МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1985

УДК 531.8

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОДНОМАССОВОЙ СИСТЕМЫ С УДАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

ЛЮБИМЦЕВ Я. К., МЕТРИКИН В. С.

При изучении динамики виброударных систем широкое применение получил метод точечных отображений [1], позволивший провести детальное исследование вопросов существования устойчивых периодических и непериодических (стохастических) режимов движения и рассмотреть зависимость последних от параметров системы [2–6]. Однако вопросы о размерах в фазовом пространстве областей притяжения периодических движений и характере поведения системы вблизи границ области устойчивости, как правило, остаются либо открытыми, либо частично решаются с помощью цифровых [5, 6] или аналоговых вычислительных машин [4], либо для систем со специальной полиномиальной правой частью [7].

В публикуемой работе исследование устойчивости и неустойчивости простых и кратных неподвижных точек, соответствующих периодическим режимам движения одномассовой системы с ударными взаимодействиями, проводится с помощью метода функций Ляпунова в его модификации для точечных отображений [1]. Это позволило предложить прием аналитического построения специальных функций Ляпунова для исследования устойчивости в большом неподвижных точек, с помощью которого выведены соотношения, определяющие в фазовом пространстве достаточные границы области притяжения неподвижных точек, а в пространстве параметров определить характер границ области устойчивости («опасная» либо «безопасная» [8]).

1. Рассмотрим движение точечной частицы над неподвижной плоскостью в однородном поле силы тяжести описываемое уравнениями [2, 9]:

$$x^{\cdot}=y, \quad y^{\cdot}=wf(\tau)-1, \quad x>0\vee(x=0\wedge y>0) \tag{1.1}$$

$$y_+=-Ry_-, \quad x=0\wedge y<0 \tag{1.2}$$

Здесь x — безразмерная координата частицы, y_+, y_- — непосредственно послеударная и доударная скорости частицы, τ — безразмерное время, $0<R<1$ — коэффициент восстановления скорости частицы при ударе о неподвижную плоскость $x=0$, w — параметр перегрузки [2]; $f(\tau)$ — импульсная периодическая на периоде $\Gamma=2$ сила

$$f(\tau)=1 \quad (0\leqslant\tau<\gamma), \quad f(\tau)=-\gamma(2-\gamma)^{-1} \quad (\gamma<\tau<2) \tag{1.3}$$

с коэффициентом скважности $0<\gamma<2$ и нулевой средней составляющей.

Фазовое пространство системы (1.1) трехмерно $\Phi(x, y, \tau;\ x\geqslant0,\ y>-\infty,\ 0\leqslant\tau<2)$, усечено по x и цилиндрично по τ. Фазовая траектория, попав в момент $\tau=\tau_y$ на плоскость Π $(x=0,\ y<0)$ в некоторую точку N, перемещается согласно соотношению (1.2) в точку N_1 этой же плоскости Π $(x=0,\ y>0,\ \tau_y)$ и затем уходит в пространство Φ_1 $(x, y, \tau;\ x>0,\ y>-\infty,\ 0\leqslant\tau<2)$ в соответствии с (1.1). Если $0<w<1$, то в интервалах $\Delta_1(0\leqslant\tau<\gamma)$ и $\Delta_2(\gamma<\tau<2)$ в системе реализуются бесконечноударные режимы движения в окрестности точек $(x=y=0,\ 0<\tau<2)$. Если же $w>1$, то в интервале Δ_1 возможен только один удар, а в интервале Δ_2 возможны как конечноударные, так и бесконечноударные режимы движения. Последние реализуются в малой окрестности точек ($x=0$, $y=0$, $\gamma<\tau<2$). В результате бесконечноударного процесса точка N_1 за конечное время τ_∞ переходит в точку N_∞ ($\tau_\infty\in\Delta_2$), а затем фазовая точка движется до момента $\tau=2$ по оси τ. При $w>1$ фазовые траектории системы касаются плоскости $x=0$ для начальных значений x_0, y_0, удовлетворяющих соотношению $x_0=(w-1)^{-1}y_0^2$ ($0<\tau<\gamma$).

Обозначая через T_{j_1} точечное отображение точек $M_0(x_0, y_0)$ плоскости $\tau=0$ в точки $M_1(x_1, y_1)$ плоскости $\tau=\gamma$, а через T_{j_2} точечное отображение точек M_1 в точки $M_2(x_2, y_2)$ плоскости $\tau=2$, нетрудно получить с точностью до обозначений формулы отображений T_{j_1}, T_{j_2} (j_i — число ударов о плоскость в интервалах $0\leqslant\tau<\gamma$ ($i=1$), $\gamma<\tau<2$ ($i=2$) в виде [9]:

$$T_{j_1}\quad (j_1=0)$$

$$x_1=x_0+\gamma y_0+{}^1/_2(w-1)\gamma^2,\quad y_1=y_0+A-2 \tag{1.4}$$

$$T_{j_1}\quad (j_1=1)$$

$$x_1=f_1(\eta_0,\ \tau,\ {}^1/_2)\,t\geqslant 0,\quad y_1=f_1(\eta_0,\ \tau,\ 1) \tag{1.5}$$

$$T_{j_2}\quad (j_2=0)$$

$$x_2=x_1+(2-\gamma)(y_1-{}^1/_2A),\quad y_2=y_1-A \tag{1.6}$$

$$T_{j_2}\quad (j_2=m\geqslant 1)$$

$$x_2=f_2(\eta_1,\ t_m,\ {}^1/_2)\,t_m\geqslant 0,\quad y_2=f_2(\eta_1,\ t_m,\ 1) \tag{1.7}$$

В (1.4)—(1.7) введены следующие обозначения:

$$f_1(\eta_0, t, a)=R\eta_0+a(w-1)t,\quad A=\gamma(w-1)+2,\quad t=\gamma-\tau$$

$$f_2(\eta_1, t_m, b)=R^m\eta_1-Bt_mb,\quad B=1+\gamma w(2-\gamma)^{-1},\quad t_m=2-\gamma-\tau_m$$

$$\tau=(y_0+\eta_0)(1-w)^{-1},\quad \eta_0=[y_0^2-2(w-1)x_0]^{1/2}$$

$$\tau_m=(2-\gamma)A^{-1}[y_1+\eta_1(1+R)^{-1}(1+R-2R^m)],\quad \eta_1=[y_1^2+2Bx_1]^{1/2}$$

2. Рассмотрим задачу о выделении в фазовом пространстве области притяжения прямой $x=y=0$, $t\geqslant 0$, причем ограничимся рассмотрением случая $w<1$. Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$\begin{aligned} V_0&=x+y^2/2(1-w)\quad (x\geqslant 0,\ y>0)\\ V_0&=x+(2-\gamma)y^2/\gamma A\quad (x\geqslant 0,\ y<0)\end{aligned} \tag{2.1}$$

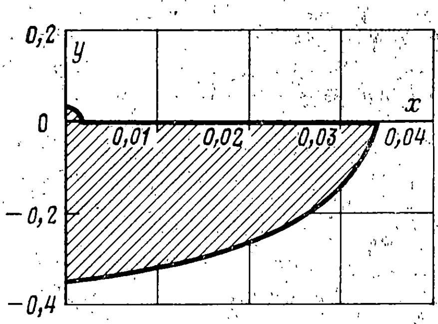
Она знакоопределенно положительна в пространстве $\Phi(x\geqslant 0,\ y>-\infty,\ \tau\geqslant 0)$, обращается в нуль на прямой $x=y=0$, $t\geqslant 0$, имеет непрерывные частные производные по x и y. Производная $dV_0/d\tau$, найденная в силу (1.1):

$$\begin{aligned} dV_0/d\tau&=0\quad ((y>0\wedge 0\leqslant\tau<\gamma)\vee(y<0\wedge\gamma<\tau<2))\\ dV_0/d\tau&=2wy/A\quad (y<0,\ 0\leqslant\tau<\gamma)\\ dV_0/d\tau&=-2wy/(1-w)(2-\gamma)\quad (y>0,\ \gamma<\tau<2)\end{aligned} \tag{2.2}$$

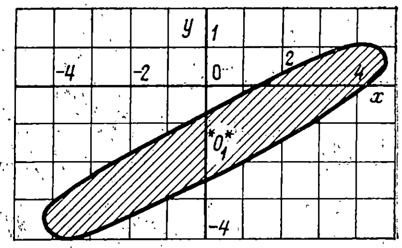
при $x>0$ будет неположительной в Φ, причем, очевидно, существует интервал по τ, в котором она отрицательна.

Изменение ΔV_0 функции $V_0(x,\ y)$ за время удара $\Delta V_0=V_0(x=0,$ $y(\tau_y-0))-V_0(x=0,\quad y(\tau_y+0))=[(2-\gamma)(1-R^2)-w(2-\gamma(1-R^2))]/2(1-w)$ при

$$w\leqslant 1-2R^2/[2-\gamma(1-R^2)]=w_0 \tag{2.3}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

неотрицательно: поэтому начиная с некоторого момента $\tau>\tau^*$ при выполнении (2.3) $V_0(x, y)$ начнет убывать и все полупространство Φ будет областью притяжения линии L ($x=y=0$, $\tau\geqslant 0$).

В этом случае имеет место устойчивость в целом полупрямой L и периодические режимы движения в системе отсутствуют. При $w_0<w<1$ имеем $\Delta V_0<0$, поэтому необходимо оценить суммарное изменение ΔV_0 за период $\Gamma=2n$, используя формулы точечных отображений (1.4)—(1.7). Область притяжения $V_0(x_0, y_0)=C_*$ определится из условия касания кривой $\Delta V_0=0$ с кривой семейства $V_0(x_0, y_0)=C$. Эта граница будет достаточной. Так, предполагая, что удар частицы о плоскость происходит в интервале $\tau\in\Delta_1$, можно показать с использованием соотношений (1.5), (1.6), что существует область, содержащая точку $x=y=0$, в которой суммарное изменение V_0 за период $\Delta V_0=A^{-1}[\gamma w^2(1-w)+f(x_0, y_0)$, где $f(x_0, y_0)$ — квадратичная форма относительно x_0, y_0 ($f(0,0)=0$), будет положительно. Следовательно, выполняются условия теоремы об устойчивости нулевой точки. На фиг. 1 для $\gamma=1$, $R=0{,}5$, $w=0{,}7$ приведена область притяжения (заштрихованная часть плоскости) точки O ($x_0=y_0=0$).

При $w>1$ для исследования области притяжения прямой $x=y=0$, $\tau\geqslant 0$ также можно воспользоваться методом функций Ляпунова, взяв, например, в качестве функции

$$V_1(x, y)=[x-y^2/2(w-1)]^2+Ay^2 \quad (x\geqslant 0,\ y>0)$$

$$\tag{2.4}$$

$$V_1(x, y)=[x+y^2(2-\gamma)/2(2+\gamma(w-1))] \quad (x\geqslant 0,\ y<0)$$

Однако оценка приращения ΔV_1 за период Γ в данном случае значительно усложняется и в дальнейшем не приводится.

3. Рассмотрим режим, когда удар частицы происходит только на полуинтервале Δ_1. Тогда точечное отображение можно переписать в виде

$$y_0=-\eta_0-\tau(w-1),\quad y_2=R\eta_0-\tau(w-1)-2,\quad x_0=\tau[{}^1/_2\tau(w-1)+\eta_0]$$
$$x_2=\tau(w-1)({}^1/_2\tau-2)+R\eta_0(2-\tau)-2+\gamma w \tag{3.1}$$

Очевидно, рассматриваемый режим существует при $w>2(1-R)/\gamma(1+$ $+R)=w_+$. Неподвижной точке O_1^* соответствует [9]:

$$x^*=\{(\gamma d-e)\,[\gamma wd+w(6+2R-\gamma(1+R))+e]\}/8d \tag{3.2}$$
$$y^*=[d(\gamma w-2+\gamma)+e]/2d,\quad d=w(1+R),\quad e=2(1-R)$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде (A_i — постоянные):

$$V_2(x, y)=\sum_{i=0}^{2}A_i[x-x^*-(2-\tau^*)(y-y^*)]^i(y-y^*)^{2-i} \tag{3.3}$$

При $A_2=1$, $4A_0>A_1^2$ функция $V_2(x, y)$ знакоопределенно положительна. Приращение функции за период $\Gamma=2$:

$$\Delta V_2=V_2(x_0, y_0)-V_2(x_2, y_2)=[4+A_0(1-R^2)-2A_1]v^2+$$
$$+2w[\eta_0^*(1-R)+(w-1)(2-A_1)]u^2+2[2\eta_0^*+(w-1)(4+A_0(1+R))-$$
$$-A_1(2w-1-R)]uv+v\{2A_0w(w-1)v^2+[2A_0(3w-1-2R)-$$
$$-{}^3/_2A_1(1+R)(w-1)]uv+(1+R)u[(4A_0-A_1(1-R))u+$$
$$+A_0((w-1)v+(1-R)u)v\}, \quad v=\tau-\tau^*, \quad u=\eta_0-\eta_0^*$$

Легко показать, что при

$$w<2(1+R^2)/(1+R)^2=w_- \tag{3.5}$$

постоянные A_0 и A_1 можно подобрать так, чтобы ΔV_2 была знакоопределенно положительной в некоторой окрестности точки O_1^*. В частности при $2R/(1+R)<w<w_-$ — можно положить $A_1=0$, а A_0 должно удовлетворять неравенствам

$$a-\sqrt{b}<cA_0<a+\sqrt{b}; \quad c=(w-1)^2(1+R^2) \tag{3.6}$$
$$a=w[w(1+R)^2-2(1+R+R^2)]+2R, \quad b=a^2-4R^2(w-1)^2$$

Для второго случая $w>2R/(1+R)$ положим $A_1=0$, и тогда условие положительной знакоопределенности ΔV_2 также сводится к (3.5).

Таким образом показано, что при $w_+\leqslant w<w_-$ неподвижная точка $O_1^*(x^*, y^*)$ устойчива в малом, что соответствует наличию в системе устойчивого периодического движения с одним ударом частицы о плоскость в первом полуинтервале Δ_1.

4. Граница области устойчивости $w=w_-$ является N_--границей [7]. Возможные бифуркации периодических движений при переходе через границу N_- рассматривались во многих работах, например в [7]. Однако остается открытым вопрос о поведении системы на границе N_--области устойчивости. Для этого выясним характер границы, используя метод функций Ляпунова. Покажем, что справедливо утверждение: граница N_- $(w=w_-)$ области устойчивости периодического режима, соответствующего неподвижной точке O_1^*, является опасной [8].

Доказательство. Рассмотрим функцию (A_{ij} — произвольные постоянные):

$$V_3(x,y)=(1-R)^{-2}L^2(x,y)+\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{4}A_{4-j+i,j-i}L^{4+i-j}(x,y)(y-y^*)^{j-i} \tag{4.1}$$

$$L(x,y)=(1-R)(x-x^*)+[\tau^*+R(2-\tau^*)](y-y^*)$$

которая представляет собой сумму форм второго, третьего и четвертого порядков.

При $A_{ij}=0$ функция $V_3(x, y)$ знакопостоянно положительна. Поэтому и при $A_{ij}\neq0$ в окрестности точки O_1^* заведомо существует область $D(x, y;\ \rho(x-x^*, y-y^*)<\varepsilon)$, где $V_3(x, y)>0$.

Образуем разность $\Delta V_3=V_3(x_0, y_0)-V_3(x_2, y_2)$ и запишем ее в переменных $v=\tau-\tau^*$, $u=\eta-\eta^*$. При произвольных A_{ij} она начинается с членов третьего порядка. При

$$A_{30}=-a_1a_2b_1/(2b_2), \quad A_{21}=a_1b_1(1-R^2-R^4), \quad A_{03}=4R^2a_1/b_1^2$$
$$A_{12}=-2R(1-2Rb_1+2R^3b_1b_2-3R^4)/(b_1^3b_2) \tag{4.2}$$
$$a_1=a_2/[a_2+R^2(1+3R^2)], \quad a_2=1+R^2, \quad b_1=1+R, \quad b_2=1-R$$

члены третьей степени в ΔV_3 исчезают.

Подберем теперь $A_{4-j,j}(j=1,\ldots,4)$, так, чтобы форма четвертого порядка в ΔV_3 имела вид $G_4(u^2+v^2)^2$ [10]. Для этого $A_{4-j,j}$ и G_4 должны быть решениями линейной неоднородной системы алгебраических уравнений, причем A_{40} в систему не входит. Выражения для G_4 и $A_{4-j,j}$ через параметры системы имеют громоздкий вид, поэтому оценка знака G_4 проведена с использованием ЭЦВМ. Расчеты показали, что $G_4<0$ при всех рассмотренных значениях $0<R<1$. Но тогда ΔV_3 знакоопределенно отрицательна в некоторой области, содержащей точку O_1^*, а $V_3(x, y)$ может принимать положительные значения в точках, сколь угодно близко лежащих к O_1^*. Следовательно, выполняются условия теоремы о неустойчивости неподвижной точки. Граница N_- — опасная. Утверждение доказано.

5. Для нахождения области притяжения точки O_1^* на фазовой плоскости при значениях параметров, удовлетворяющих условиям устойчивости, строим семейство кривых $V_2(x_0^*, y_0^*)=D_1=\text{const}$ и кривую $\Delta V_2(x_0^*, y_0^*)=0$ и из условий касания последних определяем постоянную D_1^*. Тогда уравнение $V_2(x_0^*, y_0^*)=D_1^*$ задает на фазовой плоскости x, y границу области притяжения точки O_1^*.

Заметим, что D_1^* является функцией параметров системы и постоянных, входящих в V_2. Поэтому при выделении области притяжения можно решить задачу о подборе таких значений постоянных, при которых область притяжения будет иметь наибольшие размеры.

Так, на фиг. 2 приведен вид области притяжения точки O_1^* при $\gamma=1$, $R=0{,}5$, $w=0{,}7$, $C=1$, $B=0$.

6. Рассмотрим режим, когда на интервале $\tau\in\Delta_1$ ударов нет, а на интервале $\tau\in\Delta_2$ возможны $m(m\geqslant1)$ ударов. Точечное отображение в этом случае с использованием (1.4), (1.7) может быть переписано в виде $(n=1)$:

$$
\begin{gathered}
y_0=k_1\tau_m-l\eta_1-\gamma(w-1)\\
x_0=\tau_m[l\eta_1-k_1(\tau_m/2+\gamma)+\eta_1(l\gamma-m_1\eta_1)]+\gamma^2(w-1)/2\\
y_2=k_1(\tau_m-2+\gamma)+R^m\eta_1\\
x_2=k_1[\tau_m(2-\gamma-\tau_m)-(2-\gamma)^2/2]-R^m\eta_1(2-\gamma-\tau_m/2)\\
k_1=(2+\gamma(w-1))/(2-\gamma),\quad l=(b_1-2R^m)/b_2\\
m_1=2R(1-R^{m-1})(1-R^m)/(k_1b_2^2)>0
\end{gathered}
\tag{6.1}
$$

Для исследования устойчивости периодического режима, которому соответствует точка M^* с координатами

$$
\begin{gathered}
\tau_m^*=((2-\gamma)/2\gamma w)\{2(2-\gamma)b_2^2(1+R^m)+\gamma wb_1[4(b_1-2R^m)-\\
-\gamma b_1(1-R^m)]+\gamma^2w^2b_1^2(1-R^m)\}/\{[2+\gamma(w-1)](1-R^m)b_1^2\}\\
\eta_1^*=2b_2/b_1(1-R^m)
\end{gathered}
\tag{6.2}
$$

рассмотрим функцию Ляпунова в виде (C — произвольная постоянная):

$$
V_4(x, y)=[x-x^*+\tau_1^*(y-y^*)]^2+C(y-y^*)^2,\quad \tau_1^*=\tau_m^*+\gamma \tag{6.3}
$$

Тогда $\Delta V_4=V_4(x_0, y_0)-V_4(x_2, y_2)$ в силу (6.1) запишется следующим образом (многоточие означает члены более высоких порядков):

$$
\begin{gathered}
\Delta V_4(v_1, u_1)=2(1-k_1)[\eta_1^*(l-R^m)+2k_1]v^2+[C_1(l-R^m)-\\
-4(m_1^2\eta_1^{*2}-R^{2m})]u_1^2+2[2lm_1\eta_1^{*2}-C_1k_1+2R^m(2k_1-\\
-R^m\eta_1^*)]v_1u_1+\ldots\\
C_1=-C(l+R^m),\quad v_1=\tau_1-\tau_1^*,\quad u_1=\eta_1-\eta_1^*
\end{gathered}
\tag{6.4}
$$

Функция ΔV_4 знакоопределенно положительна при

$$2(k_1-1)[\eta_1^*(l-R^m)+2k_1][C_1(l-R^m)-4(m_1^2\eta_1^{*2}-R^{2m})]-$$
$$-[C_1k_1-2lm_1\eta_1^{*2}-2R^m(2k_1-R^m\eta_1^*)]^2>0,\quad k_1>1 \qquad (6.5)$$

Легко показать, что так всегда можно подобрать такое $C_1>0$, чтобы выполнялось (6.5). Поскольку ΔV_4 знакоопределенно положительна, а V_4 — знакопеременна (так как $C<0$), то выполняются условия теоремы о неустойчивости неподвижной точки и соответствующей ей режим неустойчив.

Функция Ляпунова (6.3) позволяет также, используя методику п. 5, определить в фазовом пространстве системы области отталкивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Неймарк Ю. И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. 471с.
2. *Нагаев Р. Ф.* Периодические режимы вибрационного перемещения. М.: Наука, 1978. 160 с.
3. *Беспалова Л. В., Неймарк Ю. И., Фейгин М. И.* Динамические системы с ударными взаимодействиями и теория нелинейных колебаний.— Инж. ж. МТТ, 1966, № 1, с. 151—159.
4. *Рагульскене В. Л., Скучас И. Ю.* Исследование двумерной виброударной системы с помощью АВМ.— В кн.: Вибротехника. Т. 1 (8). Каунас: Изд-е Каунас. политехн. ин-та, 1975, с. 183—189.
5. *Быховский И. И., Дорохова А. Д., Зарецкий Л. Б., Лукомский С. И.* О некоторых периодических движениях и структуре фазового пространства ударноколебательной системы с постоянной восстанавливающей силой.— Изв. АН СССР. ОТН. Механ. и машиностр., 1964, № 2, с. 161—165.
6. *Горбиков С. П., Неймарк Ю. И.* Основные режимы движения при вибротранспортировании с подбрасыванием.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 4, с. 39—50.
7. *Мартынюк А. А., Вербицкий В. Г.* Оценка области притяжения для нелинейных систем определенного вида.— Прикл. механика, 1982, т. 18, № 10, с. 102—107.
8. *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Л.—М.: Гостехиздат, 1949. 164с.
9. *Горюнов В. И., Метрикин В. С., Нагаев Р. Ф.* О периодических движениях частицы под действием импульсной силы.— Прикл. механика, 1976, т. 12, № 6, с. 98—104.
10. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.—Л.: Гостехиздат, 1952. 432 с.

Горький

Поступила в редакцию
11.VII.1983