}_k(\delta_i^k-\theta_i^{(ln)k})+\mathbf{m}y_i^{(ln)}\\ \mathbf{m}^{(ln)}=D_{(ln)}^{-1/2}(\mathbf{m}\Pi_3^{(ln)}+\mathbf{r}^i\Pi_i^{(ln)})\end{gathered} \tag{1.3}$$

ковариантные компоненты первого $a_{ik}^{(ln)}$ и второго $b_{ik}^{(ln)}$ метрических тензоров

$$\begin{gathered}a_{ik}^{(ln)}=a_{ik}+2d_{ik}^{(ln)}, \quad b_{ik}^{(ln)}=-D_{(ln)}^{-1/2}\{y_k^{(ln)}\nabla_i\Pi_3^{(ln)}+(\delta_k^j+\theta_k^{(ln)j})\nabla_i\Pi_j^{(ln)}-\\ -b_{ij}[\Pi_3^{(ln)}(\delta_k^j+\theta_k^{(ln)j})-y_k^{(ln)}\Pi_{(ln)}^j]\}\end{gathered} \tag{1.4}$$

а также формулы Гаусса — Вейнгартена для $\mathbf{r}_i^{(ln)}$, $\mathbf{m}_i^{(ln)}$:

$$\begin{gathered}\partial\mathbf{r}^{(ln)}/\partial\alpha^k=\Gamma_{ik}^{(ln)j}\mathbf{r}_j^{(ln)}+\mathbf{m}^{(ln)}b_{ik}^{(ln)}, \quad \mathbf{m}_i^{(ln)}=\partial\mathbf{m}^{(ln)}/\partial\alpha^i=-b_i^{(ln)k}\mathbf{r}_k^{(ln)}\\ \nabla_i^{(ln)}\mathbf{r}_k^{(ln)}=\mathbf{m}^{(ln)}b_{ik}^{(ln)}, \quad \nabla_i^{(ln)}\mathbf{r}_{(ln)}^k=\mathbf{m}^{(ln)}b_i^{(ln)k},\end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\nabla_i^{(ln)}\mathbf{m}^{(ln)}=-b_i^{(ln)k}\mathbf{r}_k^{(ln)} \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered}\theta_i^{(ln)k}=-H^{(ln)}b_i^k, \quad y_i^{(ln)}=\nabla_iH^{(ln)}=\partial H^{(ln)}/\partial\alpha^i\\ \Pi_i^{(ln)}=y_k^{(ln)}\theta_i^{(ln)k}-y_i^{(ln)}(1+\theta_1^{(ln)1}+\theta_2^{(ln)2}), \quad \Pi_3^{(ln)}=(1+\theta_1^{(ln)1})(1+\theta_2^{(ln)2})-\\ -\theta_2^{(ln)1}\theta_1^{(ln)2}\\ D_{(ln)}=1+2d_i^{(ln)i}+4(d_1^{(ln)1}d_2^{(ln)2}-d_1^{(ln)2}d_2^{(ln)1})\\ 2d_{ik}^{(ln)}=\theta_{ik}^{(ln)}+\theta_{ki}^{(ln)}+a^{js}\theta_{ij}^{(ln)}\theta_{ks}^{(ln)}+y_i^{(ln)}y_k^{(ln)}\\ \theta_{ik}^{(ln)}=-H^{(ln)}b_{ik}, \quad b_i^k=a^{ks}b_{si}, \quad b_i^{(ln)k}=a_{(ln)}^{ks}b_{si}^{(ln)}, \quad d_i^{(ln)k}=a_{(ln)}^{ks}d_{si}^{(ln)}\end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь ∇_i и $\nabla_i^{(ln)}$ — знаки ковариантного дифференцирования в метриках a_{ik} и $a_{ik}^{(ln)}$ соответственно, δ_i^k — символ Кронекера, $a_{ik}=\mathbf{r}_i\mathbf{r}_k$, $b_{ik}=-\mathbf{r}_i\mathbf{m}_k=-\mathbf{r}_k\mathbf{m}_i$ — ковариантные компоненты первого и второго метрических тензоров на σ, $\Gamma_{ik}^{(ln)j}$ — символы Кристоффеля второго рода на $\sigma_{(ln)}$.

Большой интерес для практики представляет рассмотрение оболочек, скрепленных с такими основаниями, у которых срединные поверхности $\sigma_{(ln)}$ пологи относительно σ в смысле [4], когда (ε — некоторая малая величина, которой можно пренебречь по сравнению с единицей) $y_i^{(ln)}\sim\varepsilon^{1/2}$.

Будем также считать, что в оболочке и основаниях с точностью $1+\varepsilon\approx 1$ допустимо пренебрежение изменением метрик соответствующих пространств в направлениях $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}^{(ln)}$, полагая в дальнейшем $\delta_i^k+\theta_i^{(ln)k}\approx\delta_i^k$, $\delta_{ik}+\theta_{ik}^{(ln)}\approx\delta_{ik}$, $\delta_i^k+zb_i^k\approx\delta_i^k$. Тогда формулы (1.3) и (1.4) могут быть существенно упрощены и с точностью $1+\varepsilon\approx 1$ приведены к виду

$$\mathbf{r}_i^{(ln)}\approx\mathbf{r}_i+\mathbf{m}y_i^{(ln)},\qquad \mathbf{m}^{(ln)}\approx\mathbf{m}-\mathbf{r}^i y_i^{(ln)} \tag{1.8}$$

$$a_{ik}^{(ln)}\approx a_{ik},\qquad b_{ik}^{(ln)}\approx b_{ik}+\nabla_i y_k^{(ln)} \tag{1.9}$$

так как $\Pi_i^{(ln)}\approx -y_i^{(ln)}$, $\Pi_3^{(ln)}\approx 1$, $2d_{ik}^{(ln)}\approx\varepsilon$, $D_{(ln)}\approx 1$. Кроме того, в силу условия $a_{ik}^{(ln)}\approx a_{ik}$ знаки ковариантного дифференцирования $\nabla_i^{(ln)}$ в метриках $a_{ik}^{(ln)}$ можно заменить знаком ковариантного дифференцирования ∇_i в метрике a_{ik}, что приводит к упрощению формул (1.6)

$$\nabla_i^{(ln)}\mathbf{r}_k^{(ln)}\approx\nabla_i\mathbf{r}_k^{(ln)}=\mathbf{m}^{(ln)}b_{ik}^{(ln)},\qquad \nabla_i^{(ln)}\mathbf{r}^k_{(ln)}\approx\nabla_i\mathbf{r}^k_{(ln)}=\mathbf{m}^{(ln)}b_i^{(ln)k}$$

$$\nabla_i^{(ln)}\mathbf{m}^{(ln)}\approx\nabla_i\mathbf{m}^{(ln)}=-b_i^{(ln)k}\mathbf{r}_k^{(ln)} \tag{1.10}$$

Назовем лицевые поверхности $z_{(ln)}=h_{(ln)}$ верхних оснований и $z_{(ln)}=-h_{(ln)}$ нижних оснований опорными и будем считать, что известны перемещения их точек, заданные векторами

$$\mathbf{U}^{(ln)}=U_i^{(ln)}\mathbf{r}^i_{(ln)}+U_3^{(ln)}\mathbf{m}^{(ln)}=U^i_{(ln)}\mathbf{r}_i^{(ln)}+U_3^{(ln)}\mathbf{m}^{(ln)} \tag{1.11}$$

Механику деформирования описанной системы будем рассматривать с позиции контактных задач, введя в рассмотрение реакции взаимодействия между оболочкой и основаниями и определяя их из условий стыковки элементов системы.

2. Перемещения и деформации оболочки и оснований. В контактных задачах теории пластин и оболочек важным является вопрос выбора математических моделей контактирующих элементов, влияющих на реакцию взаимодействия на поверхностях их контакта [1]. В рассматриваемом случае простейшие уравнения теории контактного взаимодействия оболочек с основаниями могут быть построены, если ограничиться линейными аппроксимациями векторов перемещений оболочки $\mathbf{V}^z$ и оснований $\mathbf{V}^{z(ln)}$ по поперечным координатам z и $z_{(ln)}$:

$$\mathbf{V}^z=\mathbf{v}+z\boldsymbol{\gamma}=(u_i+z\gamma_i)\mathbf{r}^i+(w+z\gamma)\mathbf{m}\qquad(-h\leqslant z\leqslant h,\ \alpha^i\in\Omega) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{V}^{z(ln)}=\mathbf{v}^{(ln)}+z_{(ln)}\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}=(u_i^{(ln)}+z_{(ln)}\gamma_i^{(ln)})\mathbf{r}^i_{(ln)}+(w^{(ln)}+z_{(ln)}\gamma^{(ln)})\mathbf{m}^{(ln)} \tag{2.2}$$

$$(-h_{(ln)}\leqslant z_{(ln)}\leqslant h_{(ln)},\quad \alpha^i\in\Omega_{(ln)})$$

Здесь Ω — область с границей Γ на срединной поверхности оболочки, $\Omega_{(ln)}$ — подобласти области Ω с границами $\Gamma_{(ln)}$, которые согласно (1.2) взаимно однозначно соответствуют срединным поверхностям оснований $z_{(ln)}$, имеющих граничные контуры $C_{(ln)}$. Согласно принятому предположению, векторы (2.2) должны удовлетворять условиям $\mathbf{V}^z_{(ln)}(z_{(ln)}=\delta_{(l)}h_{(ln)})=\mathbf{v}^{(ln)}+\delta_{(l)}h_{(ln)}\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}=\mathbf{U}^{(ln)}$, откуда $\mathbf{v}^{(ln)}=\mathbf{U}^{(ln)}-b_{(ln)}\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}$, где $b_{(ln)}=\delta_{(l)}\cdot h_{(ln)}$. Поэтому

$$\mathbf{V}^z_{(ln)}=\mathbf{U}^{(ln)}+(z_{(ln)}-b_{(ln)})\boldsymbol{\gamma}^{(ln)} \tag{2.3}$$

Представление векторов $\mathbf{V}^z$ и $\mathbf{V}^z_{(ln)}$ в виде разложений (2.1), (2.2) соответствует применению простейшей сдвиговой модели в оболочке и основаниях, на которой базируется детально разработанная к настоящему времени уточненная теория типа Тимошенко. Компоненты деформации оболочки по этой модели с точностью $\delta_i^k+zb_i^k\approx\delta_i^k$ при конечных перемещениях вычисляются по формулам [6, 7]:

$$\varepsilon_{ik}^z=\varepsilon_{ik}+z\varkappa_{ik},\qquad \varepsilon_{i3}^z\approx\varepsilon_{i3},\qquad 2\varepsilon_{33}=2\mathbf{m}\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}\tag{2.4}$$

$$2\varepsilon_{ik}=\mathbf{r}_i\mathbf{v}_k+\mathbf{r}_k\mathbf{v}_i+\mathbf{v}_i\mathbf{v}_k$$

$$2\varkappa_{ik}=\mathbf{r}_i\boldsymbol{\gamma}_k+\mathbf{r}_k\boldsymbol{\gamma}_i+\mathbf{v}_i\boldsymbol{\gamma}_k+\mathbf{v}_k\boldsymbol{\gamma}_i$$

$$2\varepsilon_{i3}=\mathbf{r}_i\boldsymbol{\gamma}+(\mathbf{m}+\boldsymbol{\gamma})\mathbf{v}_i\qquad (i,\ k=1,\ 2)$$

$$\mathbf{v}_i=\partial\mathbf{v}/\partial\alpha^i=e_{ik}\mathbf{r}^k+\omega_i\mathbf{m}\tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_i=\partial\boldsymbol{\gamma}/\partial\alpha^i=\Omega_{ik}\mathbf{r}^k+\Omega_i\mathbf{m}$$

$$e_{ik}=\nabla_i u_k-b_{ik}w,\qquad \omega_i=\nabla_i w+b_i^k u_k$$

$$\Omega_{ik}=\nabla_i\gamma_k-b_{ik}\gamma,\qquad \Omega_i=\nabla_i\gamma+b_i^k\gamma_k$$

Компоненты деформации при произвольных перемещениях с точностью $\delta_i^k+z_{(ln)}b_i^{(ln)k}\approx\delta_i^k$ и с учетом формул $\partial\mathbf{V}^{z(ln)}/\partial z_{(ln)}=\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}$, следующим из (2.3), выражаются по формулам

$$2\varepsilon_{ik}^{z(ln)}=\mathbf{r}_i^{(ln)}\mathbf{V}_k^{z(ln)}+\mathbf{r}_k^{(ln)}\mathbf{V}_i^{z(ln)}+\mathbf{V}_i^{z(ln)}\mathbf{V}_k^{(ln)}\tag{2.6}$$

$$2\varepsilon_{i3}^{z(ln)}=\mathbf{r}_i^{(ln)}\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}+\mathbf{V}_i^{z(ln)}(\mathbf{m}^{(ln)}+\boldsymbol{\gamma}^{(ln)})\qquad (i,k=1,2),\qquad 2\varepsilon_{33}^{(ln)}=$$

$$=2\mathbf{m}^{(ln)}\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}+\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}$$

в которых частные производные $\mathbf{V}_i^{z(ln)}=\partial\mathbf{V}^{z(ln)}/\partial\alpha^i$ в силу приближенных формул (1.10) определены равенствами

$$\mathbf{V}_i^{z(ln)}=\mathbf{U}_i^{(ln)}+(z_{(ln)}-b_{(ln)})\boldsymbol{\gamma}_i^{(ln)}-y_i^{(ln)}\boldsymbol{\gamma}^{(ln)},\qquad y_i^{(ln)}=\nabla_i b_{(ln)}\tag{2.7}$$

$$\mathbf{U}_i^{(ln)}=E_{ik}^{(ln)}\mathbf{r}_{(ln)}^k+E_i^{(ln)}\mathbf{m}^{(ln)},\qquad \boldsymbol{\gamma}_i^{(ln)}=\Omega_{ik}^{(ln)}\mathbf{r}_{(ln)}^k+\Omega_i^{(ln)}\mathbf{m}^{(ln)}\tag{2.8}$$

$$E_{ik}^{(ln)}=\nabla_i U_k^{(ln)}-b_{ik}^{(ln)}U_3^{(ln)},\qquad E_i^{(ln)}=\nabla_i U_3^{(ln)}+$$

$$+b_i^{(ln)k}U_k^{(ln)}$$

$$\Omega_{ik}^{(ln)}=\nabla_i\gamma_k^{(ln)}-b_{ik}^{(ln)}\gamma^{(ln)},\qquad \Omega_i^{(ln)}=\nabla_i\gamma^{(ln)}+b_i^{(ln)}\gamma_k^{(ln)}$$

Для коэффициентов $y_{i,3}^{(ln)}$ входящих в (2.7), в рамках принятых ограничений на изменение толщин оболочки и оснований имеют место оценки $y_i^{(ln)}\sim\varepsilon^{1/2}$. Поэтому для вычисления компонент тангенциальных и сдвиговых деформаций в основаниях целесообразно пользоваться формулами следующего приближения $(\mathbf{r}_i^{*(ln)}=\mathbf{r}_i^{(ln)}+\nabla_i\mathbf{U}^{(ln)}-y_i^{(ln)}\boldsymbol{\gamma}^{(ln)})$:

$$\varepsilon_{ik}^{z(ln)}=\varepsilon_{ik}^{o(ln)}+\varepsilon_{ik}^{(ln)}+(z_{(ln)}-b_{(ln)})\varkappa_{ik}^{(ln)}\tag{2.9}$$

$$\varepsilon_{i3}^{z(ln)}=\varepsilon_{i3}^{o(ln)}+\varepsilon_{i3}^{(ln)}+(z_{(ln)}-b_{(ln)})\varkappa_{i3}^{(ln)},$$

$$2\varepsilon_{ik}^{o(ln)}=\mathbf{r}_i^{(ln)}\mathbf{U}_k^{(ln)}+\mathbf{r}_k^{(ln)}\mathbf{U}_i^{(ln)}+U_i^{(ln)}\mathbf{U}_k^{(ln)},$$

$$2\varepsilon_{ik}^{(ln)}=-[(\mathbf{r}_i^{(ln)}+\mathbf{U}_i^{(ln)})y_k^{(ln)}+(\mathbf{r}_k^{(ln)}+\mathbf{U}_k^{(ln)})y_i^{(ln)}]\boldsymbol{\gamma}^{(ln)},$$

(2.10)

$$2\varkappa_{ik}^{(ln)}=\overset{*}{\mathbf{r}}_i^{(ln)}\gamma_k^{(ln)}+\overset{*}{\mathbf{r}}_k^{(ln)}\gamma_i^{(ln)}$$

$$2\varepsilon_{i3}^{o(ln)}=\mathbf{m}^{(ln)}\mathbf{U}_i^{(ln)},\qquad 2\varkappa_{i3}^{(ln)}=(\mathbf{m}^{(ln)}+\boldsymbol{\gamma}^{(ln)})\boldsymbol{\gamma}_i^{(ln)}$$

$$2\varepsilon_{i3}^{(ln)}=\mathbf{r}_i^{(ln)}\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}+(\mathbf{U}_i^{(ln)}-y_i^{(ln)}\boldsymbol{\gamma}^{(ln)})(\mathbf{m}^{(ln)}+\boldsymbol{\gamma}^{(ln)})$$

полученными при пренебрежении членами, содержащими сомножители $(z_{(ln)}-b_{(ln)})^2$ и $y_i^{(ln)}y_k^{(ln)}\sim\varepsilon$. Подстановка (2.5), (2.8) и разложений $\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}=\gamma_i^{(ln)}\mathbf{r}^{i}_{(ln)}+\gamma^{(ln)}\mathbf{m}^{(ln)}$, $\boldsymbol{\gamma}=\gamma_i\mathbf{r}^i+\gamma\mathbf{m}$ в соответствующие формулы для компонент деформаций приводит к кинематическим соотношениям в скалярной форме:

для оболочки [6, 7]:

$$2\varepsilon_{ik}=e_{ik}+e_{ki}+e_{ip}e_{km}a^{pm}+\omega_i\omega_k$$

$$2\varkappa_{ik}=\Omega_{ij}(\delta_k^j+e_k^j)+\Omega_{kj}(\delta_i^j+e_i^j)+\omega_i\Omega_k+\omega_k\Omega_i$$

$$2\varepsilon_{i3}=\omega_i(1+\gamma)+\gamma^k(\delta_{ik}+e_{ik}),\qquad 2\varepsilon_{33}=2\gamma+\gamma^2+\gamma_i\gamma^i$$

для оснований

$$2\varepsilon_{ik}^{o(ln)}=E_{ik}^{(ln)}+E_{ki}^{(ln)}+E_{ip}^{(ln)}E_{km}^{(ln)}a^{pm}+E_k^{(ln)}E_i^{(ln)}$$

$$2\varepsilon_{ik}^{(ln)}=-y_i^{(ln)}\gamma^{m}_{(ln)}(\delta_{km}+E_{km}^{(ln)})-y_k^{(ln)}\gamma^{p}_{(ln)}(\delta_{ip}+E_{ip}^{(ln)})-$$

$$-\gamma^{(ln)}(y_i^{(ln)}E_k^{(ln)}+y_k^{(ln)}E_i^{(ln)})$$

$$2\varkappa_{ik}^{(ln)}=\Omega_{ij}^{(ln)}(\delta_k^j+E_k^{(ln)j}-y_k^{(ln)}\gamma^{j}_{(ln)})+\Omega_{kj}^{(ln)}(\delta_i^j+E_i^{(ln)j}-y_i^{(ln)}\gamma^{j}_{(ln)})+$$

$$+\Omega_k^{(ln)}(E_i^{(ln)}-y_i^{(ln)}\gamma^{(ln)})+\Omega_i^{(ln)}(E_k^{(ln)}-y_k^{(ln)}\gamma^{(ln)}),\qquad 2\varepsilon_{i3}^{o(ln)}=E_i^{(ln)}$$

$$2\varepsilon_{i3}^{(ln)}=\gamma_i^{(ln)}-y_i^{(ln)}\gamma^{(ln)}+(E_{ik}^{(ln)}-y_i^{(ln)}\gamma_k^{(ln)})\gamma^{k}_{(ln)}+(E_i^{(ln)}-y_i^{(ln)}\gamma^{(ln)})\gamma^{(ln)}$$

$$2\varepsilon_{33}^{(ln)}=2\gamma^{(ln)}+\gamma_i^{(ln)}\gamma^{i}_{(ln)}+\gamma^{(ln)}\gamma^{(ln)}$$

3. Уравнения равновесия и граничные условия. Обобщенное вариационное уравнение Лагранжа. Обозначим через $\mathbf{q}^{(ln)}$ векторы усилий взаимодействия, действующих на оболочку со стороны оснований, соответственно верхних ($l=1$) и нижних ($l=2$).

Со стороны оболочки будут, очевидно, действовать усилия $\mathbf{q}^{(-)}=-\mathbf{q}^{(1n)}$ $(\alpha^i\in\Omega_{(1n)},\ z_{(1n)}=-h_{(1n)},\ z=h)$ на верхние основания и $\mathbf{q}^{(+)}=-\mathbf{q}^{(2n)}$ $(\alpha^i\in\in\Omega_{(2n)},\ z_{(2n)}=h_{(2n)},\ z=-h)$ — на нижние. Пусть $\mathbf{F}^{(ln)}$, $\mathbf{F}$ — векторы массовых сил в основаниях и оболочке, отнесенные к единицам соответствующих объемов, $\mathbf{p}^{(+)}$, $\mathbf{p}^{(-)}$ — векторы заданных поверхностных сил, приложенных в точках $z=\pm h$, $\alpha^i\in\Omega\backslash\Omega_{(ln)}$ лицевых поверхностей оболочки. Введем для оболочки в рассмотрение векторы поверхностных усилий по формулам

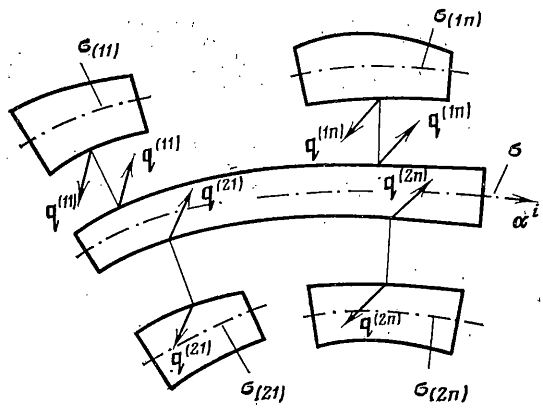
$$\mathbf{X}^{(+)}=\Delta\mathbf{p}^{(+)}+\Delta_{(1)}\mathbf{q}^{(1n)},\qquad \mathbf{X}^{(-)}=\Delta\mathbf{p}^{(-)}+\Delta_{(2)}\mathbf{q}^{(2n)}\tag{3.1}$$

в которых целочисленные коэффициенты Δ и $\Delta_{(l)}$ определены равенствами: $\Delta=1$, $\Delta_{(l)}=0\,\forall\alpha^i\in\Omega\backslash\Omega_{(ln)}$ и $\Delta=0$, $\Delta_{(l)}=1\,\forall\alpha^i\in\Omega_{(ln)}$. Предполагая граничные срезы $\Sigma_{(ln)}$ оснований свободными от внешних воздействий, составим функционал обобщенного вариационного принципа [8]:

$$I=\int_\Gamma(\mathbf{R}^s\mathbf{v}+\mathbf{G}^s\boldsymbol{\gamma})\,d\Gamma+\iint_{\Omega\backslash\Omega_{(ln)}}[\mathbf{p}^{(+)}(\mathbf{v}+h\boldsymbol{\gamma})+p^{(-)}(\mathbf{v}-h\boldsymbol{\gamma})]\,d\sigma+$$

$$+\iiint_V[\mathbf{F}(\mathbf{v}+z\boldsymbol{\gamma})-W]\,dz\,d\sigma+\sum_{l,n}\Big\{\iint_{\Omega_{(ln)}}[\mathbf{q}^{(ln)}(\mathbf{v}+\delta_{(l)}h\boldsymbol{\gamma})-\mathbf{q}^{(ln)}(\mathbf{U}^{(ln)}-\tag{3.2}$$

$$-2b_{(ln)}\boldsymbol{\gamma}^{(ln)})\,d\sigma]+\iiint_{V_{(ln)}}\{\mathbf{F}^{(ln)}[\mathbf{U}^{(ln)}+(z_{(ln)}-b_{(ln)})\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}-W_{(ln)}\}\,d\sigma\,dz_{(ln)}$$



Фиг. 2

Данный функционал отличается от традиционного функционала Лагранжа членами, выражающими работу реактивных усилий $q^{(ln)}$ на соответствующих им перемещениях. В нем через $\mathbf{R}^s$, $\mathbf{G}^s$ обозначены заданные векторы контурных усилий и моментов, действующих на оболочку, через W, $W_{(ln)}$ — удельные потенциальные энергии деформаций оболочки и оснований.

В соответствии с [8] составим вариационное уравнение $\delta I=0$, вводя при этом общепринятое в теории типа Тимошенко предположение о равенстве нулю напряжения поперечного обжатия в оболочке. В результате после приведения внешних и внутренних усилий и моментов к поверхности σ:

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}^{(+)}+\mathbf{X}^{(-)}+\int_{-h}^{h}\mathbf{F}\,dz,\quad \mathbf{M}=h(\mathbf{X}^{(+)}-\mathbf{X}^{(-)})+\int_{-h}^{h}\mathbf{F}z\,dz \tag{3.3}$$

$$T^{ik}=\int_{-h}^{h}\sigma^{ik}\,dz,\quad M^{ik}=\int_{-h}^{h}\sigma^{ik}z\,dz,\quad N^{i}=\int_{-h}^{h}\sigma^{i3}\,dz \tag{3.4}$$

опорным поверхностям оснований

$$\mathbf{M}^{(ln)}=\int_{-h(ln)}^{h(ln)}\mathbf{F}^{(ln)}(z_{(ln)}-b_{(ln)})\,dz_{(ln)}+2b_{(ln)}\mathbf{q}^{(ln)} \tag{3.5}$$

$$T^{ik}_{(ln)}=\int_{-h(ln)}^{h(ln)}\sigma^{ik}_{(ln)}dz_{(ln)},\quad M^{ik}_{(ln)}=\int_{-h(ln)}^{h(ln)}\sigma^{ik}_{(ln)}(z_{(ln)}-b_{(ln)})\,dz_{(ln)} \tag{3.6}$$

$$N^{i}_{(ln)}=\int_{-h(ln)}^{h(ln)}\sigma^{i3}_{(ln)}dz_{(ln)},\quad M^{i3}_{(ln)}=\int_{-h(ln)}^{h(ln)}\sigma^{i3}_{(ln)}(z_{(ln)}-b_{(ln)})\,dz_{(ln)},$$

$$N^{3}_{(ln)}=\int_{-h(ln)}^{h(ln)}\sigma^{33}_{(ln)}dz_{(ln)}$$

и ряда традиционных преобразований получим (с учетом (2.4)—(2.10)):

$$\delta I=\int_{\Gamma}(\mathbf{R}^s\delta\mathbf{v}+\mathbf{G}^s\delta\boldsymbol{\gamma})\,d\Gamma+\iint_{\Omega}(\mathbf{X}\delta\mathbf{v}+\mathbf{M}\delta\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{R}^k\nabla_k\delta\mathbf{v}-\mathbf{G}^k\nabla_k\delta\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{Q}\delta\boldsymbol{\gamma})\,d\sigma+$$

$$+\sum_{l,n}\iint_{\Omega(ln)}(\mathbf{f}^{(ln)}\delta\mathbf{q}^{(ln)}+\mathbf{M}^{(ln)}\delta\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}-\mathbf{R}^{k}_{(ln)}\nabla_k\delta\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}-\mathbf{Q}^{(ln)}\delta\boldsymbol{\gamma}^{(ln)})\,d\sigma=0 \tag{3.7}$$

$$\mathbf{R}^k=T^{ik}\mathbf{r}_i^*+M^{ik}\nabla_i\boldsymbol{\gamma}+N^k(\mathbf{m}+\boldsymbol{\gamma}),\qquad \mathbf{G}^k=M^{ik}\mathbf{r}_i^*$$

$$\mathbf{Q}=N^k\mathbf{r}_k^*,\quad \mathbf{R}^k_{(ln)}=M^{ik}_{(ln)}\mathbf{r}_i^{*(ln)}+M^{k3}_{(ln)}\boldsymbol{\rho}_3^{*(ln)}$$

$$\mathbf{Q}^{(ln)}=-T^{ik}_{(ln)}\mathbf{r}_i^{*(ln)}y_k^{(ln)}-M^{ik}_{(ln)}y_k^{(ln)}\nabla_i\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}+N^i_{(ln)}(\mathbf{r}_i^{*(ln)}-y_3^{(ln)}\boldsymbol{\rho}_3^{*(ln)})+$$

$$+M^{i3}_{(ln)}\nabla_i\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}+N^3_{(ln)}\boldsymbol{\rho}_3^{*(ln)}$$

$$\mathbf{r}_i^*=\mathbf{r}_i+\nabla_i\mathbf{v},\quad \mathbf{r}_i^{*(ln)}=\mathbf{r}_i^{(ln)}+\nabla_i\mathbf{U}^{(ln)}-y_i^{(ln)}\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}$$

$$\boldsymbol{\rho}_3^{*(ln)}=\mathbf{m}^{(ln)}+\boldsymbol{\gamma}^{(ln)},\quad \mathbf{f}^{(ln)}=\mathbf{v}+\delta_{(l)}h\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{U}^{(ln)}+2b_{(ln)}\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}$$

Введем на контуре Г правосторонний триэдр $\{\mathbf{n},\ \boldsymbol{\tau},\ \mathbf{m}\}$, в котором $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ являются единичными векторами тангенциальной нормали и касательной к Г, заданные разложениями в основном и взаимном базисах поверхности σ:

$$\mathbf{n}=n^i\mathbf{r}_i=n_i\mathbf{r}^i,\qquad \boldsymbol{\tau}=\tau^i\mathbf{r}_i=\tau_i\mathbf{r}^i \tag{3.8}$$

Формулы, аналогичные (3.8), имеют место и для единичных векторов $\mathbf{n}^{(ln)}$, $\boldsymbol{\tau}^{(ln)}$ тангенциальных нормалей и касательных к контурным кривым $C_{(ln)}$:

$$\mathbf{n}^{(ln)}=n^{i}_{(ln)}\mathbf{r}_i^{(ln)}=n_i^{(ln)}\mathbf{r}^i_{(ln)},\qquad \boldsymbol{\tau}^{(ln)}=\tau^i_{(ln)}\mathbf{r}_i^{(ln)}=\tau_i^{(ln)}\mathbf{r}^i_{(ln)} \tag{3.9}$$

представляющим геометрическое место граничных точек срединных поверхностей оснований, причем в силу пологости $\sigma_{(ln)}$ относительно σ справедливы приближенные равенства $dC_{(ln)}\approx d\Gamma_{(ln)}$, где $\Gamma_{(ln)}$ — граничные контуры подобластей $\Omega_{(ln)}\in\Omega$.

Для преобразования в (3.7) поверхностных интегралов в контурные имеют место формулы

$$\iint_{\Omega}\nabla_i B^i\,d\sigma=\int_{\Gamma}B^in_i\,d\Gamma,$$
$$\iint_{\Omega(ln)}\nabla_i B^i d\sigma=\int_{\Gamma(ln)}B^in_i^{(ln)}\,d\Gamma_{(ln)} \tag{3.10}$$

в результате применения которых вместо (3.7) получим

$$\delta I=\int_{\Gamma}[(\mathbf{R}^s-\mathbf{R})\delta\mathbf{v}+(\mathbf{G}^s-\mathbf{G})\delta\boldsymbol{\gamma}]d\Gamma+\iint_{\Omega}(\mathbf{S}\delta\mathbf{v}+\mathbf{Y}\delta\boldsymbol{\gamma})\,d\sigma+$$
$$+\sum_{l,n}\left[-\int_{\Gamma(ln)}\mathbf{R}^{(ln)}\delta\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}d\Gamma_{(ln)}+\iint_{\Omega(ln)}(\mathbf{f}^{(ln)}\delta\mathbf{q}^{(ln)}+\boldsymbol{\Phi}^{(ln)}\delta\boldsymbol{\gamma}^{(ln)})\,d\sigma\right]=0 \tag{3.11}$$

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}^kn_k,\quad \mathbf{G}=\mathbf{G}^kn_k,\quad \mathbf{R}^{(ln)}=\mathbf{R}^k_{(ln)}n_k^{(ln)}$$

В силу произвольности вариаций $\delta\mathbf{v}$, $\delta\boldsymbol{\gamma}$, $\delta\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}$ и $\delta\mathbf{q}^{(ln)}$ отсюда следуют: уравнения равновесия оболочки

$$\mathbf{S}=\nabla_k\mathbf{R}^k+\mathbf{X}=0,\qquad \mathbf{Y}=\nabla_k\mathbf{G}^k+\mathbf{M}-\mathbf{Q}=0\qquad (\alpha^i\in\Omega) \tag{3.12}$$

оснований

$$\boldsymbol{\Phi}^{(ln)}=\nabla_k\mathbf{R}^k_{(ln)}-\mathbf{Q}^{(ln)}+\mathbf{M}^{(ln)}=0\quad (\alpha^i\in\Omega_{(ln)}) \tag{3.13}$$

кинематические условия сопряжения оболочки с основаниями

$$\mathbf{f}^{(ln)}=\mathbf{v}+\delta_{(l)}h\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{U}^{(ln)}+2b_{(ln)}\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}=0\quad (\alpha^i\in\Omega_{(ln)}) \tag{3.14}$$

статические граничные условия на контурах Γ и $\Gamma_{(ln)}$

$$\mathbf{R}^s - \mathbf{R} = 0 \text{ при } \delta\mathbf{v} \neq 0, \quad \mathbf{G}^s - \mathbf{G} = 0 \text{ при } \delta\boldsymbol{\gamma} \neq 0 \tag{3.15}$$

$$\mathbf{R}^{(ln)} = 0 \quad \text{при} \quad \delta\boldsymbol{\gamma}^{(ln)} \neq 0 \tag{3.16}$$

Для решения конкретных задач выведенные уравнения должны быть представлены в скалярной форме. Такие скалярные уравнения, отнесенные к осям как деформированной, так и недеформированной срединной поверхности оболочки, для векторных уравнений (3.12), граничных условий (3.15) и соответствующего им вариационного уравнения, содержащегося в (3.11), построены в [7]. Аналогичным образом могут быть построены скалярные формы уравнений (3.13), граничных условий (3.16), условий сопряжения (3.14) и общего вариационного уравнения (3.11).

Следует отметить, что особенностью полученных вариационных уравнений является то, что при решении задач исследуемого класса по методу Ритца с помощью (3.7) или по методу Бубнова — Галеркина с помощью (3.11) аппроксимирующие функции строятся как для компонент векторов $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}$, так и для компонент векторов реактивных усилий $\mathbf{q}^{(ln)}$.

4. Уравнения, соответствующие предварительному удовлетворению кинематическим условиям сопряжения оболочки с основаниями. Использование условий (3.14) позволяет выразить векторы поворотов оснований через заданные векторы смещений опорных поверхностей и неизвестные векторы перемещений и поворотов оболочки

$$\boldsymbol{\gamma}^{(ln)} = {}^1/_2\mathbf{U}^{(ln)}/b_{(ln)} - {}^1/_2\mathbf{v}/b_{(ln)} - (h/h_{(ln)})\boldsymbol{\gamma} \tag{4.1}$$

Из этих зависимостей следуют формулы для ковариантных производных

$$\begin{gathered}\nabla_i\boldsymbol{\gamma}^{(ln)} = {}^1/_2\nabla_i\mathbf{U}^{(ln)}/b_{(ln)} + d_i^{(ln)}\mathbf{U}^{(ln)} - {}^1/_2\nabla_i\mathbf{v}/b_{(ln)} - \\ - d_i^{(ln)}\mathbf{v} - (h/h_{(ln)})\nabla_i\boldsymbol{\gamma} - h_i^{(ln)}\boldsymbol{\gamma}\end{gathered} \tag{4.2}$$

$$d_i^{(ln)} = \nabla_i({}^1/_2b_{(ln)}), \quad h_i^{(ln)} = \nabla_i(h/h_{(ln)})$$

Внесем выражения (4.1), (4.2) в уравнение (3.7) и по аналогии с (3.1) введем в рассмотрение векторы следующих видов:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} - \sum_{l=1}^{2} \Delta_{(l)} \frac{\mathbf{M}^{(ln)}}{2b_{(ln)}}, \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{L} = \mathbf{M} - \sum_{l=1}^{2} \Delta_{(ln)} \frac{h}{h_{(ln)}} \mathbf{M}^{(ln)} \quad (\alpha^i \in \Omega) \\ \mathbf{C}^k = \mathbf{R}^k - \sum_{l=1}^{2} \Delta_{(l)} \frac{R^k_{(ln)}}{2b_{(ln)}}, \\ \mathbf{D}^k = \mathbf{G}^k - \sum_{l=1}^{2} \Delta_{(l)}\mathbf{R}^k_{(ln)} \frac{h}{h_{(ln)}}\end{gathered} \tag{4.4}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q} - \sum_{l=1}^{2}\left(h_k^{(ln)}\mathbf{R}^k_{(ln)} + \frac{h}{h_{(ln)}}\mathbf{Q}^{(ln)}\right)\Delta_{(l)},$$

$$\mathbf{T} = \sum_{l=1}^{2} \Delta_{(l)}\left(\mathbf{R}^k_{(ln)}d_k^{(ln)} + \mathbf{Q}^{(ln)}\frac{h}{h}\right) \quad (\alpha^i \in \Omega)$$

В результате вместо (3.7) приходим к вариационному уравнению принципа возможных перемещений

$$\delta I=\int\limits_{\Gamma}(\mathbf{R}^s\delta\mathbf{v}+\mathbf{G}^s\delta\boldsymbol{\gamma})\,d\Gamma+\iint\limits_{\Omega}[(\mathbf{Z}+\mathbf{T})\delta\mathbf{v}+(\mathbf{L}-\mathbf{K})\delta\boldsymbol{\gamma}-$$
$$-\mathbf{C}^k\nabla_k\delta\mathbf{v}-\mathbf{D}^k\nabla_k\delta\boldsymbol{\gamma}]\,d\sigma=0 \qquad (4.5)$$

которое после преобразования поверхностных интегралов в контурные с помощью первой формулы из (3.10) примет вид

$$\delta I=\int\limits_{\Gamma}[(\mathbf{R}^s-\mathbf{C})\delta\mathbf{v}+(\mathbf{G}^s-\mathbf{D})\delta\boldsymbol{\gamma}]\,d\Gamma+\iint\limits_{\Omega}[(\nabla_k\mathbf{C}^k+\mathbf{Z}+\mathbf{T})\delta\mathbf{v}+$$
$$+(\nabla_k\mathbf{D}^k+\mathbf{L}-\mathbf{K})\delta\boldsymbol{\gamma}]\,d\sigma=0 \qquad (4.6)$$

где $\mathbf{C}=\mathbf{C}^k n_k$, $\mathbf{D}=\mathbf{D}^k n_k$ — векторы обобщенных контурных усилий и моментов. Из (4.6) следуют векторные уравнения равновесия

$$\nabla_k\mathbf{C}^k+\mathbf{Z}+\mathbf{T}=0, \quad \nabla_k\mathbf{D}^k+\mathbf{L}-\mathbf{K}=0 \qquad (4.7)$$

и статические граничные условия на контуре Γ:

$$\mathbf{R}^s-\mathbf{C}=0 \quad \text{при} \quad \delta\mathbf{v}\neq0, \qquad \mathbf{G}^s-\mathbf{D}=0 \quad \text{при} \quad \delta\boldsymbol{\gamma}\neq0 \qquad (4.8)$$

Подстановкой (3.1), (3.3) и (3.5) в равенстве (4.3) устанавливаем, что в векторах

$$\mathbf{Z}=\Delta(\mathbf{p}^{(+)}+\mathbf{p}^{(-)})+\int\limits_{-h}^{h}\mathbf{F}\,dz-\sum_{l=1}^{2}\frac{\Delta_{(l)}}{2b_{(ln)}}\int\limits_{-h(ln)}^{h(ln)}\mathbf{F}^{(ln)}(z_{(ln)}-b_{(ln)})\,dz_{(ln)}$$
$$\mathbf{L}=\Delta h(\mathbf{p}^{(+)}-\mathbf{p}^{(-)})+\int\limits_{-h}^{h}\mathbf{F}z\,dz-\sum_{l=1}^{2}\Delta_{(l)}\frac{h}{h_{(ln)}}\int\limits_{-h(ln)}^{h(ln)}\mathbf{F}^{(ln)}(z_{(ln)}-b_{(ln)})\,dz_{(ln)} \qquad (4.9)$$

не содержатся реактивные усилия взаимодействия $\mathbf{q}^{(ln)}$. Следовательно, в уравнениях (4.5), (4.6), (4.7) и граничных условиях (4.8) неизвестными задачи являются лишь векторы $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, так как через них могут быть выражены все остальные неизвестные, если воспользоваться не приведенными здесь физическими соотношениями и формулами (3.4), (3.6), (4.1), (4.2), (4.4). Однако при этом не удается удовлетворить на контурах $\Gamma_{(ln)}$ граничным условиям (3.16), что следует из рассмотрения уравнений (4.5) и (4.6). В случае кусочно-непрерывных оснований скалярные формы уравнений (4.7) являются дифференциальными уравнениями с кусочно-непрерывными коэффициентами и они по структуре полностью совпадают с уравнениями теории оболочек типа Тимошенко кусочно-переменной толщины.

Если геометрические и жесткостные параметры оболочки и оснований, а также характер деформирования рассматриваемой системы удовлетворяют некоторым условиям [9], позволяющим отнести основания к классу трансверсально-мягких, то построенные уравнения допускают существенные упрощения за счет введения допущений $\overset{ik}{\sigma}_{(ln)}\approx0$. В трансверсально-мягких основаниях с большой степенью точности можно считать поперечные сдвиги $2\overset{z(ln)}{\varepsilon_{i3}}$ постоянными по их толщине, что позволяет пренебречь в соотношениях (2.9) величинами $\overset{(ln)}{\varkappa_{i3}}$. При таких предположениях согласно (3.6) приходим к равенствам $\overset{ik}{T}_{(ln)}=\overset{ik}{M}_{(ln)}=\overset{i3}{M}_{(ln)}=0$, в соответствии с которыми $\overset{k}{\mathbf{R}}_{(ln)}=0$, $\mathbf{Q}^{(ln)}=\overset{i}{N}_{(ln)}(\overset{*(ln)}{\mathbf{r}_i}-\overset{(ln)}{y_i}\overset{*(ln)}{\boldsymbol{\rho}_3})+\overset{3}{N}_{(ln)}\overset{*(ln)}{\boldsymbol{\rho}_3}$.

Данным упрощениям при контактной постановке задач отвечает вариационное уравнение

$$\delta I=\int\limits_{\Gamma}[(\mathbf{R}^s-\mathbf{R})\delta\mathbf{v}+(\mathbf{G}^s-\mathbf{G})\delta\boldsymbol{\gamma}]d\Gamma+\iint\limits_{\Omega}(\mathbf{S}\delta\mathbf{v}+\mathbf{Y}\delta\boldsymbol{\gamma})d\sigma+$$

$$+\sum_{l,n}\iint\limits_{\Omega(ln)}[\mathbf{f}^{(ln)}\delta\mathbf{q}^{(ln)}+(\mathbf{M}^{(ln)}-\mathbf{Q}^{(ln)})\delta\boldsymbol{\gamma}^{(ln)}]d\sigma=0$$

при предварительном удовлетворении условиям (3.14) – вариационное уравнение

$$\delta I=\int\limits_{\Gamma}[(\mathbf{R}^s-\mathbf{R})\delta\mathbf{v}+(\mathbf{G}^s-\mathbf{G})\delta\boldsymbol{\gamma}]d\Gamma+\iint\limits_{\Omega}[(\nabla_k\mathbf{R}^k+\mathbf{Z}+\mathbf{T})\delta\mathbf{v}+$$

$$+(\nabla_k\mathbf{G}^k+\mathbf{L}-\mathbf{K})\delta\boldsymbol{\gamma}]d\sigma=0,\qquad \mathbf{T}=\sum_{l=1}^{2}\Delta_{(l)}\frac{h}{h_{(ln)}}\mathbf{Q}^{(ln)}$$

из которых следуют соответствующие уравнения равновесия и граничные условия на контуре Г.

Следует отметить, что построенные соотношения могут служить для описания механики широкого класса тонкостенных деформируемых систем, в частности, некоторых видов клеевых соединений, оболочечных конструкций из стекла, керамики и композиционных материалов, соединяемых с другими элементами конструкций через деформируемые основания из полимерных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
2. *Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М.* Контактные задачи теории оболочек и стержней. М.: Машиностроение, 1978. 248 с.
3. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
4. *Паймушин В. Н.* Соотношения теории тонких оболочек типа Тимошенко в криволинейных координатах поверхности отсчета.– ПММ, 1978, т. 42, вып. 4, с. 753–758.
5. *Паймушин В. Н.* К задаче параметризации срединной поверхности оболочки сложной геометрии.– В кн.: Прочность и надежность сложных систем. Киев: Наук. думка, 1979, с. 78–84.
6. *Галимов К. З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. 326 с.
7. *Галимов К. З., Артюхин Ю. П., Карасев С. Н.* и др. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. 211 с.
8. *Паймушин В. Н.* К вариационным методам решения нелинейных пространственных задач сопряжения деформируемых тел.– Докл. АН СССР, 1983, т. 273, № 5, с. 1083–1086.
9. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.

Казань

Поступила в редакцию 27.II.1984