

УДК 539.375

ТРЕЩИНА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ УПРУГИХ СРЕД
ПРИ РАСКЛИНИВАНИИ

СИМОНОВ И. В.

Изучено плоское напряженно-деформированное состояние около трещины конечной длины, образованной жесткой вставкой (клином) и расположенной на прямой линии соединения материалов с различными упругими свойствами. При использовании метода сращиваемых асимптотических разложений учитывается контакт берегов трещины на участках, малых по сравнению с длиной трещины.

1. Жесткий клин толщины $h(x) = h_1(x) - h_2(x)$ расположен на участке $|x| \leq 1$, $y = 0$ вдоль границы раздела двух упругих полуплоскостей $y > 0$ (среда 1) и $y < 0$ (среда 2). Образовалась трещина ($a \leq x \leq b$, $y = 0$; $a < -1$, $b > 1$). Клин нагружен нормальной к границе раздела силой P , приложенной к точке $x = 0$, и моментом M (фиг. 1). Предполагается, что щеки клина без трения всюду соприкасаются с упругой средой, а берега трещины свободны от напряжений. Требуется определить поля напряжений $\sigma_{km}^j(x, y)$ и смещений $u_m^j(x, y)$ по следующим граничным условиям ($y = 0$):

$$\begin{aligned} u_{2,x}^j &= h_j'(x) + \varphi, \quad \sigma_{12}^j = 0, \quad \sigma_{22}^j \leq 0 \quad (|x| < 1) \\ \sigma_{22}^j &= \sigma_{12}^j = 0, \quad [u_2] \geq 0 \quad (a < x < -1 \cup 1 < x < b) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$[\sigma_{2m}] = [u_m] = 0 \quad (x > b \cup x < a)$$

$$[u_2] \Big|_{x=1} = h(1), \quad \int_{-1}^1 [\sigma_{22}] \Big| \Big| \frac{1}{x} \Big| dx = - \Big| \Big| \frac{P}{M} \Big|$$

где $h_j = h_j(x)$ — уравнения поверхностей клина относительно некоторой его оси, $h_j(x)$ — непрерывные по Гельдеру функции, такие, что $|h_j'(x)| \ll 1$, $h(x) \ll |a| - 1$, $b - 1$; φ — угол поворота клина; индекс j фиксирует среду; квадратные скобки означают скачок величины при переходе из среды 1 в среду 2; штрихом отметим обыкновенное дифференцирование.

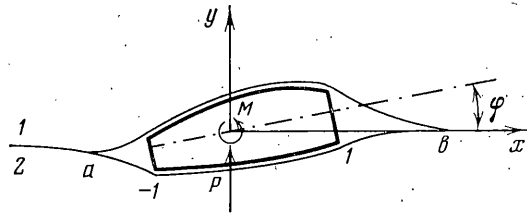
В плоской задаче линейной теории упругости обычными являются представления Колосова — Мусхелишвили через аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ [1]. Удобно совершить линейную замену функций $X_1 = z\Phi'(z) + \Psi(z)$, $X_2 = 2\Phi(z) + X_1(z)$, так что связь компонент напряжений и производных от смещений на границе раздела с функциями $X(z)$ выразится формулами (эту связь внутри области выписывать не будем; здесь и далее $\chi = X$ (ред.)):

$$\sigma_{22} + i\sigma_{12}^j = \operatorname{Re} \chi_2^j + i \operatorname{Im} \chi_1^j \quad (1.2)$$

$$u_{1,x}^j = -\operatorname{Re} (b_j \chi_1^j + a_j \chi_2^j), \quad u_{2,x}^j = \operatorname{Im} (a_j \chi_1^j + b_j \chi_2^j)$$

Для плоскодеформированного состояния $a_j = (\nu_j - 1/2) / \mu_j$, $b_j = (1 - \nu_j) / \mu_j$, для плосконапряженного состояния $a_j = (\nu_j - 1) / [2\mu_j(\nu_j + 1)]$, $b_j = 1 / [\mu_j(1 + \nu_j)]$ (μ_j , ν_j — модули сдвига и коэффициенты Пуассона).

Искомые функции X_k^j должны удовлетворять на бесконечности асимптотическим равенствам (1.3), вытекающим из физических условий однознач-



Фиг. 1

ности смещений при обходе контура трещины и одному из условий равновесия клина [1, 2], а в конечных особых точках — оценкам (1.4), обеспечивающим принадлежность решения энергетическому классу

$$\chi_k^j = \frac{iy_{kj}P}{\pi Sz} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (z \rightarrow \infty); \quad y_{11} = y_{12} = -a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0 \quad (1.3)$$

$$y_{21} = a_2 d + b_2 q, \quad y_{22} = b_1 q - a_1 d$$

$$d = a_1 - a_2, \quad q = b_1 + b_2, \quad S = d^2 - q^2 < 0$$

$$|X_k^j| < \text{const} |z - z_*|^{-1/2} \quad (z \rightarrow z_* = a, b, \pm 1) \quad (1.4)$$

Для определенности и без ограничения общности считаем, что $d < 0$. Предварительно рассмотрим вспомогательную задачу для функций $X^j(z)$ с целью снятия неоднородности в первом из условий (1.1) ($y=0$): $b_j \text{Im} X^j(x) = h_j'(x) + \varphi$ ($|x| < 1$), $\text{Re} X^j(x) = 0$ ($|x| > 1$).

Решение этой задачи в классе (1.4), убывающее на бесконечности как $1/z$, приведем к виду [3] ($\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-1} \sqrt{z^2 - 1} = 1$, $C_j = \text{Re} C_j$):

$$b_j \chi^j = i\varphi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}}\right) + \frac{i}{\pi \sqrt{z^2 - 1}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} h_j'(t)}{t-z} dt + \frac{ib_j C_j}{\sqrt{z^2 - 1}} \quad (1.5)$$

$$b_j \chi^j(x) = \begin{cases} i\varphi + i \text{sgn } x J_j(x), & |x| > 1 \\ i(\varphi + h_j'(x)) - (-1)^j J_j(x), & |x| < 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{|x^2 - 1|} J_j(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} h_j'(t)}{t-x} dt + b_j C_j - x\varphi$$

После снятия напряженного состояния, порождаемого решением $\chi_1^j = 0$, $\chi_2^j = \chi^j$, из (1.1), (1.2), (1.5) получим основную краевую задачу Римана — Гильберта [3–5]. Она заключается в определении вектор-функции $\chi = (\chi_1, \chi_2) = (\chi_1^1, \chi_2^1 - \chi^1)$, аналитической в верхней полуплоскости z по следующим условиям на действительной оси:

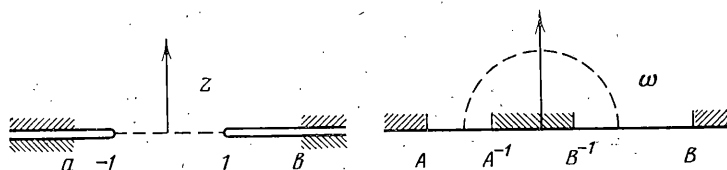
$$\text{Im}(H\chi) = (f(x), 0) \quad (x > b \cup x < a), \quad \text{Im} \chi_1 = \text{Im} \chi_2 = 0 \quad (|x| < 1) \quad (1.6)$$

$$\text{Im} \chi_1 = \text{Re} \chi_2 = 0 \quad (a < x < -1 \cup 1 < x < b)$$

$$H = \begin{vmatrix} d & q \\ iq & id \end{vmatrix}, \quad f = \frac{\text{sgn } x}{\pi \sqrt{x^2 - 1}} \int_{-1}^1 \frac{h'(t) \sqrt{1-t^2}}{x-t} dt$$

Решение разыскивается в том же классе, что и решение вспомогательной задачи. Функции, определенные в нижней полуплоскости, затем могут быть вычислены при помощи продолжений

$$\chi_1^2(z) = -\overline{\chi_1(\bar{z})}, \quad \chi_2^2(z) = \overline{\chi_2(\bar{z})} + \chi^2(z) \quad (1.7)$$



Фиг. 2

вытекающих из условий: $[\text{Im } X_1] = 0$ — на всей действительной оси, $\text{Im } X_2 = 0$ и $[\text{Re}(X_2 - X)] = 0$ — на дополняющих друг друга до почти полной вещественной оси интервалах при учете (1.3), (1.4) (этим удобны используемые представления). В последствии суперпозицию решений вспомогательной и основной задачи необходимо подчинить дополнительным условиям (1.1) в форме неравенств и числовых равенств и условиям (1.3).

Общий метод построения точного решения обобщенной задачи Римана — Гильберта для связанной системы функций с двумя и более типами точек раздела краевых условий не известен. В данном случае можно построить решение в интегралах типа Коши [4]. Аналитически продолжим вектор $X(z)$ через отрезок $|x| \leq 1, y=0$, переведем плоскость с разрезами $|x| \geq 1, y=0$ в верхнюю полуплоскость $\omega = \xi + i\eta = z + (z^2 - 1)^{1/2}$ — верхняя (нижняя) полуокружность z переходит во внешность (внутренность) единичной полуокружности (фиг. 2) и, наконец, сведем задачу к нахождению кусочно-голоморфного вектора $W(\omega)$ в плоскости ω с линией разрывов $\eta=0$ по следующим краевым и дополнительным условиям (задача сопряжения):

$$W^+ = \Lambda W^- + 2iW^\circ (\xi \in L_1), \quad W^+ = W^- (\xi \in L_2) \quad (1.8)$$

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}, \quad W^\circ = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (d+q)^{-1} \\ (d-q)^{-1} \end{vmatrix} g(\xi), \quad \lambda = \frac{q-d}{q+d} \geq 1$$

$$g(\xi) = f[x(\xi)] \quad (\xi < AU\xi > B), \quad g(\xi) = -g(1/\xi) \quad (A^{-1} < \xi < B^{-1})$$

$$A = a - \sqrt{a^2 - 1}, \quad B = b + \sqrt{b^2 - 1}, \quad \lambda_1 = \lambda_2^{-1} = \lambda$$

$$L_1 = \{\xi : \xi < AU\xi > BUA^{-1} < \xi < B^{-1}, \xi \neq 0\}, \quad L_2 = \{\xi : A < \xi < A^{-1}UB^{-1} < \xi < B\}$$

$$W_k(\omega) = \overline{W_k(1/\bar{\omega})}, \quad W_k(\omega) = \overline{W_m(\bar{\omega})} \quad (k, m=1, 2, k \neq m) \quad (1.9)$$

Индексы плюс или минус означают сужение на ось $\eta=0$ сверху или снизу. После решения задачи (1.8), (1.9) функции $X_k(z)$ восстанавливаются по формулам: $X_k(z) = W_1[\omega(z)] - (-1)^k W_2[\omega(z)]$.

Матрица Λ в (1.8) диагональна: задача расщепилась. Для каждой компоненты вектора W решение ищем методом [3]. Имеется существенное отличие. Кроме условия продолжения через действительную ось в (1.9) содержится условие инверсии W — оно заменяет собой краевое условие при $|x| < 1$ в исходной задаче. Учтем также оценки поведения в особых точках, следующие из (1.3), (1.4), в частности в точках $\omega = \pm 1$ функции $W_k(\omega)$ имеют простые полюса (вектор $X(z)$ в соответствующих точках имеет корневые особенности). Ограничения (1.9) накладывают связи на свободные коэффициенты общего решения однородной задачи сопряжения, соответствующей (1.8), что уменьшает число независимых коэффициентов до количества, даваемого общими теоремами [5] по отношению к исходной задаче. Решение задачи (1.8), (1.9) имеет вид

$$W_k = \Pi_k \{F I_k + G R_k\}, \quad \Pi_k = \Pi_k^* \Pi_0 \quad (1.10)$$

$$\Pi_k^* = \left[\frac{(B-\omega)(\omega^{-1}-A)}{(B-\omega^{-1})(\omega-A)} \right]^{i\alpha_k}, \quad \Pi_0 = \frac{2(\omega+\omega^{-1}-A-A^{-1})^{-\nu_k}}{(B+B^{-1}-\omega-\omega^{-1})^{\nu_k}} \equiv$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{(b-z)(z-a)}} \\ & \quad (0 \leq \arg(b-z), \quad \arg(z-a) \leq \pi) \\ \alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{\ln \lambda}{2\pi} &= \alpha, \quad F = \frac{\omega}{\omega+1}, \quad G = \frac{\omega}{\omega^2-1} \end{aligned}$$

$$I_k = \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{\overline{R_2(\bar{\omega})} W_k^\circ(\xi) d\xi}{F(\xi) \Pi_k^+(\xi) (\xi - \omega)}, \quad \Pi_k^+ = \frac{i |\lambda_k|^{1/2} \xi \exp(i\alpha_k \psi)}{\sqrt{[x(\xi) - b][a - x(\xi)]}},$$

$$\psi = \ln |(B - \xi)(\xi^{-1} - A) / ((B - \xi^{-1})(\xi - A))|$$

$\xi = 1 (\xi > BUA^{-1} < \xi < 0)$, $\xi = -1 (\xi < AUO < \xi < B^{-1})$, $2x = \xi + \xi^{-1}$
 Вспомогательные функции $\Pi_k(\omega)$ факторизуют задачу (1.8):

$$\Pi_k^+(\xi) / \Pi_k^-(\xi) = \lambda_k \quad (\xi \in L_1), \quad \Pi_k^+(\xi) / \Pi_k^-(\xi) = 1 \quad (\xi \in L_2) \quad (1.11)$$

и обладают свойствами (приведем также свойства функций $W_k^\circ(\xi)$):

$$\Pi_k(\omega) = \overline{\Pi_k(1/\bar{\omega})}, \quad \Pi_k(\omega) = \overline{\Pi_m(\bar{\omega})} \quad (1.12)$$

$$W_k^\circ(\xi) = -W_k^\circ(1/\xi), \quad \lambda_m W_k^\circ(\xi) = W_m^\circ(\xi) \quad (k, m = 1, 2; m \neq k)$$

Ветви степенных функций в (1.10) фиксированы условиями (1.11). Конкретнее, аргумент любой из скобок, входящих в определение этих функций, принимает значения на отрезке $[\pi, -\pi]$, такие, что $\arg(B - \xi)^\pm = \mp \pi$ ($\xi > B$), $\arg(B - \xi^{-1})^\pm = \pm \pi$ ($0 < \xi < B^{-1}$), $\arg(\xi - A)^\pm = \pm \pi$ ($\xi < A$), $\arg(\xi^{-1} - A)^\pm = \mp \pi$ ($A^{-1} < \xi < 0$), а на интервалах, дополняющих указанные в скобках участки до полной действительной оси с выколотыми точками, аргументы двучленов равны нулю. Вспомогательные функции F, G обеспечивают наличие полюсов у решения $W_k(\omega)$ в точках $\omega = \pm 1$ и подобраны так, чтобы интегралы $I_k(\omega)$ существовали, а решение не противоречило (1.9). С этой целью выведены функциональные уравнения и условия, ограничивающие классы F и G (также R_1 и R_2):

$$\begin{aligned} \frac{F(\omega)}{\omega \overline{F(1/\bar{\omega})}} &= \frac{F(\xi)}{\xi \overline{F(1/\bar{\xi})}} = \frac{\xi F(1/\xi)}{F(\xi)}, \quad G(\omega) = -\overline{G(1/\bar{\omega})}, \quad R_2(\omega) = \\ &= \overline{R_1(\bar{\omega})} = -\overline{R_2(1/\bar{\omega})} \end{aligned}$$

2. Однородное решение — второе слагаемое (1.10) — содержит три действительные постоянные. Таким образом, всего подлежат определению шесть действительных констант ($\varphi, C_1, C_2, r_0, r_1, r_2$). Условия на бесконечности (1.3) позволяют определить четыре из них. Сначала из (1.10) вычислим асимптотику $X_1^j(z)$ ($z \rightarrow \infty$):

$$\chi_1^1(z) \sim \frac{i(\lambda C_0 + \bar{C}_0)}{z}, \quad \chi_1^2(z) \sim \frac{i(\lambda \bar{C}_0 - C_0)}{z}, \quad C_0 = \frac{r}{\sqrt{\lambda}} \left| \frac{A}{B} \right|^{i\alpha} \quad (2.1)$$

и, приравнявая соответствующие коэффициенты в асимптотиках (1.3), (2.1), получим

$$r_1 - ir_2 = \frac{y_{11} P \exp(iD)}{\pi S (\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2})}, \quad D = \alpha \ln \left| \frac{A}{B} \right| \quad (2.2)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из условия на бесконечности для X_2^j (суммы вспомогательного и основного решения)

$$\pi (b_1 + b_2) (C_1, C_2) = - (b_2, b_1) P \Rightarrow C_1 + C_2 = -P/\pi, \quad b_1 C_1 - b_2 C_2 = 0 \quad (2.3)$$

Для скачка контактных напряжений $\sigma(x) = -[\sigma_{22}]$ имеем распределе-

ние (вносит вклад только вспомогательное решение)

$$\sigma = \frac{b_0 \varphi x - I_0 + P\pi^{-1}}{\sqrt{1-x^2}}, \quad I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{[b_1^{-1} h_1'(t) + b_2^{-1} h_2'(t)] \sqrt{1-t^2} dt}{x-t}$$

Все интегралы, не существующие по Риману, понимаются в смысле главного значения. Из условия $\int x \sigma(x) dx = M$ ($-1 < x < 1$) находится угол φ ($b_0 = b_1^{-1} + b_2^{-1}$):

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x I_0(x) dx}{b_0 \sqrt{1-x^2}} + \frac{2M}{\pi b_0}$$

Поскольку условия поставлены в производных от смещений, а по физическому смыслу задачи при $|x| < 1$ задан скачок нормальных смещений, следует зафиксировать этот скачок в каком-либо сечении клина, например, условием $[u_2]_{x=1} = h(1)$. Отсюда определим r_0 . Для этого проинтегрируем полное значение скачка производной $[u_{2,x}] = -f(x) + q \operatorname{Im} X_2(x)$ ($1 < x < b$), где слагаемые суть вклады решений вспомогательной и основной задачи. При использовании (1.12) окончательно получим

$$r_0 = \frac{I_* - h(1)}{I}, \quad I = \int_1^b \frac{q \cos(\alpha \varphi) dx}{\sqrt{(x^2-1)(b-x)(x-a)}} \quad (2.4)$$

$$I_* = \int_1^b \{f - 2q [F \operatorname{Im}(\Pi_1 + I_1^+) + G \operatorname{Im}[\Pi_1^+ (r\xi - \bar{r}\bar{\xi}^{-1})]]\} dx \quad (\xi = x + \sqrt{x^2-1})$$

Приведем некоторые формулы для граничных значений функций, не меняя обозначений. При $|x| < 1$ получим ($\sigma_{22}^j(x, 0) = X_2(x) + \operatorname{Re} X^j(x)$ — контактные напряжения)

$$\Pi_k(x) = \frac{\exp[\alpha_k \theta_*(x)]}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}, \quad \theta_* = 2 \operatorname{arctg} \frac{(B-A)\sqrt{1-x^2}}{(B+A)x - 1 - AB}$$

$$GR_k = r_1 - (-1)^k \frac{r_2 x + r_0/2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad FI_k = \frac{2}{\pi} \int_{A^{-1}}^{B^{-1}} \operatorname{Re} \frac{W_k^\circ(\xi) F(e^{i\theta}) d\xi^1}{F(\xi) \Pi_k^+(\xi) (\xi - e^{i\theta})}$$

$$\theta = \arccos x, \quad W_k(x) = \{FI_k + GR_k\} \Pi_k(x), \quad X_2 = W_1 - W_2$$

При $x > b$, $x < a$ имеем

$$W_k^+(\xi) = iW_k^\circ(\xi) + \{F(\xi)I_k^\circ(\xi) + G(\xi)R_k(\xi)\} \Pi_k^+(\xi) \quad (2.5)$$

$$I_k^\circ = \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{W_k^\circ(\xi_0) d\xi_0}{F(\xi_0) \Pi_k^+(\xi_0) (\xi_0 - \xi)} \quad (\xi = x + \sqrt{x^2-1} \operatorname{sgn} x)$$

Используя (2.5), (1.2), можно получить формулы для напряжений и смещений на продолжении трещины.

Осциллирующая особенность, как известно [6], приводит к нарушению условия непересечения берегов разреза $[u_2] \geq 0$. Однако в задачах, подобных рассматриваемой, из-за малости α это нарушение происходит в малой окрестности точек $z=a$, b и полученное решение далее рассматриваем как внешнее разложение. Неравенства $\sigma_{22}^j \leq 0$ ($y=0$, $|x| < 1$) накладывают ограничения на форму клина и внешние нагрузки P и M ; так как физически ясно, что при произвольных (гладких) $h_k(x)$, P , M этим условиям безотрывности нельзя удовлетворить. Дальнейшее рассмотрение проведем ориентируясь на решение для клина прямоугольного профиля.

3. Пусть $h_k'(x) \equiv 0$, $h(x) = h_0$, $a = -b$, т. е. клин плоский, а трещина

симметрична. Тогда все интегралы из (1.5), (1.10) пропадают (эти интегралы можно рассматривать как поправки за счет геометрии клина) и решение дается формулами

$$x^j = ib_j^{-1} \varphi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} \right) + \frac{iC_j}{\sqrt{z^2-1}}, \quad \varphi = \frac{2M}{\pi b_0} \quad (3.1)$$

$$X_k = G[R_1 \Pi_1 - (-1)^k R_2 \Pi_2] \quad (k, j=1, 2)$$

$$\Pi_k(z) = \frac{1}{\sqrt{b^2-z^2}} \left(\frac{\sqrt{b^2-1} - \sqrt{z^2-1}}{\sqrt{b^2-1} + \sqrt{z^2-1}} \right)^{i\alpha_k}, \quad R_k = 2r_1 \sqrt{z^2-1} - (-1)^k i r_0$$

$$r_0 = -h_0/I \quad (0 \leq \arg(z^2-1), \quad \arg(b^2-z^2) \leq 2\pi)$$

где C_1, C_2, r_1 и I определены формулами (2.2)–(2.4).

В этом случае задача расщепляется на задачу о бесконечно тонкой нагруженной жесткой вставке на границе раздела (с условиями отрыва при $1 < |x| < b$) и задачу расклинивания, в которую параметры P, M и φ уже не входят. Решение первой задачи состоит из суммы решений вспомогательной и основной задачи, где следует положить $r_0=0$ ($h_0=0$). Решение второй задачи заключается в решении основной задачи при $r_1=0$. Выражения для скачка напряжений $\pi(1-x^2)^{1/2} \sigma(x) = 2Mx + P$ и угла поворота φ не содержат информации об отслоении и совпадают с аналогичными выражениями для бесконечно тонкого включения [7].

Выпишем формулы для контактных напряжений, вытекающие из (3.1) ($k \neq j$):

$$\sigma_{22}^j = \frac{(-1)^j (2Mx + P)}{\pi (b_j b_k^{-1}) \sqrt{1-x^2}} + \frac{r_0 \operatorname{ch}(\alpha\theta_*) + 2r_1 \sqrt{1-x^2} \operatorname{sh}(\alpha\theta_*)}{\sqrt{(b^2-x^2)(1-x^2)}} \leq 0 \quad (3.2)$$

Здесь неравенства служат ограничениями на величины M и P . Отметим, что при $h_0=0$ они обязательно нарушаются, если $M^2 + P^2 \neq 0$, при $h_0 \neq 0$ допустимо множество значений M и P не пусто.

Напряжения на продолжении трещины ($y=0, x>b$) равны

$$\sigma_{22} + i\sigma_{12} = \frac{\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2}}{\sqrt{x^2-b^2}} \left(ir_1 - \frac{r_0}{2\sqrt{x^2-1}} \right) \exp(i\alpha\varphi) \underset{x \rightarrow b+0}{\sim} \frac{K_2 \exp(i\alpha\varphi)}{\sqrt{2\pi(x-b)}} \\ K_2 = \sqrt{\pi/b} (\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2}) [ir_1 - r_0/(2\sqrt{b^2-1})] \quad (3.3)$$

Аналогичную структуру имеют формулы для производных от смещений на свободных поверхностях, а также для общего решения в окрестностях краев трещины. Берега трещины перекрываются вблизи краев, и условие $[u_2] \geq 0$, обязательное для единственности решения задачи [8], оказывается нарушенным. Однако зона осцилляции решения локализована. Внутренние разложения (имеются в виду главные части разложений) — решения в окрестности точек a, b — построим вводя малый участок контакта берегов трещины без трения длины l аналогично [9]. При этом, как обычно, совершается переход к внутренним координатам (например, $Z = (z-b)/l$) и сращивание с внешним разложением. Это — нелинейная задача: величина l подлежит определению.

Приведем окончательные формулы для внутреннего разложения, справедливые при $|z-b| \ll b$ с областью перекрытия $l \ll |z-b| \ll b$, где невязка составляет $O((z-b)^{1/2})$ (относительная невязка — $O(z-b)$):

$$X = \frac{-i|K_2|}{\sqrt{2\pi(z-b)}(\lambda+1)} \left\| \begin{array}{l} \lambda\Omega^{i\alpha} + \Omega^{-i\alpha} \\ \lambda\Omega^{i\alpha} - \Omega^{-i\alpha} \end{array} \right\|, \quad \Omega = 2Z + 1 + 2\sqrt{Z^2+Z} \\ l = 1/2(b-b^{-1})e^{\gamma/\alpha}, \quad -\pi < \gamma = \arg R_1(b) < 0$$

$$\sqrt{2\pi(x-b)}\sigma_{12} \sim -|K_2|, \quad \sigma_{22} = O(1) \quad (0 < x-b \ll l)$$

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} \sim \frac{d}{q} \frac{|K_2|}{\sqrt{2\pi(b-x)}} < 0 \quad (0 < b-x \ll l)$$

Осцилляции напряженно-деформированного состояния имеют место в зонах $l \ll |z \pm b| \ll b$, причем, как видно из (3.3), фазы этих осцилляций от расклинивания (симметричная нагрузка на берега трещины) и от действия силы P (несимметричная нагрузка) отличаются на $\pi/2$. Исходя из неравенства (3.2) заключаем, что угол γ лежит в секторе $-\pi/4 < \gamma < -3\pi/4$ (грубая оценка). Затем можно оценить l по порядку величины ($1/3 < \lambda < 3$): $l < 1/2(b-b^{-1}) \cdot 10^{-2}$, т. е. область определения внутреннего разложения во внешних координатах действительно мала. Если же допустить растягивающие контактные напряжения (например, клин сцеплен со средой; величина P может быть достаточно большой), то вполне возможны $l = O(b^{-1})$. При $P=0$ эти оценки таковы: $l \leq 0,6 \cdot 10^{-3}(b-b^{-1})$ для любых значений параметров и $l \leq 0,3 \cdot 10^{-7}(b-b^{-1})$ для $\nu_1 \geq 0,3$ (или $\nu_2 \geq 0,3$). Таким образом, параметр, по которому велось разложение, весьма мал, и поэтому внешнее решение практически имеет силу точного решения всюду, за исключением чрезвычайно малых областей вблизи краев трещины.

Участки контакта вблизи вершин межфазной трещины с целью устранения осциллирующей особенности впервые рассматривались в работах, приведенных в обзоре [10]. В них отмечалась малость этих участков при отсутствии значительных сдвиговых внешних усилий, что согласуется с выводом публикуемой работы.

4. Рассмотрим предельные случаи. При $d=0$ (в частности, $\mu_1 = \mu_2$, $\nu_1 = \nu_2$ — однородная среда) имеем: $\lambda=1$; $\alpha=l=0$; $P_k = [(b-z)(z-a)]^{-1/2}$, $W_k^0 = (-1)^{k+1} g(\xi)/(2q)$, $r_1 = a_1 P/(2\pi q)$, $r_2 = 0$, $r_0 = -h_0/I$, $C_k = -1/2 P/\pi$.

Внешнее разложение обращается в точное решение — мера области определения внутреннего разложения во внешних координатах равна нулю. Осцилляции пропадают, а формула для напряжений на продолжении трещины приобретает вид (плоский клин) $[(x^2-b^2)(x^2-1)]^{1/2}(\sigma_{22} + i\sigma_{12}) = 2ir_1\sqrt{x^2-1} - r_0$. При $P=M=0$ решение для однородной среды совпадает с решением [11].

При $\mu_2 \rightarrow \infty$ (жесткое основание) получим $a_2, b_2 \rightarrow 0$, $l \rightarrow l_{\max}$, $r_1 \rightarrow 0$, $C_1 \rightarrow 0$, $C_2 \rightarrow -P/\pi$, $\varphi \rightarrow 0$, а контактные напряжения равны (плоский клин)

$$\sigma_{22}^1 = \frac{r_0 \operatorname{ch}[\alpha\theta_*(x)]}{\sqrt{(1-x^2)(b^2-x^2)}}, \quad \sigma_{22}^2 = \frac{2Mx+P}{\pi\sqrt{1-x^2}} + \sigma_{22}^1$$

Внешние усилия, приложенные к клину, и напряженное состояние в нижней полуплоскости не передаются в упругую верхнюю полуплоскость. Таким образом получено также решение задачи о трещине, образованной выступом на жестком основании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. Черепанов Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. — Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 1, с. 131—137.
3. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
4. Симонов И. В. Динамика трещины отрыва — сдвига на границе раздела двух упругих материалов. — Докл. АН СССР, 1983, т. 271, № 1, с. 65—68.

5. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 379 с.
6. *Слепян Л. И.* Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
7. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
8. *Shield R. T.* Uniqueness for elastic crack and punch problems.— Trans. ASME. J. Appl. Mech, 1982, v. 49, No. 3, p. 516–518.
9. *Симонов И. В.* О движении трещины с конечной зоной отрыва по линии соединения двух упругих материалов.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 6, с. 114–120.
10. *Дундурс Дж., Комминоу М.* Обзор и перспектива исследования межфазной трещины.— Механика композит. материалов, 1979, № 3, с. 387–396.
11. *Маркузон И. А.* О расклинивании хрупкого тела клином конечной длины.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 2, с. 356–361.

Москва

Поступила в редакцию
24.IX.1983