

УДК 539.3

## ДАВЛЕНИЕ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА НА ПОЛУПРОСТРАНСТВО С ПЕРЕМЕННЫМ ПО ГЛУБИНЕ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА

КУЗНЕЦОВ Е. А.

Получено приближенное решение плоской контактной задачи о давлении круглого цилиндрического штампа на границу неоднородного упругого полупространства, у которого модуль сдвига постоянный, а коэффициент Пуассона является непрерывно изменяющейся функцией глубины. На поверхности полупространства и на бесконечно большой глубине коэффициент Пуассона принимает конечные, отличные от нулевых значения. Решение поставленной задачи получено полубратным методом, когда предполагалась известной форма эпюры контактного давления и требовалось определить некоторые параметры, характеризующие эту форму. Используя полученное решение, изучено распределение нормальных и максимальных касательных напряжений на поверхности и в глубинных слоях неоднородного полупространства.

1. Будем считать, что на границу неоднородного полупространства давит без трения круглый цилиндрический штамп. Модуль сдвига  $\mu$  в упругом полупространстве постоянный, а коэффициент Пуассона  $\nu$  непрерывно изменяется от одного конечного значения  $\nu_0$  на поверхности до другого конечного значения  $\nu_\infty$  на бесконечно большой глубине по следующему закону:

$$1-\nu(z) = (A + Be^{\gamma z})^{-1} \quad (\gamma \geq 0, z \leq 0) \quad (1.1)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $\gamma$  — некоторые параметры, позволяющие рассматривать различные конечные значения  $\nu_0$  и  $\nu_\infty$ , а также варьировать скоростью изменения  $\nu(z)$ . Предполагается, что неоднородная область занимает нижнее полупространство, в котором введена декартова система координат с осью  $z$ , направленной перпендикулярно поверхности вверх; ось  $x$  направлена параллельно поверхности.

Из (1.1) видно, что  $\nu_0$  и  $\nu_\infty$  связаны с параметрами  $A$  и  $B$  следующим образом:

$$A = 1/(1-\nu_\infty), \quad B = (\nu_0 - \nu_\infty) / [(1-\nu_0)(1-\nu_\infty)] \quad (1.2)$$

Для определения однозначной связи скорости изменения  $\nu(z)$  с параметром  $\gamma$  представляется естественным использовать следующий критерий:

$$\delta = (\nu(z) - \nu_\infty) / (\nu_0 - \nu_\infty) \quad (1.3)$$

где  $\delta$  — какое-либо число. Согласно этому критерию, параметр  $\gamma$  подбирается так, чтобы на глубине  $z^*$  текущее значение коэффициента Пуассона отличалось от предельного глубинного значения  $\nu_\infty$  на величину  $\delta(\nu_0 - \nu_\infty)$ . Подставляя (1.1) в (1.3), находим

$$\gamma = \frac{1}{|z^*|} \ln \left\{ \frac{(1-\nu_\infty) - \delta(\nu_0 - \nu_\infty)}{\delta(1-\nu_0)} \right\} \quad (1.4)$$

Предположение о непрерывном изменении коэффициента Пуассона согласуется, например, с неравномерным распределением пористости, так как известно [1], что он в значительной мере зависит от пористости,

а пористость, очевидно, в любой детали распределена неравномерно по глубине. Отметим еще одно обстоятельство: предполагая постоянным модуль сдвига и переменным  $\nu(z)$ , постулируется, что модуль упругости изменяется при удалении от поверхности неоднородного полупространства фактически аналогично коэффициенту Пуассона.

Для решения поставленной контактной задачи необходимо найти зависимость для определения вертикальных перемещений границы рассматриваемого неоднородного полупространства под действием единичной сосредоточенной по прямой линии силы, приложенной перпендикулярно поверхности. Эту зависимость часто называют функцией влияния. В [2, 3] приведено общее решение задачи для сосредоточенной силы в виде функции

$$L(x, z) = -\frac{P_0}{\pi\gamma_0} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\alpha^3} e^{\alpha z} \left\{ \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{2B\alpha(1-e^{\gamma z}) - \gamma z A(2\alpha + \gamma)}{2\alpha(A+B) + \gamma A} \right\} d\alpha \quad (1.5)$$

где  $P_0$  — величина сосредоточенной силы, приложенной к единице длины. Используя связь этой функции с вертикальными перемещениями  $u_z$  [4, 5], можно найти выражение для функции влияния, которое имеет вид [3]

$$u_z|_{z=0} = -\frac{P_0}{\pi\mu(A+B)} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\alpha} d\alpha + \frac{BC}{A} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\alpha(\alpha+C)} d\alpha \right\}, \quad C = \frac{\gamma A}{2(A+B)} \quad (1.6)$$

Если учесть значение интеграла [6]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\alpha} d\alpha = 2 \ln(x) - \ln(0) - C \quad (1.7)$$

где  $C$  — постоянная Эйлера, то первое слагаемое в выражении для функции влияния будет определять перемещение границы однородного полупространства, у которого коэффициент Пуассона постоянный и равен  $\nu_0$ , а второе связано с неоднородностью.

Используя (1.6), можно составить интегральное уравнение для определения контактного давления

$$f(x) + \varphi = \frac{1}{\pi\mu A} \int_{-N}^N P(t) K(x-t) dt, \quad (1.8)$$

$$K(t) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha t}{\alpha} d\alpha - \frac{B}{A+B} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha t}{\alpha+C} d\alpha$$

где  $\varphi$  — постоянная, определяющая жесткое перемещение границы неоднородного полупространства и включающая неограниченную составляющую,  $N$  — полуширина контактной площадки,  $f(x)$  — уравнение профиля штампа.

К уравнению (1.8) следует присоединить условие равновесия

$$P_0 = \int_{-N}^N P(t) dt \quad (1.9)$$

которое можно использовать для определения неизвестных в общем случае размеров контактной области ( $P_0$  — главный вектор всей внешней нормальной нагрузки, приложенной к единице длины штампа).

Методом решения интегральных уравнений вида (1.8) посвящена обширная литература [7]. Основным недостатком известных методов в практическом отношении является то, что искомое контактное давление пред-

ставляется обычно в довольно громоздком виде. Поэтому при доведении до числа результатов точного решения подобных интегральных уравнений даже при определении лишь контактного давления приходится выполнять громоздкие расчеты. Поэтому желательно получить простое (пусть даже приближенное) решение поставленной задачи.

С обычной степенью приближения будем считать, что  $f(x) = \frac{1}{2}x^2/R$ , где  $R$  — радиус кривизны штампа в вершине.

Выражение для контактных усилий будем искать в виде

$$P(x) = \mu \sqrt{N^2 - x^2} [\Psi R(1 - \nu_\infty)] \quad (1.10)$$

где  $\Psi$  — некоторая постоянная, зависящая от неоднородности и равная единице для однородного материала. Следовательно, предполагается, что в неоднородном случае, как и в однородном, контактное давление распределяется по эллиптическому закону.

Для доказательства правомерности этого предположения подставим (1.10) в правую часть (1.8) и вычислим в результате этого форму вертикальных перемещений границы неоднородного полупространства, когда к нему приложена внешняя нормальная нагрузка вида (1.10). Таким путем находим

$$u_z|_{z=0} = \frac{N}{\Psi R_0} \int_0^\infty \cos \alpha x J_1(\alpha N) \left\{ \frac{2B}{\gamma A} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha + C} \right) - \frac{1}{\alpha^2} \right\} d\alpha \quad (1.11)$$

где  $J_1(\alpha N)$  — функция Бесселя первого рода.

Если правую часть (1.11) представить в виде трех слагаемых (в соответствии со слагаемыми в фигурных скобках, то первый и последний интегралы вычисляются элементарно [6]:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x J_1(\alpha N)}{\alpha} d\alpha = \frac{\sqrt{N^2 - x^2}}{N} \quad \text{при } |x| \leq N \quad (1.12)$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x J_1(\alpha N)}{\alpha^2} d\alpha = -\frac{N}{2} \left\{ \frac{x^2}{N^2} - \frac{1}{2} + C + \ln\left(\frac{N}{2}\right) + \ln(0) \right\} \quad \text{при } |x| \leq N$$

С учетом (1.12) для вертикальных перемещений границы неоднородного полупространства находим

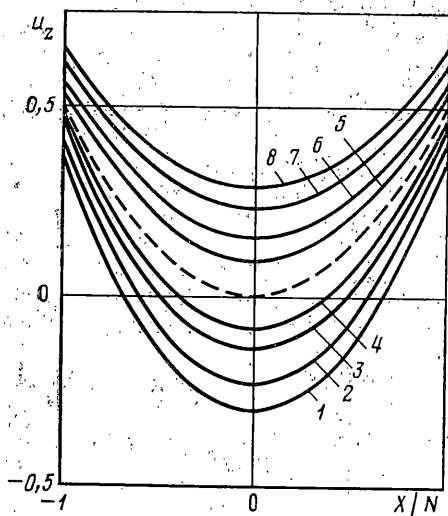
$$u_z|_{z=0} = \frac{x^2}{2\Psi R} + \frac{2B}{\Psi R \gamma A} \left[ \sqrt{N^2 - x^2} - N \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x J_1(\alpha N) d\alpha}{\alpha + C} \right] + \beta \quad \text{при } |x| \leq N \quad (1.13)$$

$$\beta = \frac{N^2}{2\Psi R} \left[ C + \ln\left(\frac{N}{2}\right) - \frac{1}{2} + \ln(0) \right] \quad (1.14)$$

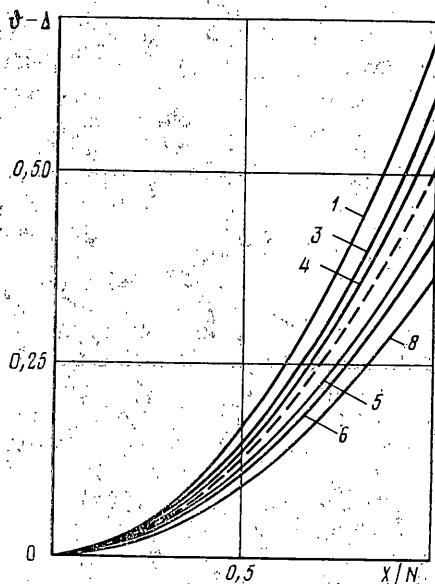
Неограниченную постоянную  $\beta$ , определяющую жесткое перемещение полупространства, можно в дальнейшем считать равной нулю.

Если в (1.14) отбросить неограниченную составляющую  $\ln(0)$ , то оставшуюся часть, вероятно, можно рассматривать как глубину внедрения круглого цилиндрического штампа в упругое неоднородное полупространство.

Интеграл в (1.13) в общем случае нельзя выразить через элементарные или известные специальные функции. Поэтому его следует определять численными методами. Но в приведенной форме он мало пригоден для численной реализации, так как подынтегральная функция на участке интегрирования бесчисленное множество раз меняет знак и очень медленно (как  $\alpha^{-2}$ ) стремится к нулю при неограниченном возрастании параметра интегрирования. Кроме того, в этом случае необходимо многократно вы-



Фиг. 1



Фиг. 2

числять функцию Бесселя. Поэтому рассматриваемый интеграл следует несколько преобразовать. Учитывая тождество

$$\frac{1}{\alpha+C} = \int_0^{\infty} \exp[-(C+\alpha)y] dy \quad (1.15)$$

рассматриваемый интеграл можно преобразовать к виду

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x J_1(\alpha N)}{\alpha+C} d\alpha = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} e^{-cy} \{1 - W(x, y, N)\} dy \quad (1.16)$$

$$W(x, y, N) = \left\{ \frac{(x^2+y^2) [\sqrt{(x^2+y^2+N^2)^2 - 4x^2N^2} + (x^2+y^2+N^2)] - 2x^2N^2}{2[(x^2+y^2+N^2)^2 - 4x^2N^2]} \right\}^{1/2}$$

где функция  $W(x, y, N)$  достаточно гладкая и стремящаяся к единице при  $y \rightarrow \infty$ .

Таблица 1

$m$	$v_0$	$v_{\infty}$	$z^*$	$v$	$\Psi$	$\beta, \%$
1	0,2	0,5	3,0	1,380383	1,308942	2,1
2	0,2	0,5	2,0	2,070574	1,248678	2,6
3	0,2	0,5	1,0	4,141149	1,155021	2,9
4	0,2	0,4	1,0	4,320816	1,095659	1,7
5	0,4	0,2	1,0	4,890349	0,902564	1,6
6	0,5	0,2	1,0	5,071417	0,840507	2,5
7	0,5	0,2	2,0	2,535708	0,776756	2,0
8	0,5	0,2	3,0	1,690472	0,742902	1,7

При выполнении расчетов предполагалось, что  $N=R=1$ . Результаты расчетов вертикальных перемещений, взятых в отношении к неизвестной пока постоянной  $\Psi$ , частично приведены на фиг. 1. Исходные данные для этих кривых (величины параметров  $\nu_0, \nu_\infty, \gamma, z^*$ ;  $m$  — номер кривой) приведены в табл. 1. Параметры  $\gamma$  подбирались при помощи соотношения (1.4) так, чтобы на глубине  $z^*=1, 2, 3$  оценка  $\delta=0,01$ , т. е. на этих глубинах должно практически заканчиваться изменение коэффициента Пуассона. Штриховая линия на этой фигуре соответствует вертикальным перемещениям границы идеально однородного полупространства на участке контакта, т. е. параболическому профилю с единичным радиусом кривизны в вершине.

Из фиг. 1 видно, что вертикальные перемещения поверхности неоднородного полупространства на участке контакта имеют форму, фактически не отличающуюся от параболической. Отличие их практически состоит лишь в том, что они имеют различный радиус кривизны в вершине. Это хорошо видно, если графики фиг. 1 совместить в одной общей точке — в центре участка контакта. Преобразованные таким путем кривые фиг. 1 показаны на фиг. 2.

Результаты расчетов, приведенные на фиг. 1, 2, свидетельствуют о том, что исходное предположение об эллиптическом законе распределения контактного давления на поверхности неоднородного полупространства, когда к нему прижат параболический штамп, в достаточной степени соответствует действительности. Подбирая должным образом величину постоянной  $\Psi$ , всегда можно добиться, чтобы прогиб поверхности неоднородного полупространства на участке контакта имел форму, достаточно близкую к параболической с любым заданным радиусом кривизны в вершине.

Из фиг. 1 также видно, что графики, соответствующие прогибам поверхности неоднородного полупространства, в зависимости от характера неоднородности проходят выше или ниже соответствующего графика для однородного полупространства. Следовательно, глубина внедрения штампа также в значительной мере зависит от характера изменения коэффициента Пуассона. А так как глубина внедрения штампа является одной из основных характеристик, определяющих контактную жесткость узлов сопряжения, то представляет интерес аналитическое выражение для определения глубины внедрения параболического штампа в неоднородное полупространство. Строго говоря, в данном случае будет определяться не сама глубина внедрения, а разность между глубиной внедрения в однородное и неоднородное полупространство. Для определения этой разности, которую обозначим  $\Delta$ , в (1.13) следует положить  $x=\beta=0$ . Тогда находим

$$\Delta = \frac{2BN}{\gamma\Psi RA} \left\{ 1 - \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha)}{\alpha + CN} d\alpha \right\} \quad (1.17)$$

Интеграл в этом выражении можно выразить через функции Вебера  $E_1(z)$  и Неймана  $N_1(z)$  или представить в виде степенного ряда [6]:

$$\int_0^\infty \frac{J_1(\alpha) d\alpha}{\alpha + CN} = \frac{1}{CN} + \frac{\pi}{2} [E_1(CN) + N_1(CN)] = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (CN)^{2n}}{(2n+1) [(2n-1)!!]^2} + \frac{CN}{2} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (CN/2)^{2n}}{(n!)^2 (n+1)} \left\{ \ln \left( \frac{CN}{2} \right) + C - \frac{1}{2(n+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right\} \quad (1.18)$$

$$0! = (-1)!! = 1, \quad \sum_{k=1}^0 \frac{1}{k} = 0$$

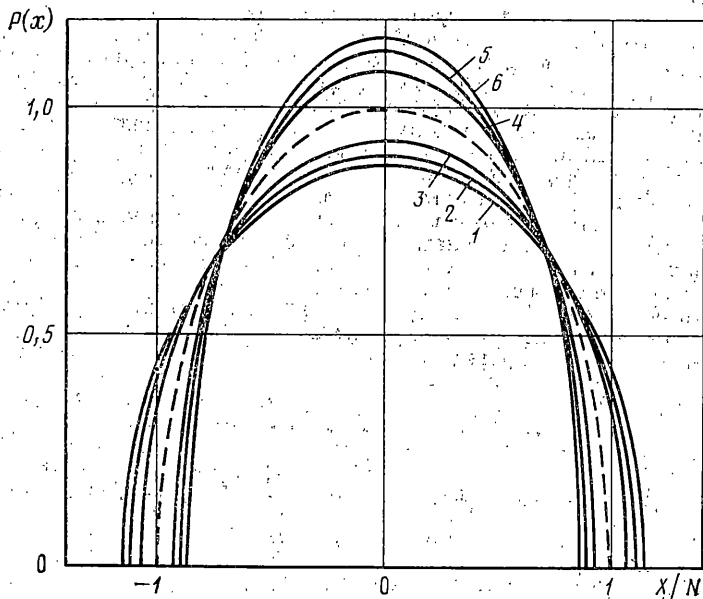
Для определения неизвестной постоянной  $\Psi$  можно использовать известную [8] формулу

$$R_* = (1 - y'^2)^{3/2} / y'' \quad (1.19)$$

связывающую радиус кривизны  $R_*$  в любой точке плоской кривой с уравнением этой кривой. В данном случае требуется определить радиус кривизны кривой, уравнение которой (1.13), в начале координат. Из (1.13) и (1.19) находим

$$R_* = R\Psi \left\{ \frac{A}{A+B} \left[ 1 + \frac{BCN}{A} \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha)}{\alpha + CN} d\alpha \right] \right\}^{-1} \quad (1.20)$$

Из условий поставленной задачи следует, что радиус кривизны вертикальных перемещений границы неоднородного полупространства в середине контактной пло-



Фиг. 3

щадки должен быть равен  $R$ . Это условие, как видно из (1.20), может быть выполнено только в том случае, если

$$\Psi = \frac{A}{A+B} + \frac{BCN}{A+B} \int_0^{\infty} \frac{J_1(\alpha)}{\alpha + CN} d\alpha \quad (1.21)$$

Значения параметра  $\Psi$ , вычисленные по (1.21), для случаев, представленных на фиг. 1 и 2, приведены в табл. 1. Если теперь определять перемещение границы неоднородного полупространства из (1.13) с учетом (1.21), то максимальное отклонение  $\epsilon$  профиля прогиба границы неоднородного полупространства от строго параболического профиля с радиусом кривизны  $R$  в вершине будет наблюдаться в районе концов контактной площадки. Это максимальное отклонение, как показывают расчеты, не превышает 3%. Значения этих отклонений для случаев, представленных на фиг. 1, приведены в табл. 1.

Выражение для определения размеров контактной области находим из (1.9) и (1.10):

$$N = [2P_0 \Psi R (1 - \nu_{\infty}) / (\pi \mu)]^{1/2} \quad (1.22)$$

Следовательно, поставленная задача в приближенном виде решена полностью. Полученное решение вполне пригодно для определения контактных характеристик, так как незначительно отличается от точного решения соответствующей контактной задачи.

На фиг. 3 приведены результаты расчетов по определению контактного давления по (1.10) и размеров контактной области по (1.22) с учетом (1.21) и (1.18). Ве-

Таблица 2

$m$	$\nu_0$	$\nu_{\infty}$	$z^*$	$\nu$
1	0,2	0,5	1,0	4,141149
2	0,2	0,5	2,0	2,070574
3	0,2	0,5	3,0	1,380383
4	0,5	0,2	1,0	5,071417
5	0,5	0,2	2,0	2,535708
6	0,5	0,2	3,0	1,690472

личина контактного давления здесь взята в отношении к  $\mu/[R(1-\nu_\infty)]$ . Исходные данные для этих кривых указаны в табл. 2. Штриховые линии на фиг. 3 соответствуют эпюре контактного давления на поверхности однородного полупространства, у которого коэффициент Пуассона постоянный и равен 0,5 (если сравнивать с кривыми 1-3) или 0,2 (если сравнивать с кривыми 4-6). В качестве единицы длины по координате  $x$  на фиг. 3 взята полуширина контактной площадки для однородного полупространства.

2. Перейдем теперь к изучению напряженного состояния неоднородного полупространства вида (1.1), к поверхности которого прижат цилиндрический штамп с круглым (или строго говоря параболическим) основанием.

В [2, 3] показано, что если к поверхности рассматриваемого неоднородного полупространства приложена нагрузка вида (1.10), то для определения напряженного состояния в нем можно использовать функцию

$$L(x, z) = -\frac{\mu N}{\gamma \Psi R(1-\nu_\infty)} \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha N) \cos \alpha x}{\alpha^4} e^{\alpha z} \times \\ \times \left\{ \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{2B\alpha(1-e^{\gamma z}) - \gamma z A(2\alpha + \gamma)}{2\alpha(A+B) + \gamma A} \right\} d\alpha \quad (2.1)$$

которая связана с нормальными и касательными напряжениями  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  и  $\tau_{xz}$  следующим образом [4, 5]:

$$\sigma_z = \partial^4 L / \partial x^4, \quad \sigma_x = \partial^4 L / \partial x^2 \partial z^2, \quad \tau_{xz} = -\partial^4 L / \partial x^3 \partial z \quad (2.2)$$

Подставляя (2.1) в (2.2), после ряда преобразований получаем

$$\sigma_z = -\frac{\mu N}{\Psi R(1-\nu_\infty)} \int_0^\infty J_1(\alpha N) \cos \alpha x e^{\alpha z} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{2B\alpha(1-e^{\gamma z}) - \gamma z A(2\alpha + \gamma)}{\gamma[2\alpha(A+B) + \gamma A]} \right\} d\alpha \quad (2.3)$$

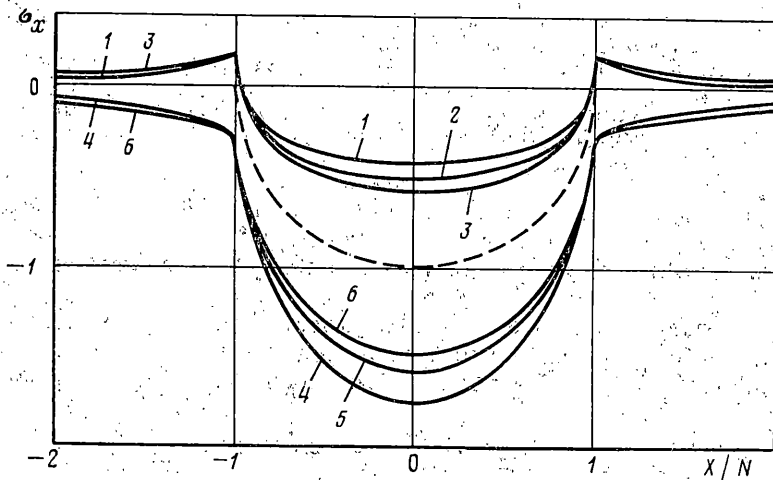
$$\sigma_x = \frac{\mu N}{\Psi R(1-\nu_\infty)} \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha N) \cos \alpha x}{\alpha} e^{\alpha z} \times \\ \times \left\{ \frac{2B(\alpha + \gamma)^2(1-e^{\gamma z}) - \alpha \gamma z A(2\alpha + \gamma) - 2B\gamma^2}{\gamma[2\alpha(A+B) + \gamma A]} - 1 \right\} d\alpha \quad (2.4)$$

$$\tau_{xz} = \frac{\mu N}{\Psi R(1-\nu_\infty)} \int_0^\infty J_1(\alpha N) \sin \alpha x e^{\alpha z} \left\{ \frac{2B(\alpha + \gamma)(1-e^{\gamma z}) - \gamma z A(2\alpha + \gamma)}{\gamma[2\alpha(A+B) + \gamma A]} \right\} d\alpha \quad (2.5)$$

Рассмотрим сначала распределение напряжений на поверхности неоднородного полупространства (при  $z=0$ ). Из (2.3) и (2.5) видно, что здесь касательное напряжение  $\tau_{xz}=0$ , а  $\sigma_z = -P(x)$ , т. е. удовлетворяются граничные условия. Из (2.4) после очевидных преобразований получаем

$$\sigma_x|_{z=0} = \frac{\mu \beta^*}{\Psi R(1-\nu_\infty)} \left\{ \frac{A+2B}{A} \sqrt{N^2-x^2} - \frac{2BN}{\beta^*} \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha N) \cos \alpha x}{\alpha + C} d\alpha \right\} \\ \beta^* = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq N \\ 0 & \text{при } |x| > N \end{cases} \quad (2.6)$$

Из (2.6) видно существенное различие в распределении нормальных напряжений  $\sigma_x$  на поверхности однородного и неоднородного полупространства, так как известно [9], что при давлении круглого цилиндриче-



Фиг. 4

ского штампа на однородное полупространство при отсутствии касательной нагрузки на поверхности нормальные напряжения  $\sigma_x$  возникают только на участке контакта, а вне его отсутствуют, причем распределение их совершенно аналогично контактному давлению.

Результаты расчетов по (2.6) с учетом (1.16) частично представлены на фиг. 4. Исходные данные для кривых на фиг. 4 и последующих фигурах приведены в табл. 2. Штриховая линия соответствует распределению нормальных напряжений  $\sigma_x$  на поверхности однородного полупространства. Величины напряжений на этой фигуре и всех последующих взяты в отношении к наибольшему контактному давлению, т. е. к  $\mu/[\Psi R(1-\nu_\infty)]$ .

Приведенные графики позволяют сделать ряд выводов о характере распределения нормальных напряжений  $\sigma_x$  на поверхности неоднородного полупространства. В отличие от однородного полупространства при любой неоднородности вида (1.1) вся поверхность (и вне участков непосредственного контакта) подвергается действию напряжений  $\sigma_x$ , причем в зависимости от характера неоднородности они могут менять знак, т. е. сжимающие напряжения  $\sigma_x$  могут сменяться растягивающими.

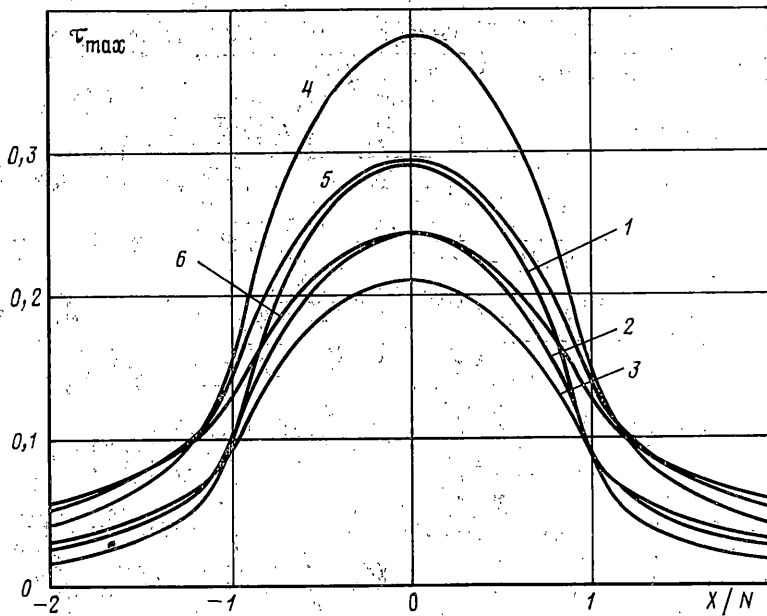
Если поверхностное значение коэффициента Пуассона меньше глубинного, то уровень сжимающих напряжений непосредственно на участке соприкосновения несколько уменьшается (тем больше, чем больше скорость изменения  $\nu(x)$ , т. е. чем больше параметр  $\gamma$ ); вблизи концов участка контакта сжимающие напряжения  $\sigma_x$  сменяются растягивающими, достигающими наибольших по величине значений при  $x = \pm N$  и монотонно убывающими до нуля при  $x \rightarrow \pm \infty$ . Иная картина наблюдается, если поверхностное значение коэффициента Пуассона больше глубинного. В этом случае на всей поверхности неоднородного полупространства действуют только сжимающие нормальные напряжения  $\sigma_x$ , уровень которых непосредственно на участке контакта больше, чем в однородном случае. При этом на контактной площадке сжимающие напряжения тем больше, чем быстрее изменяется коэффициент Пуассона при удалении от поверхности.

Можно отметить и то обстоятельство, что уровень напряжений на участке непосредственного соприкосновения в значительно большей степени зависит от размеров диапазона, в котором изменяется коэффициент Пуассона, т. е. от разности  $|\nu_0 - \nu_\infty|$ , чем от скорости изменения  $\nu(z)$ .

Рассмотрим теперь распределение на поверхности неоднородного полупространства максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}$ , которые при изучении вопросов прочности имеют не менее важное значение, чем нормальные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_z$ . Учитывая, что на поверхности касательные напряжения  $\tau_{xz} = 0$ , из (2.3) и (2.4) находим

$$\tau_{\max}|_{z=0} = \frac{|\sigma_z - \sigma_x|}{2} = \frac{\mu B}{\Psi R(1-\nu_\infty)} \left\{ \beta^* \sqrt{N^2 - x^2} - N \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha N) \cos \alpha x}{\alpha + C} d\alpha \right\} \quad (2.7)$$





Фиг. 5

Известно [10], что при давлении круглого цилиндрического штампа на однородное полупространство при отсутствии сил трения максимальные касательные напряжения на всей поверхности равны нулю. Поэтому (2.7) свидетельствуют о значительном отличии однородного и неоднородного случаев:

Часть результатов расчетов по (2.7) показана на фиг. 5, из которой видно, что наибольших значений максимальные касательные напряжения на поверхности неоднородного полупространства достигают в центре участка контакта, а вне его монотонно убывают до нуля. Если поверхностное значение коэффициента Пуассона больше глубинного, то при прочих равных условиях уровень напряжений  $\tau_{\max}$  на поверхности выше, чем в том случае, когда поверхностное значение коэффициента Пуассона меньше глубинного. Кроме того, уровень максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}$  на поверхности неоднородного полупространства как для положительного, так и для отрицательного градиента изменения коэффициента Пуассона тем больше, чем больше скорость изменения  $\nu(z)$  при увеличении глубины, и зависит, в первую очередь, от размеров диапазона, в котором изменяется коэффициент Пуассона.

Рассмотрим распределение напряжений в глубинных слоях неоднородного полупространства, когда на него давит без трения круглый цилиндрический штамп.

Очевидно, что в этом случае ввиду симметричности поставленной задачи наибольший интерес представляет распределение напряжений на оси симметрии, проходящей через середину контактной площадки перпендикулярно поверхности, так как именно на этой прямой линии должны быть расположены наиболее важные точки, характеризующие основные особенности напряженного состояния в глубинных слоях области контакта.

Прямая  $x=0$  в соответствии с постановкой задачи является главной осью, поэтому на ней касательные напряжения  $\tau_{xz}=0$  (это видно и из (2.5)). Следовательно, достаточно изучить распределение на этой оси только нормальных напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_z$ . Полагая  $x=0$  в (2.3) и (2.4), получаем

$$\sigma_z|_{z=0} = \frac{\mu}{\Psi R(1-\nu_\infty)} \left\{ \frac{NAB(1-e^{\gamma z} + \gamma z)}{2(A+B)^2} \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha N) e^{\alpha z}}{\alpha + C} d\alpha - \right. \\ \left. - \frac{B(1-e^{\gamma z}) - \gamma z A}{\gamma(A+B)} \left( \frac{\sqrt{z^2 + N^2} + z}{\sqrt{z^2 + N^2}} \right) \right\} \quad (2.8)$$

$$\sigma_x|_{z=0} = - \frac{\mu}{\Psi R(1-\nu_\infty)} \left\{ \frac{A+2Be^{\gamma z}}{A} (\sqrt{z^2 + N^2} + z) - \right. \\ \left. + \frac{B(1-e^{\gamma z}) - \gamma z A}{\gamma(A+B)} \left( \frac{\sqrt{z^2 + N^2} + z}{\sqrt{z^2 + N^2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{BN[(A+2B)^2(1-e^{\gamma z}) + \gamma z A^2 - 4(A+B)^2]}{2A(A+B)^2} \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha N) e^{\alpha z}}{\alpha + C} d\alpha \right\} \quad (2.9)$$

Если в этих формулах положить  $B$  или  $\gamma=0$ , то получим известные [11] аналогичные формулы для идеально однородного упругого полупространства.

Для определения нормальных напряжений  $\sigma_z$  и  $\sigma_x$  по (2.8) и (2.9) необходимо приближенными методами вычислять входящий в них интеграл. В приведенном виде этот интеграл численно определять не совсем удобно, так как подынтегральная функция хотя и быстро убывает, но при этом бесконечное число раз меняет знак. Поэтому его необходимо несколько преобразовать аналогично (1.16):

$$\int_0^\infty \frac{J_1(\alpha N) e^{\alpha z}}{\alpha + C} d\alpha = \frac{1}{N} e^{-Cz} \int_{-z/N}^\infty \exp(-CNy) \left( 1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} \right) dy \quad (2.10)$$

В преобразованном виде рассматриваемый интеграл значительно удобнее для численного интегрирования, так как подынтегральная функция на участке интегрирования не меняет знак и, кроме того, уже не требуется многократно определять функцию Бесселя.

Несмотря на то что преобразованный интеграл приближенными методами вычисляется относительно просто, иногда значительно удобнее использовать не численное интегрирование, а разложение интеграла в степенной ряд, так как в этом случае его можно вычислить с любой заданной точностью и сразу указать погрешность вычисления. Покажем, как можно разложить интеграл (2.10) в степенной ряд отдельно для случаев  $|z| < N$  и  $|z| > N$ .

Рассмотрим случай  $|z| > N$ . Учитывая разложение [12] и значение интеграла [6]:

$$\left( 1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} \right) \Big|_{y>1} = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{2n!! y^{2n}} \quad (2.11)$$

$$\int_z^\infty \frac{e^{-Cx}}{x^{n+1}} dx = (-1)^{n+1} \frac{C^n \text{Ei}(-Cz)}{n!} + \frac{e^{-Cz}}{z^n} \sum_{k=0}^{n-1} (-Cz)^k \frac{(n-k-1)!}{n!}$$

и опуская очевидные промежуточные выкладки, для  $|z| > N$  получаем

$$\int_0^\infty \frac{J_1(\alpha N) e^{\alpha z}}{\alpha + C} d\alpha = \frac{1}{N} \left\{ \text{Ei}(Cz) J_1(CN) e^{-Cz} + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(CN/2)^{2n-1}}{(n-1)!n!} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(k-1)!}{(Cz)^k} \quad (2.12)$$

где  $Ei(Cz)$  — интегральная показательная функция.

Рассмотрим случай  $|z| < N$ . Учитывая разложение [12] и значение интеграла [6]:

$$\left(1 - \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\right) \Big|_{y < 1} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} y^{2n+1} \quad (2.13)$$

$$\int_0^z x^{n-1} e^{-x} dx = e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{n+k}}{n(n+1)\dots(n+k)}$$

после ряда очевидных преобразований для  $|z| < N$  находим

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1(\alpha N) e^{\alpha z}}{\alpha + C} d\alpha = \frac{1}{N} \left\{ \frac{\pi e^{-Cz}}{2} [E_1(CN) + N_1(CN)] + \frac{1}{CN} + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!! (z/N)^{2n+2}}{2n!!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-Cz)^k}{(2n+2)(2n+3)\dots(2n+2+k)} \right\} \quad (2.14)$$

Для оценки внутренней суммы используем тождество

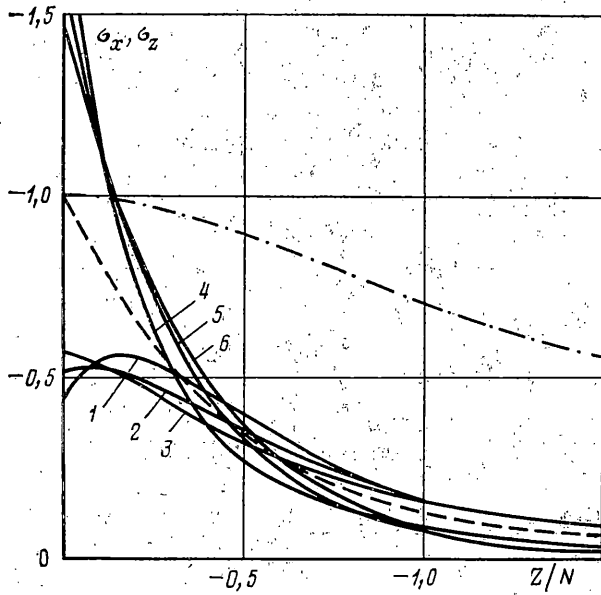
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-Cz)^k}{(2n+2)\dots(2n+2+k)} = \frac{(2n+1)!}{(Cz)^{2n+2}} \left\{ e^{-Cz} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-Cz)^k}{k!} \right\} \quad (2.15)$$

которое вытекает из разложения экспоненциальной функции в степенной ряд. При этом следует помнить, что в данной работе всегда  $z \leq 0$ .

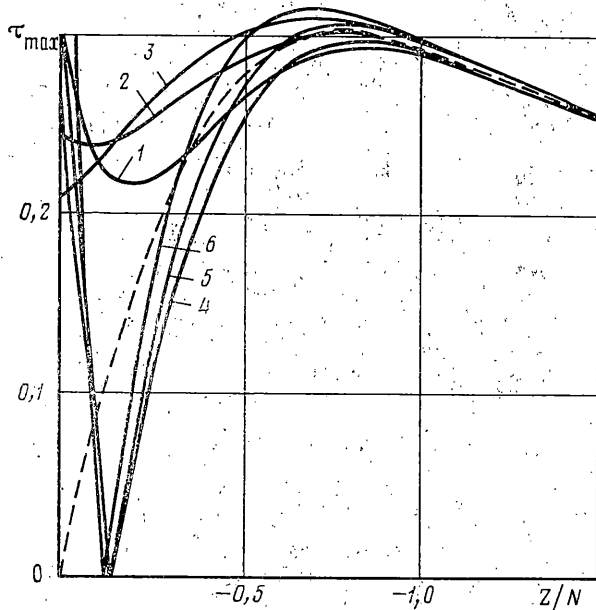
Полученные ряды (2.12) и (2.14) сходятся достаточно быстро соответственно для  $|z| > N$  и  $|z| < N$ . Если  $|z| = N$ , то эти ряды расходятся, однако это не имеет существенного значения, так как точка  $|z| = N$  какого-либо самостоятельного физического смысла не имеет и ее всегда можно исключить из расчетов, рассматривая достаточно близкие к ней значения координаты  $|z|$ .

На фиг. 6 показаны результаты расчетов по определению нормальных напряжений  $\sigma_x$  по формуле (2.9). Исходные данные и обозначения для кривых на этой фигуре те же, что и для фиг. 3. Кроме того, на этой фигуре штрихпунктирной линией показано распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$  на оси симметрии для однородного полупространства. Аналогичные кривые для неоднородного полупространства здесь не приведены, так как в результате выполненных расчетов установлено, что неоднородность типа (1.1) оказывает малое влияние на распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$  (максимальное расхождение этих напряжений в рассмотренном диапазоне изменения глубины,  $0 \leq z \leq -3,0 N$ , в однородном и неоднородном случаях порядка 7%). Отметим, что при отрицательном градиенте изменения коэффициента Пуассона общий уровень нормальных напряжений  $\sigma_z$  несколько меньше, чем в однородном случае, а при положительном — больше.

Значительно большее влияние оказывает неоднородность вида (1.4) на распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  в глубинных слоях упругого полупространства, что достаточно хорошо видно из фиг. 6. Если поверхностное значение коэффициента Пуассона больше глубинного, то в непосредственной близости от границы уровень напряжений  $\sigma_x$  значительно больше, чем в однородном полупространстве, а начиная с некоторой глубины — меньше. Если же поверхностное значение коэффициента Пуассона меньше глубинного, то вблизи границы уровень нормальных напряжений  $\sigma_x$  несколько меньше, чем в однородном случае, а начиная с некоторой глубины — больше, т. е. имеет место противоположная картина. В последнем случае нормальные напряжения  $\sigma_x$  при определенном удалении от поверхности при относительно быстром изменении коэффициента Пуассона могут переходить через максимум и



Фиг. 6



Фиг. 7

лишь после этого убывают до нуля. В однородном упругом полупространстве этого нет.

Следует выделить еще одну особенность распределения нормальных напряжений  $\sigma_x$  в глубинных слоях неоднородного полупространства, не показанную на фиг. 6, так как она проявляется лишь на глубине большей  $1,5N$ . Если поверхностное значение коэффициента Пуассона больше глубинного, то при относительно медленном изменении  $\nu(z)$  на глубине порядка  $2N$  и большей сжимающие нормальные напряжения  $\sigma_x$  могут сменяться растягивающими, которые после перехода через максимум убывают до нуля, не меняя знака. Такой особенностью эти напряжения не обладают ни в однородном полупространстве, ни в том случае, когда поверхностное значение коэффициента Пуассона меньше глубинного, так как в этих случаях нормальные напряжения  $\sigma_x$  всегда сжимающие во всей контактной области. Однако это обстоятельство не имеет значения в практическом отношении, так как уровень воз-

никающих растягивающих нормальных напряжений  $\sigma_x$  в рассмотренных случаях чрезвычайно мал и составляет порядка 0,6% и менее от максимального контактного давления в середине участка контакта.

Рассмотрим теперь распределение в глубинных слоях неоднородного полупространства максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}$ . Для их определения из выражений (2.8) и (2.9) получим формулу

$$\tau_{\max}|_{x=0} = \frac{\mu}{\Psi R(1-\nu_{\infty})} \left| \frac{Be^{\nu z}}{A(\sqrt{z^2+N^2}+z)} - \frac{B(1-e^{\nu z})-\gamma z A}{\gamma(A+B)} \left( \frac{\sqrt{z^2+N^2}+z}{\sqrt{z^2+N^2}} \right) + \frac{BN[A(\gamma z A - A - 2B) - (A^2 + 2AB + 2B^2)e^{\nu z}]}{2A(A+B)^2} \int_0^{\infty} \frac{J_1(\alpha N) e^{\alpha z}}{\alpha + C} d\alpha \right| \quad (2.16)$$

Результаты расчетов по этой формуле показаны на фиг. 7. Исходные данные и введенные обозначения на этой фигуре те же.

Из приведенной фигуры видно, что наиболее существенное различие в распределении максимальных касательных напряжений в однородном и неоднородном полупространстве заключается в том, что на поверхности неоднородного полупространства всегда возникают напряжения  $\tau_{\max}$ , которые на поверхности однородного полупространства при аналогичных условиях отсутствуют. Если поверхностное значение коэффициента Пуассона меньше, чем глубинное, то при удалении от границы максимальные касательные напряжения либо сразу возрастают (при медленном изменении  $\nu(z)$ ), либо сначала убывают до некоторого отличного от нуля предельного значения, а затем возрастают до максимального глубинного значения, после чего убывают до нуля (при быстром изменении  $\nu(z)$ , т. е. при большом  $\gamma$ ).

В случае, когда поверхностное значение коэффициента Пуассона больше, чем глубинное, максимальные касательные напряжения от наибольшего значения на поверхности сначала быстро убывают до нуля, а затем почти также быстро возрастают до некоторого наибольшего глубинного значения с последующим медленным стремлением к нулю. Глубина расположения точки с наибольшим глубинным максимальным касательным напряжением незначительно отличается от расположения аналогичной точки в однородном упругом полупространстве. Незначительно (порядка 4-5%) изменяется и величина максимальных касательных напряжений в этой глубинной точке. Наиболее интересным в распределении максимальных касательных напряжений в глубинных слоях неоднородного полупространства в практическом отношении, видимо, является то, что они при удалении от поверхности при отрицательном градиенте изменения коэффициента Пуассона перед достижением максимального глубинного значения сначала переходят через нулевую точку. Глубина расположения этой переходной точки главным образом зависит от длины диапазона, в котором изменяется коэффициент Пуассона. Она тем больше, чем больше длина этого диапазона. Например, при  $|\nu_0 - \nu_{\infty}| = 0,3$  (фиг. 7) эта глубина составляет 0,13-0,15  $N$ , а при  $|\nu_0 - \nu_{\infty}| = 0,1$  она порядка 0,05-0,07  $N$ , т. е. уменьшается более чем в два раза. От скорости изменения коэффициента Пуассона глубина расположения переходной точки для максимальных касательных напряжений зависит значительно меньше и не превышает 0,02  $N$ .

Если рассматривать материалы с неоднородностью вида (1.1), у которых поверхностное значение коэффициента Пуассона меньше глубинного, то эти материалы в соответствии с полученными результатами совершенно неприемлемы для узлов сопряжения. На это указывает как напряженное состояние на поверхности неоднородного полупространства, так и в глубинных слоях в сравнении как с однородными, так и неоднородными материалами, у которых коэффициент Пуассона уменьшается при увеличении глубины. В этом случае на поверхности возникают максимальные касательные напряжения, которых в однородном материале нет. Уровень нормальных сжимающих напряжений  $\sigma_x$  как на поверхности, на контактной площадке, так и на глубине уменьшается. Это также является отрицательным фактором, так как сжимающие нормальные напряжения препятствуют развитию микродефектов. Кроме того, на поверхности возникают и растягивающие нормальные напряжения  $\sigma_x$ , которые способствуют развитию микротрещин хрупкого разрушения перпендикулярно поверхности. Это осложняется и тем, что при уменьшении коэффициента Пуассона материалы теряют пластические свойства и повышается их хрупкость [1], т. е. там, где возникают растягивающие нормальные напряжения  $\sigma_x$ , материал будет заведомо более хрупким. Эти отрицательные факторы не могут компенсироваться очень малым увеличением уровня сжимающих нормальных напряжений  $\sigma_z$ .

При рассмотрении неоднородного полупространства, у которого поверхностное значение коэффициента Пуассона больше, чем глубинное, по сравнению с однородным материалом распределение напряжений с одной стороны улучшается, а с другой — ухудшается. В таком материале уровень сжимающих нормальных напряжений  $\sigma_x$  увеличивается и на поверхности, и в приповерхностных слоях, что фактически равноценно некоторому упрочнению. Очевидным отрицательным фактором является возникновение на поверхности максимальных касательных напряжений. Но наличие на некоторой глубине зоны, где напряжения  $\tau_{\max}$  равны нулю, должно препятствовать выходу на поверхность микродефектов, развивающихся в результате пластических деформаций, которые вызваны глубинной концентрацией максимальных касательных напряжений. К положительным факторам следует отнести и то, что при отрицательном градиенте изменения коэффициента Пуассона приповерхностные слои будут обладать повышенными пластическими свойствами. Поэтому отрицательное воздействие возникновения на поверхности максимальных касательных напряжений, возможно, компенсируется заведомо повышенной здесь пластичностью материала. Отрицательный фактор незначительного уменьшения уровня сжимающих нормальных напряжений  $\sigma_z$  и возникновение иногда на большой глубине очень малых по величине растягивающих нормальных напряжений  $\sigma_x$  по сравнению с другими особенностями напряженного состояния в контактной области в данном случае, очевидно, можно не учитывать.

Принимая во внимание все выявленные эффекты, можно предполагать, что неоднородные материалы, у которых коэффициент Пуассона уменьшается при удалении от поверхности, предпочтительнее, чем идеально однородные. Некоторым подтверждением этого можно считать «правило положительного градиента» [13], согласно которому материалы с повышенной пластичностью приповерхностных слоев являются более износостойкими, чем идеально однородные.

При выполнении настоящего исследования предполагалось использовать его результаты для рассмотрения процессов трения и изнашивания заведомо неоднородных материалов. Однако оно может оказаться полезным и при изучении контактирования первоначально однородных материалов. Это связано с тем, что при трении металлов, например, их приповерхностные слои перед началом разрушения предварительно наклепываются [14], и наклеп, как известно [1], способствует уменьшению коэффициента Пуассона, т. е. в процессе трения первоначально однородные материалы должны становиться неоднородными с переменным по глубине коэффициентом Пуассона. Причем возникающая неоднородность является отрицательным фактором, так как в этом случае, согласно полученным результатам, следует ожидать повышенного износа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьменко В. А. Новые схемы деформирования твердых тел. Киев: Наук. думка, 1973. 200 с.
2. Кузнецов Е. А. К плоской теории упругости неоднородной среды с переменным коэффициентом Пуассона. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 2, с. 54—58.
3. Кузнецов Е. А. Равновесие неоднородного полупространства в плоском и осесимметричном случаях. — Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 83—92.
4. Плевако В. П. К теории упругости неоднородных сред. — ПММ, 1971, т. 35, вып. 5, с. 853—860.
5. Плевако В. П. Равновесие неоднородной полуплоскости под действием усилий, приложенных к границе. — ПММ, 1973, т. 37, вып. 5, с. 905—913.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
7. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 496 с.
8. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1974. 480 с.
9. Кузнецов Е. А., Гороховский Г. А., Тимченко П. Н. Поля нормальных напряжений под скользящим цилиндром. — Проблемы трения и изнашивания, 1980, вып. 18, с. 12—18.
10. Клюев Э. А., Гороховский Г. А., Чеберяк А. Г., Кузнецов Е. А. Напряженное состояние в зоне контакта полиуретана с твердым индентором. — Механика полимеров, 1976, № 5, с. 838—844.
11. Динник А. Н. Удар и сжатие упругих тел. Избр. тр. Т. 1. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. 152 с.
12. Свейшников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1974. 320 с.
13. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 528 с.
14. Крагельский И. В. Трение и износ. М.: Машиностроение, 1968. 480 с.

Киев

Поступила в редакцию  
10.XI.1982