

УДК 539.376

СПЛЮЩИВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

ЛОКОЩЕНКО А. М., ШЕСТЕРИКОВ С. А.

Анализ поведения цилиндрической оболочки, находящейся под действием внешнего равномерно распределенного давления при высоких температурах, в основном связан с определением времени t^* , в течение которого она может нести заданную нагрузку. Цилиндрические оболочки, как правило, имеют настолько большую длину по сравнению с размерами поперечного сечения, что влиянием краевых закреплений можно пренебречь. В этих условиях исследуют поведение колец единичной ширины и толщины H при действии внешнего гидростатического давления q . Интерес представляет определение зависимости t^* от формы и размеров начальных несовершенств кольца. Обычно при этом рассматривается кольцо с начальной овальностью, которое в процессе деформирования вплоть до сплющивания сохраняет две оси симметрии [1–8]. В данной работе рассматриваются две различные формы кольца: с одной и двумя осями симметрии. Получены условия, при которых время сплющивания оболочки не зависит от формы начального несовершенства.

Предварительно исследуем сплющивание овальных колец. При решении этой задачи часто [1, 2, 4, 8] отклонение срединной линии от окружности считают пропорциональным косинусу двойного полярного угла. В цикле работ [3, 5–7] форма некругового кольца в любой момент времени аппроксимируется сопряжением двух дуг окружностей с радиусами R_1 и R_2 (фиг. 1, 2). Задание формы кольца в таком виде позволяет исследовать деформирование кольца вплоть до момента сплющивания. В [3] рассматривается чисто моментное напряженное состояние такого кольца. В [5, 6] сплющивание колец исследуется при одновременном учете их обжатия и изменения кривизны сечений в каждой точке.

1. Рассмотрим сплющивание кольца при нелинейной установившейся ползучести

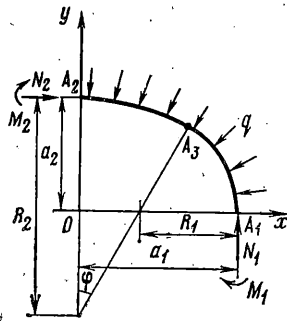
$$ds/dt = B\sigma^n \quad (n\gamma = 1) \quad (1.1)$$

с учетом деформации ε_0 срединной линии. Напряжения и деформации сжатия считаем положительными. Будем использовать три геометрические гипотезы: форму срединной линии аппроксимируем сопряженными дугами двух окружностей (фиг. 1, 2), пренебрегаем изменением длины срединной линии вследствие деформирования кольца, принимаем гипотезу плоских сечений:

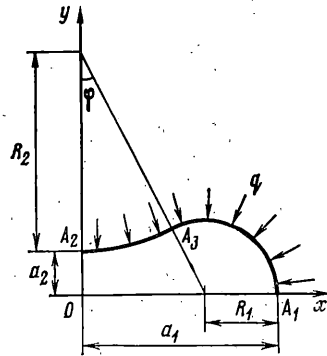
$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i0} - \kappa_i z \quad (1.2)$$

Здесь κ_i — изменение кривизны, z — координата по нормали к срединной линии, направленная от центра кольца; индекс i всюду принимает значения 1 и 2 (он показывает, к дуге какого радиуса — R_1 или R_2 — относится соответствующая величина).

При анализе процесса сплющивания будем пренебрегать мгновенными деформациями по сравнению с деформациями ползучести. Геометрия срединной линии кольца определяется с помощью трех параметров: радиусов R_1 и R_2 и угла φ , который соответствует точке сопряжения рассматриваемых дуг, характеризующейся нулевым значением изгибающего момента. Для определения этих параметров составим силовые и мо-



Фиг. 1



Фиг. 2

ментные уравнения равновесия дуг $A_i A_3$:

$$q a_i = \frac{H}{2(\gamma+1)B^\gamma} \left(\frac{H}{2} \frac{d\kappa_i}{dt} \right)^\gamma G(f_i)$$

$$\frac{q}{2} (a_i^2 - x_3^2 - y_3^2) = \left[B^\gamma (\gamma+1) (\gamma+2) \left(\frac{d\kappa_i}{dt} \right)^2 \right]^{-1} \left(\frac{H}{2} \frac{d\kappa_i}{dt} \right)^{(\gamma+2)} F(f_i) \quad (1.3)$$

$$f_i = \left(\frac{d\epsilon_{i0}}{dt} \right) / \left(\frac{H}{2} \frac{d\kappa_i}{dt} \right), \quad G(f_i) = (f_i+1)^{(\gamma+1)} - (f_i-1)^{(\gamma+1)}$$

$$F(f_i) = (\gamma+2) [(f_i-1)^{(\gamma+1)} + (f_i+1)^{(\gamma+1)}] + (f_i-1)^{(\gamma+2)} - (f_i+1)^{(\gamma+2)}$$

Система уравнений (1.3) имеет место как для выпуклого (фиг. 1), так и для вогнутого (фиг. 2) кольца. В [5, 6] рассматриваются только выпуклое кольцо. Здесь уравнения равновесия (1.3) используются для полного анализа деформирования кольца, имеющего сначала выпуклую, а затем вогнутую форму. Введем средний радиус исходного поперечного сечения овального кольца $R_0 = 0,5(R_{10} + R_{20})$.

Под R_1, R_2 и другими линейными геометрическими параметрами кольца будем понимать соответствующие величины, отнесенные к R_0 . Введем также безразмерный параметр толщины оболочки $\lambda = H/R_0$ и безразмерное время τ : $\tau = (2B/\lambda) [2(\gamma+1)q/\lambda]^{n\tau}$, $d(\dots)/d\tau = (\dots)$.

Из (1.3) получаем следующую систему уравнений:

$$R_i^* = k_i a_i^n R_i^2 / [G(f_i)]^n \quad (1.4)$$

$$(a_i^2 - x_3^2 - y_3^2) = \lambda a_i F(f_i) / [(\gamma+2) G(f_i)]$$

Для выпуклого кольца $k_1 = k_2 = -1$, для вогнутого $-k_1 = -1$, $k_2 = 1$. Угол φ и величины a_i, x_3, y_3 определяются по формулам

$$\varphi = 1/2\pi(1 - R_1)/(R_2 \mp R_1), \quad a_1 = R_1 + (R_2 \mp R_1) \sin \varphi \quad (1.5)$$

$$a_2 = \pm R_2 + (\mp R_2 + R_1) \cos \varphi, \quad x_3 = R_2 \sin \varphi, \quad y_3 = R_1 \cos \varphi \quad (1.6)$$

где верхний знак соответствует выпуклому кольцу, нижний — вогнутому.

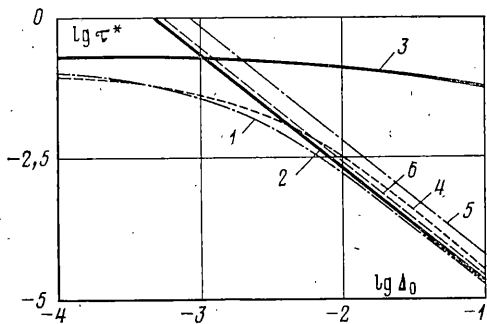
Система пяти уравнений (1.4)–(1.5) относительно R_i, f_i, φ для выпуклого кольца ($0 < \tau < \tau_1$) решается при условиях:

$$R_{10}(0) = 1 - (2^{1/2} + 1)\Delta_0, \quad R_{20}(0) = 1 + (2^{1/2} + 1)\Delta_0,$$

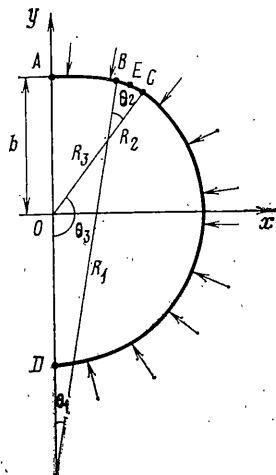
$$\Delta_0 = (a_{10} - a_{20}) / (a_{10} + a_{20}), \quad R_2(\tau_1) \rightarrow +\infty,$$

время τ_2 деформирования вогнутого кольца вплоть до сплющивания определяется из условия $a_2(\tau_2) = 0$, полное время $\tau^* = \tau_1 + \tau_2$.

2. Вычисления τ^* были проведены для модельного материала с пока-



Фиг. 3



Фиг. 4

затем ползучести $n=3$ при различных комбинациях параметров Δ_0 и λ , принимающих значения 0,001, 0,01 и 0,1. Вычисления показывают, что параметр Δ_0 оказывает значительное влияние на время τ_1 (в рассмотренных примерах изменение τ_1 достигает четырех порядков) и практически не влияет на τ_2 . Таким образом, когда две противоположные части кольца стали отрезками прямых ($R_2 \rightarrow +\infty$), дальнейшее деформирование вогнутого кольца практически не зависит от параметра Δ_0 исходной овальности кольца и отношение τ_2/τ^* резко увеличивается с возрастанием Δ_0 от величин порядка 10^{-7} до 10^{-1} . Для кольца с исходным параметром овальности $\Delta_0=0,1$, отношение τ_2/τ^* составляет около 8% во всем рассмотренном диапазоне величин λ .

Рассматриваемая задача характеризуется двумя независимыми малыми параметрами: Δ_0 и λ . Для случаев, когда один из них значительно меньше другого, возможны приближенные оценки τ^* . Так, для достаточно большой исходной овальности (при $\Delta_0/\lambda \gg 1$) из (1.4)–(1.5) вытекает зависимость

$$\tau_1^* = \frac{(2^n + 1)}{(n-1)} \left[\frac{\lambda(n+1)}{2n+1} \right]^n \Delta_0^{1-n} \quad (2.1)$$

Для кольца с очень малой начальной овальностью, характеризующейся условием $\Delta_0/\lambda \ll 1$, из (1.4)–(1.5) получаем формулу, совпадающую с [6]:

$$\tau_2^* = \frac{0,4\lambda}{n} \left[\frac{2(n+1)}{n} \right]^n \ln \frac{1}{\Delta_0} \quad (2.2)$$

Сравнение полученных с помощью ЭВМ значений τ^* с величинами τ_1^* и τ_2^* показывает, что в случае $n=3$ при $\Delta_0/\lambda < (0,2-0,3)$ для приближенного определения времени работоспособности кольца его можно рассматривать как кольцо с малой начальной овальностью и пользоваться формулой для τ_2^* ; при $\Delta_0/\lambda > (0,2-0,3)$ следует пользоваться формулой для τ_1^* .

На фиг. 3 для случая $n=3$, $\lambda=0,01$ в двойных логарифмических координатах приведены зависимости $\tau^*(\Delta_0)$, вытекающие из различных теоретических моделей. Кривая 1 соответствует расчетам с использованием ЭВМ; кривые 2, 3 получены на основании формул (2.1), (2.2); кривые 4–6 соответствуют результатам [2, 4, 8]. Очевидно, что полученная с помощью ЭВМ (кривая 1) зависимость $\tau^*(\Delta_0)$ при $\Delta_0/\lambda \ll 1$ приближается к $\tau_2^*(\Delta_0)$, а при $\Delta_0/\lambda \gg 1$ — к $\tau_1^*(\Delta_0)$. Среди моделей, позволяющих проводить оценку τ^* в элементарных функциях, следует отметить [2]

(кривая 4), которая учитывает особенности поведения колец при различных Δ_0 .

3. Перейдем к анализу поведения кольца с локальной вмятиной. Анализ деформирования овальных оболочек показывает, что основную часть времени их работоспособности составляет время достижения минимальной кривизной сечения нулевого значения. Поэтому здесь рассматривается анализ поведения кольца только до достижения кривизной вмятины нулевого значения. На фиг. 4 показана половина кольца, состоящая из трех сопряженных дуг окружностей AB , BC и CD с радиусами R_i и соответствующими центральными углами θ_i ($i=1, 2, 3$). Шесть переменных R_i , θ_i связаны тремя геометрическими соотношениями:

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 &= \pi, & R_1\theta_1 + R_2\theta_2 + R_3\theta_3 &= \pi \\ (R_1 - R_2) \sin \theta_1 &= (R_3 - R_2) \sin \theta_3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь радиусы R_1 , R_2 и другие линейные параметры кольца с вмятиной, как и выше, — безразмерные величины (R_0 — радиус идеально круглого кольца с той же длиной окружности, что и рассматриваемое кольцо с вмятиной); Δ_0 — отношение разности максимального и минимального диаметров поперечного сечения к их сумме, N — усилия сжатия, отнесенные к qR_0 , M — изгибающие моменты, отнесенные к qR_0^2 .

В процессе деформирования кольца радиусы R_1 и R_3 возрастают, а R_2 уменьшается, таким образом, изгибающий момент в точках B и C меняет знак ($M_B = M_C = 0$).

Рассмотрим в качестве характерных точек кольца середины дуг окружностей (точки A , E и D), силовые и моментные уравнения равновесия в этих точках после преобразований имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} N_A = N_1 &= R_1 - \omega (R_1 - R_2) \sin^{1/2} \theta_2 \\ N_E = N_2 &= R_2 + \omega (R_1 - R_2) \sin \theta_1 \\ N_D = N_3 &= R_3 - \omega (R_3 - R_2) \sin^{1/2} \theta_2 \\ M_A = M_1 &= 2\omega R_1 (R_1 - R_2) \sin^{1/2} \theta_1 \sin^{1/2} \theta_2 \\ M_E = M_2 &= 2\omega R_2 (R_2 - R_1) \sin \theta_1 \sin^{2/4} \theta_2 \\ M_D = M_3 &= 2\omega R_3 (R_3 - R_2) \sin^{1/2} \theta_2 \sin^{2/4} \theta_3 \\ \omega &= [\sin(\theta_1 + 1/2\theta_2)]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В случае кольца с очень малым начальным несовершенством ($\Delta_0/\lambda \ll 1$) основная часть времени его работы характеризуется существенным изменением сжатия срединной линии ϵ_{i0} при относительно малом изменении кривизны κ_i . Для деформирования кольца с относительно большим начальным несовершенством ($\Delta_0/\lambda \gg 1$) характерно преимущественное изменение кривизны оси κ_i по сравнению с ϵ_{i0} . В зависимости от соотношения двух малых параметров Δ_0 и λ имеем два качественно различных предельных типа связи силовых (N_i и M_i) и деформационных (ϵ_{i0} и κ_i) характеристик. При $\Delta_0/\lambda \gg 1$ эта связь при переходе к R_i принимает следующий вид:

$$R_i^* = (2n+1)^n M_i^n R_i^{2n} / [\lambda(n+1)]^n \quad (3.3)$$

При $\Delta_0/\lambda \ll 1$ аналогично получаем

$$R_i^* = 6\lambda^{-1} n^{n+1} M_i^n R_i^{2n} / [2(n+1)]^n \quad (3.4)$$

Три дифференциальных уравнения (3.3) или (3.4) совместно с тремя алгебраическими уравнениями (3.1) служат для определения изменения шести геометрических характеристик R_i , θ_i во времени τ . В правые части

$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$
0,001 0,001 0,001	0,001 0,01 0,1	$3,49 \cdot 10^{-6}$ $3,46 \cdot 10^{-8}$ —	$3,36 \cdot 10^{-6}$ $2,72 \cdot 10^{-8}$ —	$2,43 \cdot 10^{-6}$ $1,57 \cdot 10^{-8}$ —	$6,43 \cdot 10^{-5}$ $5,6 \cdot 10^{-7}$ $8,83 \cdot 10^{-10}$	$7,4 \cdot 10^{-5}$ $7,1 \cdot 10^{-7}$ $2,43 \cdot 10^{-9}$	$4,39 \cdot 10^{-5}$ $3,93 \cdot 10^{-7}$ $5,19 \cdot 10^{-9}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$ $2,3 \cdot 10^{-6}$ $2,3 \cdot 10^{-8}$
0,01 0,01	0,01 0,1	$3,46 \cdot 10^{-5}$ —	$2,72 \cdot 10^{-5}$ —	$1,57 \cdot 10^{-5}$ —	$6,6 \cdot 10^{-4}$ $8,8 \cdot 10^{-7}$	$7,1 \cdot 10^{-4}$ $2,4 \cdot 10^{-6}$	$3,93 \cdot 10^{-4}$ $5,19 \cdot 10^{-6}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$ $2,3 \cdot 10^{-5}$
0,1	0,1	—	—	—	$8,8 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$	$5,19 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$
0,001	0,001	$1,41 \cdot 10^{-2}$	$1,42 \cdot 10^{-2}$	$1,38 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$
0,01 0,01	0,001 0,01	$1,41 \cdot 10^{-1}$ $6,5 \cdot 10^{-2}$	$1,42 \cdot 10^{-1}$ $6,8 \cdot 10^{-2}$	$1,38 \cdot 10^{-1}$ $6,5 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$ $1,2 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$ $1,2 \cdot 10^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-1}$ $1,1 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$ $1,2 \cdot 10^{-1}$
0,1 0,1 0,1	0,001 0,01 0,1	1,41 0,65 —	1,42 0,68 —	1,38 0,65 —	1,8 1,2 0,30	1,8 1,2 0,37	1,7 1,1 0,24	1,8 1,2 0,58

(3.3) и (3.4) входят усилия N_i и изгибающие моменты M_i , которые с помощью (3.2) выражаются через те же геометрические характеристики R_i , θ_i . В качестве начальных значений будем задавать углы θ_{10} и θ_{20} и исходный прогиб $\Delta_0 = (r_{30} - b_0) / (3r_{30} + b_0)$.

В таблице приведены результаты вычисления на ЭВМ времени сплющивания τ^* при $n=3$ для различных значений параметров λ ($j=1$) и Δ_0 ($j=2$). Первые три комбинации ($j=3-5$) θ_{10} (15; 22,5; 30°) и θ_{20} (30; 22,5; 15°) характеризуют локальную вмятину ($\theta_{10} + \theta_{20} = 45^\circ$), вторые три комбинации ($j=6-8$) θ_{10} (22,5; 45; 67,5°) и θ_{20} (67,5; 45; 22,5°) — более «расплывчатую» вмятину ($\theta_{10} + \theta_{20} = 90^\circ$). В верхней части таблицы приведены значения τ^* , вытекающие из решения системы уравнений (3.1), (3.3); в нижней — результаты решения системы (3.1), (3.4). В качестве τ^* принималось время, соответствующее условию $R_1 \rightarrow +\infty$. Для сравнения результатов решения задач о сплющивании колец с одной и двумя осями симметрии в последней колонке таблицы (при $j=9$) приведены значения времен сплющивания овальной оболочки τ^{**} , вычисленные при $n=3$ и указанных значениях λ и Δ_0 по формулам (2.1) в верхней части и (2.2) в нижней части.

Анализ верхней части таблицы показывает, что при $\Delta_0/\lambda \gg 1$ форма исходного несовершенства кольца оказывает очень существенное влияние на время сплющивания при одном и том же значении Δ_0 . При наличии «расплывчатой» вмятины ($j=6-8$) время τ^* уменьшается по сравнению с τ^{**} на один порядок, а при наличии локальной вмятины ($j=3-5$) время τ^* меньше τ^{**} на два порядка.

При $\Delta_0/\lambda \ll 1$ время τ^* слабо зависит от формы начального несовершенства. Время τ^* для локальной вмятины меньше соответствующего времени для «расплывчатой» вмятины, которое в свою очередь близко значению τ^{**} при той же величине Δ_0 . При этом все семь значений времен сплющивания имеют один и тот же порядок.

Итак, при исследовании сплющивания кольца следует учитывать соотношение двух малых параметров λ и Δ_0 . В случае очень малого начального несовершенства ($\Delta_0/\lambda \ll 1$) достаточно знать исходное отличие Δ_0 от идеального круглого кольца, при этом форма несовершенства несущественна. В случае достаточно большой по сравнению с λ величины Δ_0 ($\Delta_0/\lambda \gg 1$) при определении τ^* следует учитывать как величину Δ_0 , так и форму несовершенства.

ЛИТЕРАТУРА

- Hoff N. Buckling at high temperature. J. Roy. Aeronaut. Soc., 1957, v. 61, No. 563, p. 756-774. — Рус. перев.: Механика. Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1958, № 5, с. 65-100.
- Hoff N. J., Jahsman W. E., Nachbar W. A study of creep collapse of a long circular cylindrical shell under uniform external pressure. — J. Aerospace Sci., 1959, v. 26, No. 10, p. 663-669.
- Ванько В. И., Шестериков С. А. Сплющивание кольца в условиях ползучести. — Инж. ж. МТТ, 1966, № 5, с. 127-130.

4. Волчков Ю. М., Немировский Ю. В. Несимметричное выпучивание цилиндрических оболочек в условиях ползучести.— Инж. ж. МТТ, 1967, № 4, с. 136—138.
5. Ванько В. И., Шестериков С. А. Нелинейно-вязкие цилиндрические оболочки под внешним давлением.— Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 1, с. 110—114.
6. Локощенко А. М., Шестериков С. А. Методика расчета на сплющивание цилиндрических оболочек в условиях ползучести.— Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1973, № 23, с. 10—14.
7. Локощенко А. М. Поведение цилиндрической оболочки под внешним равномерно распределенным давлением.— Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1975, № 37, с. 15—24.
8. Бондаренко Ю. Д., Магаев Г. А., Матушкин В. Л. Сплющивание и разрушение цилиндрической оболочки в условиях ползучести.— Изв. Сев.-Кавказ. научн. центра высш. школы. Техн. н., 1981, № 1, с. 89—91.

Москва

Поступила в редакцию
29.XI.1983