

УДК 539.3

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ
ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ СЛОИСТЫХ СРЕД
С УЧЕТОМ ИХ УПРУГИХ И ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ**

ГУЗЬ А. Н., ЧЕХОВ В. Н.

Проблема изучения устойчивости слоистых полугораниченных сред возникает в геофизике, геотектонике, механике композитных материалов и других областях естествознания и техники. Такие среды часто обладают периодической структурой, а свойства их слоев описываются в рамках модели линейно-упругого или неупругого тела. Можно отметить два вида [1] неустойчивости слоистых сред. При первом критические параметры задачи определяются размерами, формой и механическими характеристиками элементов конструкций из слоистого материала. При втором потеря устойчивости реализуется в структуре материала, когда зависимость критических параметров нагружения от параметра волнообразования является немонотонной и имеет экстремум при ненулевом значении последнего. Во втором случае выделяют поверхностную и внутреннюю неустойчивость. Явление поверхностной неустойчивости в отличие от внутренней носит локальный характер возле поверхности рассматриваемой среды и затухает при удалении от нее. Существующие методы исследования перечисленных типов неустойчивости основаны преимущественно на континуальных [2, 3] и прикладных [4, 5] подходах в теории устойчивости. Точные методы применялись лишь при изучении внутренней неустойчивости [6] в неограниченных периодических слоистых средах с упругими слоями [1].

В публикуемой работе развивается точный подход к исследованию устойчивости слоистого полупространства периодической структуры, основанный на трехмерной линеаризированной теории устойчивости при малых докритических деформациях. Для описания свойств слоев привлекаются модели линейно-упругого ортотропного тела или изотропного несжимаемого тела с упругопластическими свойствами. В последнем случае исследования проводятся в рамках концепции продолжающегося нагружения с использованием теории малых упругопластических деформаций [7]. Развиваемый подход позволяет исследовать все отмеченные случаи потери устойчивости. Однако основное внимание здесь уделено поверхностной неустойчивости, поскольку это явление наиболее типично и наименее исследовано для полугораниченных слоистых тел.

1. Постановка задачи. Рассмотрим слоистое полупространство, состоящее из чередующихся периодически повторяющихся первых N слоев, имеющих различные физико-механические свойства. Отнесем слоистую среду к лагранжевым координатам θ^i ($i=1, 2, 3$). Если обозначить значение координаты θ^3 на поверхности раздела q, n -го и $q, (n+1)$ -го слоев через $z_{q,n}$, то уравнение свободной поверхности имеет вид $z_{1,0}=0$, а уравнение поверхностей контакта между слоями будет

$$z_{q,n} = (q-1)h + \sum_{i=1}^n h_i = \text{const}, \quad z_{q+1,0} = z_{q,n}, \quad \sum_{i=1}^0 h_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N h_i = h. \quad (1.1)$$

где $q=1, 2, \dots, \infty$; $n=0, 1, 2, \dots, N$; h_i — толщина i -го слоя. Считаем, что полупространство нагружено равномерно распределенными «мертвыми» усилиями σ_0^{ii} ($i=1, 2$) и поверхностной нагрузкой σ_0^{33} . В общем случае нагрузка σ_0^{33} может быть «мертвой» или следящей.

Воспользуемся трехмерной линеаризованной теорией устойчивости при малых докритических деформациях [1, 8], когда докритическое состояние определяется по геометрически линейной теории. В пределах каждого слоя имеем уравнения

$$\nabla_i(\sigma^{ij} + \sigma_0^{in} \nabla_n u^j) - \rho \ddot{u}^j + F^j = 0 \quad (i, j, n=1, 2, 3) \quad (1.2)$$

Если материал слоя несжимаемый, то к уравнениям (1.2) присоединяют условия несжимаемости $\nabla_n u^n = 0$. Соотношения между возмущениями компонент тензора напряжений и вектора перемещений для сжимаемых и несжимаемых тел соответственно будут

$$\sigma^{in} = \lambda^{in\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha, \quad \sigma^{in} = \mu^{in\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha + g^{in} p^* \quad (1.3)$$

где g^{in} — контравариантные компоненты метрического тензора в недеформированном состоянии, p^* — множитель Лагранжа. Линейно-упругие слои в общем случае считаются сжимаемыми и ортотропными $\lambda^{ij\alpha\beta} = E^{ij\alpha\beta}$ [1], а материал упругопластических слоев — несжимаемым

$$\begin{aligned} \mu^{ij\alpha\beta} = & \mu_e^{ij\alpha\beta} - (\mu^* - 1/3 E_c) (g^{i\alpha} g^{j\beta} + g^{j\beta} g^{i\alpha}) + \\ & + \frac{4}{9} \frac{E_k - E_c}{\varepsilon_u^{(0)2}} \varepsilon_0^{ij} \varepsilon_0^{\alpha\beta}, \quad \mu_e^{ij\alpha\beta} = \mu^* (g^{i\alpha} g^{j\beta} + g^{j\beta} g^{i\alpha}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь E_c , E_k — секущий и касательный модули Юнга, $\varepsilon_u^{(0)}$ — интенсивность докритических деформаций. Для линейно-упругой, изотропной модели слоя имеем

$$\lambda^{ij\alpha\beta} = \lambda^* g^{ij} g^{\alpha\beta} + \mu^* (g^{i\beta} g^{j\alpha} + g^{i\alpha} g^{j\beta}) \quad (1.5)$$

где λ^* , μ^* — параметры Ламе. Между слоями можно сформулировать разные условия сопряжения. Условия жесткого контакта q, n -го и $q, (n+1)$ -го слоя на границе $z_{q,n} = \text{const}$ будут

$$P_{q,n}^j = P_{q,n+1}^j, \quad u_{q,n}^j = u_{q,n+1}^j \quad (1.6)$$

где $P_{q,n}^j$ — компоненты главного вектора напряжений в q, n -м слое. На поверхности среды $z_{1,0} = 0$ имеем условия

$$P_{1,0}^j = P^j, \quad P_{q,n}^j = N_i (\sigma^{ij} + \sigma_0^{ik} \nabla_k u^j)_{q,n} \quad (1.7)$$

Возмущения поверхностных усилий P^j при следящей нагрузке $\sigma_0^{33} = -q^*$ определяются формулой [8]:

$$P^j = q^* (N^j \nabla_\alpha u^\alpha - N^\alpha g^{\beta j} \nabla_\beta u_\alpha) \quad (j=1, 2, 3; i=3) \quad (1.8)$$

где N^j — составляющие орта нормали к поверхности среды в недеформированном состоянии. Из условий (1.7) при $\sigma_0^{33} = 0$, $P^j = 0$ получаем случай свободной поверхности, при $\sigma_0^{33} \neq 0$, $P^j = 0$ — случай мертвых, а при $\sigma_0^{33} \neq 0$, $P^j \neq 0$ — случай следящих поверхностных нагрузок σ_0^{33} . При исследовании поверхностной неустойчивости имеют место условия

$$u^j \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \theta^3 \rightarrow \infty (q \rightarrow \infty) \quad (1.9)$$

В общем случае задачу (1.2) — (1.9) следует исследовать в динамической постановке. Однако достаточные условия применимости статического подхода [8] позволяют его применять при выполнении равенства

$$\int_{L_0} (u_1^3 u_2^m - u_2^3 u_1^m) dL = 0 \quad (1.10)$$

где u^m — перемещения вдоль орта внутренней нормали к кривой L_0 на поверхности среды, к которой приложена нагрузка σ_0^{33} . В дальнейшем будет использован статический подход в теории устойчивости.

2. Представление решений. Рассмотрим некоторые формы потери устойчивости и виды граничных условий, при которых реализуются условия (1.10).

Плоская деформация. Перейдем к декартовым до деформирования координатам $x_i = \theta^i$ и рассмотрим устойчивость среды в плоскости x_1, x_3 . Тогда $u_i = u_i(x_1, x_3)$ ($i=1, 3$), $u_2=0$. На среду действуют нагрузки $\sigma_{11}^{(0)} = -p$, $\sigma_{33}^{(0)} = -q^*$. Уравнения устойчивости для обеих моделей слоев имеют вид

$$L_1 L_3 X = 0, \quad L_{1,3} = \partial^2 / \partial x_3^2 + \eta_{1,3}^2 \partial^2 / \partial x_1^2 \quad (2.1)$$

$$X = X_1 + X_3, \quad L_1 X_1 = 0, \quad L_3 X_3 = 0, \quad \eta_{1,3}^2 = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 - \gamma}$$

В случае линейно-упругих, ортотропных слоев [1] имеем

$$2t_2 t_4 \alpha_0 = t_1 t_2 + t_3 t_4 - (a_{13} + G_{13})^2, \quad t_2 t_4 \gamma = t_1 t_3 \quad (2.2)$$

а для упругопластических слоев

$$2t_6 \alpha_0 = t_1 + t_2 - 2(a_{13} + \mu_{13}), \quad t_6 \gamma = t_5 \quad (2.3)$$

$$t_1 = a_{11} - p, \quad t_2 = a_{33} - q^*, \quad t_3 = G_{13} - p, \quad t_4 = G_{13} - q^*$$

$$t_5 = \mu_{13} - p, \quad t_6 = \mu_{13} - q^*$$

Значение коэффициентов a_{ij} , G_{ij} , μ_{ij} для обеих моделей определяется по известным формулам [1]. Из соотношений (1.3)–(1.5) находим матричное равенство

$$R = LZ, \quad Z = B^* \Psi, \quad R = |u_1, u_3, \sigma_{13}, \sigma_{33}, \sigma_{11}|', \quad \Psi = |\Psi_1, \Psi_3|' \quad (2.4)$$

где штрих означает транспонирование. Элементы матрицы $B^* = [b_{ij}]$ ($i=1, \dots, 5, j=1, 2$), диагональной матрицы $L = [l_{ij}]$ ($i, j=1, \dots, 5$) и вектор-столбца Ψ для упругой модели имеют вид

$$l_{11} = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad l_{22} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad l_{33} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad l_{44} = l_{55} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}$$

$$b_{1k} = 1, \quad b_{2k} (a_{13} + G_{13}) = t_4 \eta_j^2 - t_1, \quad b_{4k} = a_{13} + a_{33} b_{2k} \quad (2.5)$$

$$b_{5k} = a_{11} + a_{13} b_{2k}, \quad b_{3k} = G_{13} (b_{2k} - \eta_j^2), \quad \Psi_j = -(a_{13} + G_{13}) \partial \chi_j / \partial x_1$$

$$(k=1 \text{ при } j=1, k=2 \text{ при } j=3)$$

В случае слоев с упругопластическими свойствами элементы матрицы L сохраняют свой вид, а для матрицы B^* и вектора Ψ получаем

$$b_{1k} = -b_{2k} = 1, \quad b_{3k} = -\mu_{13} (1 + \eta_j^2), \quad b_{5k} = \mu_{13} + p + t_6 \eta_j^2 \quad (2.6)$$

$$b_{4k} = 2a_{13} + \mu_{13} - a_{11} - a_{33} - t_1 - t_6 \eta_j^2, \quad \Psi_j = \partial \chi_j / \partial x_1$$

Рассматривая изгибную форму потери устойчивости с длиной полу-волны l , функции Ψ_j представим

$$\Psi_j = \left\{ R_m^{(i)} \exp \left[\frac{\pi}{l} \eta_j^{(n)} (x_3 - z_{q,n}) \right] + P_m^{(j)} \exp \left[\frac{\pi}{l} \eta_j^{(n)} (z_{q,n} - x_3) \right] \right\} \sin \frac{\pi}{l} x_1 \quad (2.7)$$

$$(m = (q-1)N + n) \quad z_{q,n} \leq x_3 \leq z_{q,n-1}$$

Для упругих слоев ($\text{Re } \eta_j \neq 0, \text{Im } \eta_j = 0$), используя замены $R_m^{(1)} = = 1/2(C_m + A_m)$, $R_m^{(3)} = 1/2(D_m + B_m)$, $P_m^{(1)} = 1/2(C_m - A_m)$, $P_m^{(3)} = 1/2(D_m - B_m)$,

функции Ψ_j окончательно запишем

$$\Psi_1 = \left\{ \begin{matrix} A_m \operatorname{sh} \left[\frac{\pi}{l} \eta_1^{(n)} (x_3 - z_{q,n}) \right] + C_m \operatorname{ch} \left[\frac{\pi}{l} \eta_1^{(n)} (x_3 - z_{q,n}) \right] \\ B_m \operatorname{sh} \left[\frac{\pi}{l} \eta_3^{(n)} (x_3 - z_{q,n}) \right] + D_m \operatorname{ch} \left[\frac{\pi}{l} \eta_3^{(n)} (x_3 - z_{q,n}) \right] \end{matrix} \right\} \sin \frac{\pi}{l} x_1 \quad (2.8)$$

При рассмотрении упругопластической модели могут иметь место три случая: $\operatorname{Re} \eta_j \neq 0, \operatorname{Im} \eta_j = 0$; $\operatorname{Re} \eta_j \neq 0, \operatorname{Im} \eta_j \neq 0$; $\operatorname{Re} \eta_j = 0, \operatorname{Im} \eta_j \neq 0$. В первом функции Ψ_j имеют вид (2.8). Во втором величины $R_m^{(j)}, P_m^{(j)}, \eta_j^{(n)}$

полагаем комплексными, причем $\eta_1^{(n)} = \bar{\eta}_3^{(n)} = \eta^{(n)}$. Определяя по формулам (2.4), (2.6), (2.7) значения величин u_i, σ_{ij} и налагая на них условия $\operatorname{Im} \sigma_{ij} = \operatorname{Im} u_i = 0$, для постоянных $R_m^{(j)}, P_m^{(j)}$ находим зависимости

$$\operatorname{Re} R_m^{(1)} = \operatorname{Re} R_m^{(3)}, \operatorname{Im} R_m^{(1)} = -\operatorname{Im} R_m^{(3)}, \operatorname{Re} P_m^{(1)} = \operatorname{Re} P_m^{(3)}, \operatorname{Im} P_m^{(1)} = -\operatorname{Im} P_m^{(3)} \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.7), окончательно находим, что $\Psi_1 = \bar{\Psi}_3 = \Psi$:

$$\Psi = \left\{ Q_m \operatorname{sh} \left[\frac{\pi}{l} \eta^{(n)} (x_3 - z_{q,n}) \right] + G_m \operatorname{ch} \left[\frac{\pi}{l} \eta^{(n)} (x_3 - z_{q,n}) \right] \right\} \sin \frac{\pi}{l} x_1 \quad (2.10)$$

где Q_m, G_m — комплексные постоянные. В третьем случае

$$\Psi_j = \left\{ R_m^{(j)} \sin \left[\frac{\pi}{l} |\eta_j^{(n)}| (x_3 - z_{q,n}) \right] + P_m^{(j)} \cos \left[\frac{\pi}{l} |\eta_j^{(n)}| (x_3 - z_{q,n}) \right] \right\} \sin \frac{\pi}{l} x_i$$

Это решение соответствует лишь внутренней неустойчивости, поэтому случай $\operatorname{Re} \eta_j = 0, \operatorname{Im} \eta_j \neq 0$ здесь не рассматривается. Неизвестные постоянные в (2.8), (2.10) определяются при удовлетворении условиям (1.6), (1.7). В результате приходим к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Возможно несколько вариантов сопряжения слоев: двух упругих, упругого и упругопластического, двух слоев с упругопластическими свойствами. Во всех случаях уравнения сопряжения c -го и $(c+1)$ -го слоев можно записать

$$F_c \mathbf{T}_m = F_{c+1} \mathbf{S}_{c+1} \mathbf{T}_{m+1} \quad (2.11)$$

Для первого варианта сопряжения слоев имеем $M_c = [m_{ij}^{(c)}], K_c = [k_{ij}^{(c)}]$ ($i, j=1, 2$):

$$\mathbf{T}_m = \begin{vmatrix} A_m & B_m & C_m & D_m \end{vmatrix}, \quad F_c = \begin{vmatrix} M_c & 0 \\ 0 & K_c \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{S}_c = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} \Omega_1^{(c)} & 0 & -\operatorname{sh} \Omega_1^{(c)} & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} \Omega_3^{(c)} & 0 & -\operatorname{sh} \Omega_3^{(c)} \\ -\operatorname{sh} \Omega_1^{(c)} & 0 & \operatorname{ch} \Omega_1^{(c)} & 0 \\ 0 & -\operatorname{sh} \Omega_3^{(c)} & 0 & \operatorname{ch} \Omega_3^{(c)} \end{vmatrix}, \quad \Omega_{1,3}^{(c)} = \frac{\pi}{l} \eta_{1,3}^{(c)} h_c \quad (2.12)$$

$$M_c = \begin{vmatrix} \eta_1^{(c)} b_{11}^{(c)} & \eta_3^{(c)} b_{12}^{(c)} \\ \eta_1^{(c)} b_{41}^{(c)} & \eta_3^{(c)} b_{42}^{(c)} \end{vmatrix}, \quad K_c = \begin{vmatrix} b_{21}^{(c)} & b_{22}^{(c)} \\ b_{31}^{(c)} & b_{32}^{(c)} \end{vmatrix}$$

В соотношениях (2.12) использованы зависимости (2.2), (2.5). При сопряжении двух упругопластических слоев, когда $\operatorname{Re} \eta_{1,3}^{(e)} \neq 0$, $\operatorname{Im} \eta_{1,3}^{(e)} = 0$, выражения (2.11), (2.12) сохраняются. Однако элементы матриц M_c , K_c , S_c определяются с учетом (2.3), (2.6). В случае $\operatorname{Re} \eta_{1,3}^{(e)} \neq 0$, $\operatorname{Im} \eta_{1,3}^{(e)} \neq 0$, полагая $\operatorname{Re} Q_m = A_m$, $\operatorname{Im} Q_m = B_m$, $\operatorname{Re} G_m = C_m$, $\operatorname{Im} G_m = D_m$, вектор T_c и матрицу F_c оставляем без изменения. Для матриц M_c , K_c , S_c получаем следующие выражения:

$$M_c = \begin{vmatrix} \operatorname{Re} (b_{11}^{(e)} \eta^{(e)}) & -\operatorname{Im} (b_{11}^{(e)} \eta^{(e)}) \\ \operatorname{Re} (b_{41}^{(e)} \eta^{(e)}) & -\operatorname{Im} (b_{41}^{(e)} \eta^{(e)}) \end{vmatrix}, \quad K_c = \begin{vmatrix} b_{21}^{(e)} & 0 \\ \operatorname{Re} b_{31}^{(e)} & -\operatorname{Im} b_{31}^{(e)} \end{vmatrix}$$

$$S_c = [s_{ij}^{(e)}] (i, j = 1, \dots, 4), \quad s_{11}^{(e)} = s_{22}^{(e)} = s_{33}^{(e)} = s_{44}^{(e)} = \operatorname{ch} \Omega_1^{(e)} \cos \Omega_3^{(e)}$$

$$s_{12}^{(e)} = -s_{21}^{(e)} = s_{34}^{(e)} = -s_{43}^{(e)} = -\operatorname{sh} \Omega_1^{(e)} \sin \Omega_3^{(e)} \quad (2.13)$$

$$s_{13}^{(e)} = s_{31}^{(e)} = s_{24}^{(e)} = s_{42}^{(e)} = -\operatorname{sh} \Omega_1^{(e)} \cos \Omega_3^{(e)}$$

$$s_{14}^{(e)} = -s_{41}^{(e)} = -s_{23}^{(e)} = s_{32}^{(e)} = \operatorname{ch} \Omega_1^{(e)} \sin \Omega_3^{(e)}$$

$$\Omega_1^{(e)} = (\pi/l) h_c \operatorname{Re} \eta^{(e)}, \quad \Omega_3^{(e)} = (\pi/l) h_c \operatorname{Im} \eta^{(e)}$$

При контакте упругих слоев с упругопластическими условия (2.11) определяем комбинируя первые два (2.12), (2.13) варианта сопряжения. Слоистая среда при $z_{1,0} = 0$ может быть ограничена слоем с упругими или упругопластическими свойствами. Для обоих случаев условия (1.7) имеют вид

$$D^* S_1 T_1 = 0, \quad D^* = [d_{nj}] \quad (n=1, 2; j=1, \dots, 4) \quad (2.14)$$

$$d_{13} = d_{14} = d_{21} = d_{22} = 0$$

Элементы матрицы S_1 и вектор столбца T_1 находим из (2.12), (2.13). Элементы матрицы D^* определяем при подстановке решений (2.8), (2.10) в условия (1.7). Например, при $\sigma_{33}^0 \neq 0$, $P_j = 0$ в первом случае ($\operatorname{Re} \eta_c^{(1)} \neq 0$, $\operatorname{Im} \eta_c^{(1)} = 0$):

$$d_{1n} = \eta_c^{(1)} (a_{31}^{(1)} + t_2^{(1)} b_{1n}^{(1)}), \quad d_{2, n+2} = \eta_c^{(1)} (G_{13}^{(1)} b_{4n}^{(1)} - \eta_c^{(1)} t_4^{(1)}) \quad (c=1 \text{ при } n=1,$$

$c=3$ при $n=2$), а во втором ($\operatorname{Re} \eta_c^{(1)} \neq 0$, $\operatorname{Im} \eta_c^{(1)} \neq 0$) случае $d_{11} =$

$$-id_{12} = \eta_c^{(1)} (b_{41}^{(1)} - q^* b_{21}^{(1)}), \quad d_{23} - id_{24} = b_{31}^{(1)} + q^* \eta_c^{(1)2} b_{11}^{(1)}$$

В случае свободной поверхности ($\sigma_{33}^0 = 0$, $P_j = 0$) для обоих вариантов имеем $d_{1n} = m_{1n}^{(1)}$, $d_{2, n+2} = k_{1n}^{(1)}$. В соотношениях (2.12)–(2.14) величины $b_{ij}^{(e)}$ отличаются от элементов матрицы B^* (2.5), (2.6) и переходят в них лишь при $\sigma_{33}^0 = 0$, $P_j = 0$. Из (2.8), (2.10) находим, что в пределах каждого слоя в интегральном смысле при $x_1 = 0$, $x_1 = 2l$ удовлетворяются условия шарнирного опирания.

Осесимметричная деформация. В цилиндрических координатах $r = \theta^1$, $\phi = \theta^2$, $x_3 = \theta^3$ рассматривается осесимметричная форма потери устойчивости среды, когда $u_r = u_r(r, x_3)$, $u_\phi = u_\phi(r, x_3)$, $u_\theta = 0$, $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = -p$, $\sigma_{33}^0 = -q^*$.

В этом случае для обеих моделей слоев уравнения (2.1) и зависимости (2.4) сохраняют свой вид, если обозначить

$$L_{1,3} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \xi_{1,3}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \xi_{1,3}^2 = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 - \gamma}$$

$$R = |u_r, u_3, \sigma_{3r}, \sigma_{33}, \sigma_{rr}^*|', \quad l_{11} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad l_{22} \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad l_{33} = \frac{\partial^2}{\partial r \partial x_3}$$

$$l_{44} = l_{55} = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \Psi_c = \frac{\partial \chi_c}{\partial x_3}, \quad \sigma_{rr}^* = \sigma_{rr} + 2N \frac{\partial^2}{\partial r^2} (b_{11} \Psi_1 + b_{12} \Psi_3) \quad (2.15)$$

Для линейно-упругой трансверсально-изотропной модели

$$2t_1 t_3 \alpha_0 = t_1 t_2 + t_3 t_4 - (a_{13} + G_{13})^2, \quad t_1 t_3 \gamma = l_2 t_4$$

$$b_{1k} = 1, \quad b_{2k} = t_4 - \xi_c^2 t_1, \quad b_{3k} = G_{13} (b_{2k} - 1)$$

$$b_{4k} = a_{33} b_{3k} + a_{13} \xi_c^2, \quad b_{5k} = b_{2k} + a_{12} \xi_c^2, \quad N = G_{13}$$

$$(c=1 \text{ при } k=1, c=3 \text{ при } k=2) \quad (2.16)$$

Для слоев с упругопластическими свойствами

$$2t_5 \alpha_0 = t_1 + t_2 - 2(a_{13} + \mu_{13}), \quad t_5 \gamma = t_6, \quad b_{1k} = 1, \quad b_{2k} = -\xi_c^2$$

$$b_{3k} = \mu_{13} (b_{1k} + b_{2k}), \quad b_{4k} = \mu_{13} (1 + \xi_c^2) + a_{33} b_{2k} - q^* +$$

$$+ \xi_c^2 [a_{13} (1 - b_{2k}) + t_1], \quad b_{5k} = b_{2k} a_{13} + t_6 - \xi_c^2 (a_{12} b_{1k} + t_1 - a_{13} - \mu_{13}), \quad N = \mu_{13}$$

$$(2.17)$$

При $\text{Re } \xi_c \neq 0, \text{Im } \xi_c = 0$ функция $\Psi_i^{(n)}$ имеет представление

$$\Psi_i^{(n)} = \Psi_{1,i}^{(n)}(x_3) \Psi_{2,i}^{(n)}(r)$$

$$\Psi_{1,i}^{(n)} = R_{m,h}^{(i)} \exp \left[\frac{\kappa_h}{\xi_i^{(n)} R} (x_3 - z_{q,n}) \right] + P_{m,h}^{(i)} \exp \left[\frac{\kappa_h}{\xi_i^{(n)} R} (z_{q,n} - x_3) \right] \quad (2.18)$$

$$\Psi_{2,i}^{(n)} = A_{m,h}^{(i)} J_0 \left(\frac{\kappa_h}{R} r \right) + B_{m,h}^{(i)} N_0 \left(\frac{\kappa_h}{R} r \right) \quad (i=1,3)$$

Здесь следует положить $B_{m,h}^{(i)} = 0$, поскольку при $r \rightarrow 0$ функция Неймана $N_0(\kappa_h r/R) \rightarrow \infty$; R — радиус формы потери устойчивости; κ_h — коэффициент, определяемый при $r=R$ из решения уравнения $dJ_0(\kappa_h)/dr = 0$. Постоянные интегрирования в решении (2.18) определяются так же, как и в случае плоской деформации. При этом уравнения (2.11), (2.14) сохраняются, если элементы матриц M_c, K_c, S_c, D^* определять с учетом зависимостей (2.16) — (2.18)

$$M_c = \begin{vmatrix} b_{21}^{(c)}/\xi_1^{(c)} & b_{22}^{(c)}/\xi_3^{(c)} \\ b_{31}^{(c)}/\xi_1^{(c)} & b_{32}^{(c)}/\xi_3^{(c)} \end{vmatrix}, \quad K_c = \begin{vmatrix} b_{11}^{(c)} & b_{12}^{(c)} \\ b_{41}^{(c)}/\xi_1^{(c)^2} & b_{42}^{(c)}/\xi_3^{(c)^2} \end{vmatrix}$$

Матрица S_c сохраняет вид (2.12), если в ней положить $\Omega_{j,k}^{(c)} = \kappa_h h_c f / (\xi_j^{(c)} R)$ ($j=1, 3$). Вектор-столбец T_c остается без изменения. Элементы матрицы D^* определяются в зависимости от вида поверхностной нагрузки σ_{33}^0 . Аналогично записывается решение Ψ_j и уравнения для определения постоянных интегрирования при остальных значениях параметров $\xi_{1,3}$. Подставляя решение (2.18) в соотношения (2.4), видим, что в пределах каждого слоя при $\eta=R$ в интегральном смысле удовлетворяются условия жесткого защемления.

Таким образом, для рассмотренных выше форм потери устойчивости, граничных условий и видов нагружения задача в едином виде приведена к решению бесконечных систем алгебраических уравнений типа (2.14), (2.14).

3. Характеристические уравнения. Рассмотрим случай, когда полуплоскость при $z_{1,0}=0$ ограничена упругим слоем, а в пределах пакета из четного количества N слоев упругие слои чередуются с упругопластическими. Условия сопряжения (2.11) в пределах пакета N слоев можно записать в общем виде

$$\left. \begin{aligned} F_1 \mathbf{T}_{(q-1)N+1} &= F_2 S_2 \mathbf{T}_{(q-1)N+2} \\ \dots & \dots \\ F_N \mathbf{T}_{qN} &= F_1 S_1 \mathbf{T}_{qN+1} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (q=1, 2, \dots, \infty) \\ (n=1, 2, \dots, N) \end{array} \quad (3.1)$$

Здесь матрицы F_c , S_c при четном c определяются по формулам (2.13), а при нечетном — по (2.12). Из системы (3.1) находим

$$\mathbf{T}_{(q-1)N+1} = \left(\prod_{i=1}^{N-1} F_i^{-1} F_{i+1} S_{i+1} \right) \mathbf{T}_{qN} \quad (3.2)$$

Решение системы (3.1) представим в виде [9, 10]:

$$\mathbf{T}_{qN} = \kappa^q F_N^{-1} \mathbf{T} \quad (3.3)$$

Используя (3.2), (3.3), из (3.1) для определения скалярной величины κ и вектора \mathbf{T} находим уравнение (E — единичная матрица 4-го порядка)

$$\left[\left(\prod_{i=1}^N F_i S_i F_i^{-1} \right) - \frac{1}{\kappa} E \right] \mathbf{T} = 0 \quad (3.4)$$

Собственные числа $\mu = \kappa^{-1}$ определяются из решения алгебраического уравнения

$$\mu^4 - f_1 \mu^3 + f_2 \mu^2 - f_3 \mu + \det H = 0 \quad (3.5)$$

Коэффициенты f_1, \dots, f_4 имеют известный вид [11]. Матрица $H = \Pi(F_i S_i F_i^{-1})$ ($i=1, \dots, N$) в общем случае несимметричная, а ее характеристическое уравнение (3.5) является возвратным. Возвратность уравнения (3.5) покажем на примере плоской деформации. При осесимметричной форме потери устойчивости это доказывается аналогично.

Из (1.2), (1.3) для упругих слоев можно записать уравнения

$$\sigma_{nj,n} + \sigma_{nn}^0 u_{j,nn} = 0, \quad \sigma_{ij} = \delta_{ij} a_{ih} u_{h,k} + (1 - \delta_{ij}) G_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.6)$$

Для упругопластических слоев имеем систему шести уравнений

$$\sigma_{nj,n} + \sigma_{nn}^0 u_{j,nn} = 0, \quad u_{1,1} + u_{3,3} = 0 \quad (3.7)$$

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} (a_{ih} u_{h,k} + p^*) + (1 - \delta_{ij}) \mu_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

В системах (3.6), (3.7) ($n, i, j=1, 3$) коэффициенты a_{ij} , G_{ij} , μ_{ij} считаем периодическими по координате x_3 функциями с периодом $x_3 = h$. Решение системы (3.6) представим в виде

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1(x_3) \\ -g_1(x_3) \end{Bmatrix} \sin \frac{\pi}{l} x_1, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{33} \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_2(x_3) \\ g_2(x_3) \end{Bmatrix} \cos \frac{\pi}{l} x_1 \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в систему (3.6), находим

$$\frac{dy}{dx_3} = Q_1(x_3)g, \quad \frac{dg}{dx_3} = -R_1(x_3)y, \quad y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix}, \quad g = \begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

Определяя в системе (3.7) множитель Лагранжа p^* по формуле

$$p^* = (a_{11} - a_{13})u_{1,1} + \sigma_{33} \quad (3.10)$$

с помощью представлений (3.8) получаем систему (3.9). Однако вместо матриц Q_1, R_1 следует подставлять Q_2, R_2 . Матрицы второго ранга Q_i, R_i ($i=1, 2$) в общем случае несимметричны и периодические по x_3 . Из (3.9) находим

$$\frac{d}{dx_3} \begin{vmatrix} y \\ g \end{vmatrix} = J \begin{vmatrix} R(x_3) & 0 \\ 0 & Q(x_3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ g \end{vmatrix}, \quad J = \begin{vmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

Здесь I — единичная матрица 2-го порядка, $R(x_3) = R_1(x_3)$, $Q(x_3) = Q_1(x_3)$ для нечетных слоев среды, а $R(x_3) = R_2(x_3)$, $Q(x_3) = Q_2(x_3)$ для четных. Используя теорему Ляпунова — Пуанкаре [11], после ряда преобразований находим, что характеристическое уравнение матрицы монодромии системы (3.11) $U(h, 0)$ является возвратным. Подставляя решения (2.8), (2.10) при $q=1, n=1$; $q=1, n=N$ в формулы (2.4) и используя зависимость (3.2), после преобразований находим, что $H = U^{-1}$. Поскольку собственные числа прямой κ_i и обратной $\lambda_i^{(1)}$ матриц связаны зависимостью $\kappa_i = 1/\lambda_i^{(1)}$, то уравнение (3.5) также является возвратным. Следовательно, $f_1 = f_3$, $\det H = 1$. Неравным между собой числам κ_m соответствуют линейно-независимые собственные векторы T_m . Решение (3.3) перепишем в виде

$$T_{qN} = \sum_{m=1}^4 X_m \kappa_m^q F_N^{-1} T_m \quad (3.12)$$

Можно показать, что числа κ_m удовлетворяют условиям $|\kappa_1| |\kappa_3| = 1$, $|\kappa_2| |\kappa_4| = 1$. Тогда в случае поверхностной неустойчивости ($|\kappa_1| < 1$, $|\kappa_2| < 1$) и при исследовании внутренней неустойчивости ($|\kappa_1| = |\kappa_2| = 1$) в решении (3.12) необходимо положить $X_3 = X_4 = 0$. Подставляя решение (3.12) в условия на поверхности (2.14), находим систему однородных уравнений для определения постоянных X_1, X_2 . Условие существования нетривиальных решений этой системы является условием для определения критических значений параметров нагружения среды

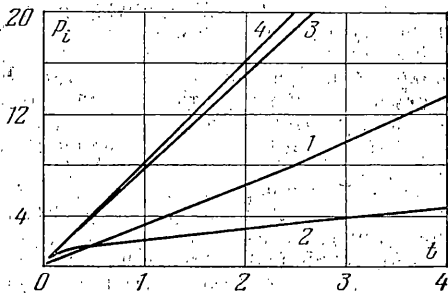
$$\det(D^* F_1^{-1} T_1, D^* F_1^{-1} T_2) = 0 \quad (3.13)$$

4. Результаты решения. Рассмотрим в рамках плоской деформации неустойчивость слоистой полуплоскости при $N=2$, $\sigma_{11}^0 = -p$, $\sigma_{33}^0 = \sigma_{33,q}^0 = 0$, когда упругие слои чередуются с упругими или упругопластическими. Считаем, что докритические деформации всех слоев одинаковы $\varepsilon_{11,q}^0 = \varepsilon_{11,q+1}^0 = \varepsilon$. Для упругопластических слоев предполагается степенная зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций $\sigma_u = A \varepsilon_u^k$, $k < 1$ (при $k=1$, $A=E$, $\nu=0,5$). В каждом слое среды возникают напряжения $\sigma_{11,q}^0 = -p \mu_q$. Для линейно-упругих ($q=1$) и упругопластических несжимаемых ($q=2$) слоев имеем

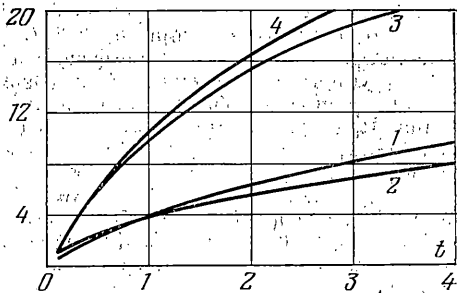
$$\mu_1 = [\rho_1 + \frac{1}{3}(1 - \rho_1)(E_c/E)(1 - \nu^2)]^{-1}, \quad \mu_2 = [\frac{1}{3}\rho_1 E / [E_c(1 - \nu^2)] + 1 - \rho_1]^{-1} \quad (4.1)$$

где $E_c = \sigma_u / \varepsilon_u$ — секущий модуль материала упругопластического слоя, E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона упругого слоя. Когда среда состоит из линейно-упругих слоев, коэффициенты μ_q определяются формулой

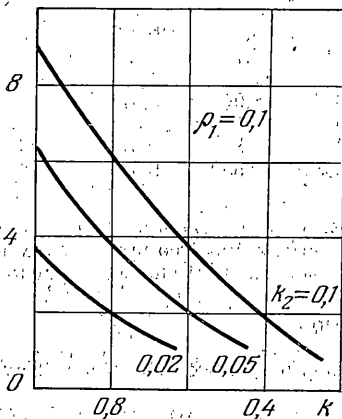
$$\mu_q = l_q \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i l_i \right)^{-1}, \quad l_q = a_{11}^{(q)} - a_{13}^{(q)2} / a_{33}^{(q)}, \quad \rho_i = h_i / \sum_{n=1}^2 h_n \quad (4.2)$$



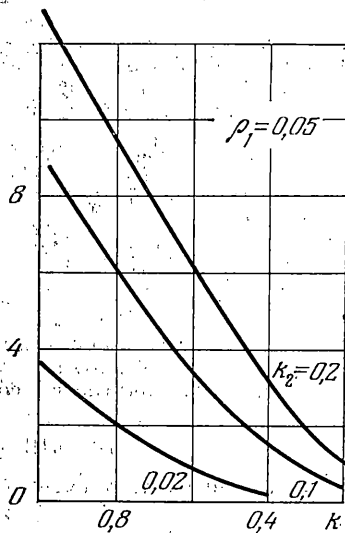
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Для реализации развитого метода и решения уравнения (3.13) применялась ЭВМ. На фиг. 1, 2 показана зависимость величины p_i и e_i ($i=1, 2, 3, 4$) от параметра t для среды, состоящей из линейно-упругих изотропных слоев при $\nu_1=\nu_2=0,3$, $\rho_1=0,05$. Кривые 1, 2 соответствуют результатам исследования поверхностной неустойчивости, полученным в публикуемой работе и на основании прикладного подхода [4, 5], а кривые 3, 4 – результатам исследования поверхностной и внутренней устойчивости, найденным с помощью континуальной теории [1, 2]. Здесь $p_i = 10^3 (p_i^*/E_1)$, $e_i = 10^2 \varepsilon_i^*$, $t = 50 n$, $n = E_2/E_1$, p_i^* , ε_i^* – критические значения сжимающей нагрузки $\sigma_{11}^{(0)}$ и деформаций укорочения ε_{11}^0 . Для построения кривых 1, 3, 4 на фиг. 2 использована зависимость

$$\varepsilon^* \left[\rho_1 + \frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2} n(1-\rho_1) \right] = \frac{p^*}{E_1} (1-\nu_1^2) \quad (4.3)$$

а для кривой 2 – формула $\varepsilon^* E_1 = p^* (1-\nu_1^2)$. В последнем случае считаем, что нагрузка приложена к более жестким слоям [5], а при построении кривой 2 (фиг. 1) величина σ_{11}^0 приложена к каждому слою среды.

Для полуплоскости, состоящей из чередующихся упругих и упругопластических слоев, результаты приведены на фиг. 3, 4, где для разных значений ρ_1 и $\nu=0,45$ показано изменение величины $e_1^* = \varepsilon_1^* \cdot 10^{-2}$ от характеристик пластических слоев $k_2 = (E/A)$, k .

Зависимость величин p_1 , e_1 ($\nu_1=\nu_2=0,3$, $n=0,1$) для среды с упругими слоями и величины e_1^* ($\nu=0,45$, $k=0,25$, $k_2=0,1$) для среды с упругими и пластическими слоями от параметра ρ_1 показана ниже:

Исходя из полученных результатов можно заключить, что явление поверхностной неустойчивости для среды с упругими чередующимися слоями развивается преимущественно в тех случаях, когда она ограничена более тонким, но более жестким слоем. Величина параметра ρ_1 существенно влияет на минимальное предельное

значение $(E_2/E_1)^*$, при котором еще наблюдается это явление. Например, при $\rho_1 = 0,05$ $(E_2/E_1)^* \approx 0,001$, а при $\rho_1 = 0,2$ $(E_2/E_1)^* \approx 0,025$. С изменением ρ_1 существенно изменяется величина p_1 , а коэффициент e_1 изменяется не более чем на 6%. Для среды с упругопластическими слоями изменение e_1^* не превышает 1%. Отметим, что эта закономерность обнаруживается лишь в случае применения точного метода решения. При применении прикладного подхода или континуальной теории наблюдается существенное изменение величин e_2, e_3, e_4 в зависимости от изменения параметра ρ_1 .

Из фиг. 1, 2 следует, что подход [5] позволяет получить приближенные значения p_2, e_2 , отличающиеся не более чем на 10% от p_1, e_1 соответственно при $0,008 \geq n \geq 0,002$ и $0,025 \geq n \geq 0,0025$. Для определения величин e_3, e_4 на основе континуальной теории [1, 2] целесообразно применение выражений (4.3). Неучет пластических свойств слоев, если они имеют место, приводит к ошибкам количественного и качественного характера. Например, если среда ограничена более тонким слоем с упругопластическими свойствами (алюминий $k=0,25, A=10^8$ Па, а более толстые слои упругие (брекерная резина $\nu=0,5, E=10^7$ Па), то при $k_2=0,1, \rho_1=0,1$ имеем $e_1^* = 5,58 \cdot 10^{-1}$. Если ограничиться учетом упругих свойств алюминия ($\nu=0,4, E=6 \cdot 10^{10}$ Па), то явление поверхностной структурной неустойчивости в этом случае не обнаруживается. Минимальное предельное значение $k=k_1$, при котором наблюдается это явление, существенно зависит от параметров $\rho_1, E/A$. При $\rho_1=0,1, E/A=0,1, k_1=0,22$, а при $\rho_1=0,1, E/A=0,02, k_1=0,62$.

ρ_1	0,5	0,2	0,1	0,05	0,025
p_1	67,35	34,50	22,51	17,70	15,2
e_1	11,17	11,2	10,8	11,0	11,5
e_2	—	15,54	12,9	8,97	6,37
e_3	11,17	14,5	18,9	22,6	26,0
e_4	11,25	15,1	20,2	25,8	29,01
e_1^*	—	—	0,558	0,559	0,559

Отметим, что сформулированные выводы имеют место лишь для рассмотренных здесь параметров среды. Для других условий нагружения геометрических и физико-механических характеристик слоев необходимы дополнительные исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев: Наук. думка, 1971. 276 с.
2. Гузь А. Н. Устойчивость ортотропных тел. — Прикл. механика, 1967, т. 3, вып. 5, с. 29—38.
3. Гузь А. Н. О континуальной теории разрушения при сжатии композитного материала с упругопластической матрицей. — Докл. АН УССР, 1982, т. 262, № 3, с. 556—560.
4. Бологин В. В. Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин. — Расчеты на прочность: Сб. статей. М.: Машиностроение, 1965, вып. 11, с. 31—63.
5. Бологин В. В., Синицын Е. Н. Локальное выпучивание сжатых элементов из слоистого вязкоупругого материала. — Механ. полимеров, 1968, № 5, с. 816—821.
6. Бабич И. Ю., Гузь А. Н., Шутьга Н. А. Исследование динамики и устойчивости композитных материалов в трехмерной подстановке. — Прикл. механика, 1982, т. 18, № 1, с. 3—32.
7. Ильюшцын А. А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
8. Гузь А. Н. Основы теории устойчивости горных выработок. Киев: Наук. думка, 1977. 204 с.
9. Гузь А. Н., Чехов В. Н., Шутьга Н. А. Поверхностная неустойчивость слоистого полупространства периодической структуры. — Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 6, с. 1306—1310.
10. Шутьга Н. А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. Киев: Наук. думка, 1981. 199 с.
11. Мьшикис А. Д. Математика. Специальные курсы. Для втузов. М.: Наука, 1974. 632 с.

Киев

Поступила в редакцию
5.V.1983