МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1985

УДК 531.38

О ВЗАИМНОМ ДВИЖЕНИИ СИММЕТРИЧНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

БОЛОТИНА Н. Е., ВИЛЬКЕ В. Г.

Задача о движении тела под действием моментов различной природы и задача о взаимном движении двух тел вокруг неподвижной точки являются классическими задачами механики и исследовались в работах многих авторов, например [1, 2]. В [3] найдены стационарные движения и исследована их устойчивость при движении твердого тела со сферическим демпфером. Метод усреднения применялся при изучении эволюции движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки под действием внешних моментов [4, 5]. Использование канонических переменных Андуайе в сочетании с методом разделения движений и усреднения позволило получить уравнения, описывающие эволюцию движения системы, состоящей из симметричного твердого тела, несущего вязкоупругие элементы [6, 7].

В публикуемой работе исследуется задача о движении двух симметричных твердых тел, вращающихся вокруг неподвижной точки под действием сил, момент которых пропорционален разности угловых скоростей. Методом усреднения в канонических переменных Андуайе отыскиваются уравнения, описывающие эволюцию движения системы, исследуется устойчивость стационарных вращений. Подобного рода задачи возникают при исследовании движения спутников со сферическими демпферами.

1. Пусть два симметричных твердых тела вращаются вокруг неподвижной точки O (фиг. 1). Система координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ неподвижна, а системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$ жестко связаны с твердыми телами, и их оси направлены по главным осям соответствующих эллипсоидов инерции. Если одно тело имеет сферическую форму и помещено в сферическую полость с малым зазором, заполненным вязкой жидкостью, то момент сил взаимодействия тел можно принять в виде

$$\mathbf{M}_1=-\mathbf{M}_2=-\varepsilon(\mathbf{\Omega}_1-\mathbf{\Omega}_2) \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{M}_i$ — момент сил, действующих на i-е тело, $\mathbf{\Omega}_i$ — угловая скорость i-го тела в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, ε — положительная постоянная. Поскольку момент внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то момент количества движения системы $\mathbf{G}=\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2$ постоянен ($\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ — кинетические моменты первого и второго тела).

По теореме об изменении энергии

$$H(t)-H(0)=-\varepsilon\int_0^t(\mathbf{\Omega}_1-\mathbf{\Omega}_2)^2dt,\quad H=T_1+T_2 \tag{1.2}$$

где T_i — кинетическая энергия i-го тела. Поскольку полная энергия системы H ограничена снизу, то интеграл в правой части (1.2) сходится при $t\to\infty$. Это означает, что на отрезке времени $[t^*, t^*+\tau]$ при любых $\tau>0$, $\gamma>0$ и достаточно большом t^* угловые скорости тел $\mathbf{\Omega}_1(t)$ и $\mathbf{\Omega}_2(t)$ сколь угодно близки в среднеквадратичном, т. е.

$$\left[\int_{t_*}^{t^*+\tau}(\Omega_1-\Omega_2)^2 dt\right]^{1/2}<\gamma$$

Другими словами, при $t\to\infty$ тела стремятся к такому движению, когда взаимные перемещения тел отсутствуют и тела движутся как одно твердое тело.

Если положить $\varepsilon=0$ (момент взаимодействия равен нулю), то движение каждого тела будет либо регулярной прецессией, либо стационарным вращением вокруг оси динамической симметрии. Равенство $\Omega_1=\Omega_2$ для всех моментов времени возможно в случае стационарных вращений вокруг совпадающих главных осей инерции, а также в случае одинаковых регулярных прецессий, если имеет место динамическое подобие тел ($A_1=\lambda A_2$, $C_1=\lambda C_2$, $\lambda>0$, A_i, C_i — главные моменты инерции симметричных тел относительно точки O ($i=1,2$)). Таким образом, сформулированное асимптотическое свойство означает, что движение системы стремится к стационарному вращению вокруг вектора момента количества движения, а в случае динамически подобных тел — к регулярной прецессии системы как твердого тела.

2. Выведем приближенные уравнения, описывающие эволюцию движения системы в канонических переменных Андуайе [6]. Используя функцию Гамильтона

$$H=\frac{I_2^2-I_1^2}{2A_1}+\frac{I_1^2}{2C_1}+\frac{J_2^2-J_1^2}{2A_2}+\frac{J_1^2}{2C_2}\tag{2.1}$$

где (I_i,φ_i), (J_i,ψ_i) $(i=1,2,3)$ — канонические переменные Андуайе соответственно для первого и второго тела, напишем канонические уравнения Гамильтона и найдем невозмущенное движение при $\varepsilon=0$. Имеем

$$\begin{aligned}&I_i^\bullet=0,\quad \varphi_1^\bullet=(A_1-C_1)A_1^{-1}C_1^{-1}I_1,\quad \varphi_2^\bullet=A_1^{-1}I_2,\quad \varphi_3^\bullet=0\\&J_i^\bullet=0,\quad \psi_1^\bullet=(A_2-C_2)A_2^{-1}C_2^{-1}J_1,\quad \psi_2^\bullet=A_2^{-1}J_2,\quad \psi_3^\bullet=0\quad (i=1,2,3)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Переменные Андуайе в невозмущенной задаче являются переменными действие — угол. Величины I_i, J_i $(i=1,2,3)$, φ_3, ψ_3 постоянны, а углы φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 — линейные функции времени.

Напишем уравнения движения системы в переменных Андуайе при наличии момента внутренних сил. Прежде всего заметим, что переход от подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$ к неподвижной $O\xi_1\xi_2\xi_3$ осуществляется пятью последовательными поворотами и задается ортогональным оператором O_1, где

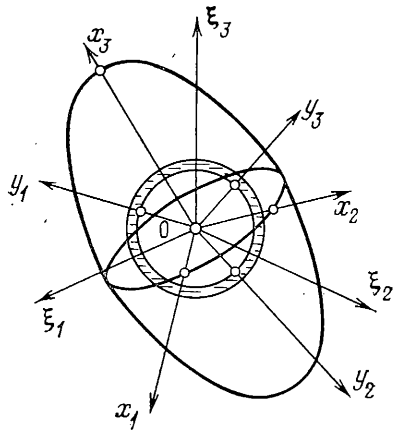
$$O_1=\Gamma_3(\varphi_3)\Gamma_1(\delta_1)\Gamma_3(\varphi_2)\Gamma_1(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1),\quad \cos\delta_1=I_3I_2^{-1},\quad \cos\delta_2=I_1I_2^{-1}$$

$$\Gamma_3(\varphi_i)=\begin{Vmatrix}\cos\varphi_i & -\sin\varphi_i & 0\\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix},\quad \Gamma_1(\delta_k)=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\delta_k & -\sin\delta_k\\ 0 & \sin\delta_k & \cos\delta_k\end{Vmatrix}\tag{2.3}$$

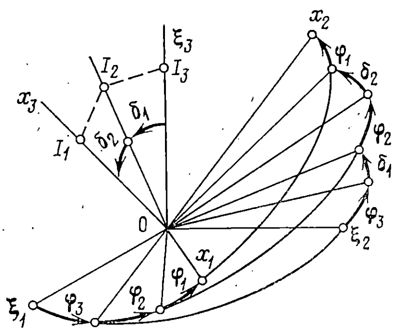
Повороты осуществляются на углы $-\varphi_1$, $-\delta_2$, $-\varphi_2$, $-\delta_1$, $-\varphi_3$ относительно соответствующих осей (фиг. 2). Тогда $\Omega_1=O_1\omega_1$, где ω_1 — угловая скорость первого тела в системе координат $Ox_1x_2x_3$, а Ω_1 — тот же вектор в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ и $\Omega_1\times\mathbf{a}=O_1^\bullet O_1^{-1}\mathbf{a}$ для любого $\mathbf{a}\in E^3$. Аналогичные формулы имеют место для второго тела

$$\begin{gathered}\Omega_2=O_2\omega_2,\qquad O_2=\Gamma_3(\psi_3)\Gamma_1(\beta_1)\Gamma_3(\psi_2)\Gamma_1(\beta_2)\Gamma_3(\psi_1)\\ \cos\beta_1=J_3J_2^{-1},\qquad \cos\beta_2=J_1J_2^{-1}\end{gathered}\tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}\omega_1=(A_1^{-1}\sqrt{I_2^2-I_1^2}\sin\varphi_1,\ A_1^{-1}\sqrt{I_2^2-I_1^2}\cos\varphi_1,\ C_1^{-1}I_1)\\ \omega_2=(A_2^{-1}\sqrt{J_2^2-J_1^2}\sin\psi_1,\ A_2^{-1}\sqrt{J_2^2-J_1^2}\cos\psi_1,\ C_2^{-1}J_1)\end{gathered}\tag{2.5}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Работа момента сил (1.1) на возможных перемещениях определяется формулой

$$\delta A=-\varepsilon(\Omega_1-\Omega_2)(\delta\alpha_1-\delta\alpha_2), \quad \delta\alpha_1=\sum_{i=1}^{3}\left(\mathbf{l}_i\delta\varphi_i+\sum_{k=1}^{2}\mathbf{g}_k\frac{\partial\delta_k}{\partial I_i}\delta I_i\right),$$

$$\delta\alpha_2=\sum_{i=1}^{3}\left(\mathbf{m}_i\delta\psi_i+\sum_{k=1}^{2}\mathbf{n}_k\frac{\partial\beta_k}{\partial J_i}\delta J_i\right) \tag{2.6}$$

Здесь $\mathbf{l}_i$, $\mathbf{g}_k$ — единичные векторы по осям, вокруг которых осуществляются повороты на углы φ_i и δ_k соответственно. Аналогично определяются $\mathbf{m}_i$ и $\mathbf{n}_k$ ($\mathbf{l}_3=\mathbf{m}_3$ — орт по оси $O\xi_3$). Уравнения движения с учетом работы диссипативных сил (2.6) вытекают из вариационного принципа Гамильтона — Остроградского и имеют вид

$$I_i^{\bullet}=-\varepsilon(\Omega_1-\Omega_2)\mathbf{l}_i, \qquad J_i^{\bullet}=-\varepsilon(\Omega_2-\Omega_1)\mathbf{m}_i \tag{2.7}$$

$$\varphi_i^{\bullet}=\frac{\partial H}{\partial I_i}+\varepsilon(\Omega_1-\Omega_2)\sum_{k=1}^{2}\mathbf{g}_k\frac{\partial\delta_k}{\partial I_i}, \quad \psi_i^{\bullet}=\frac{\partial H}{\partial J_i}+\varepsilon(\Omega_2-\Omega_1)\sum_{k=1}^{2}\mathbf{n}_k\frac{\partial\beta_k}{\partial J_i}$$

3. От уравнений (2.7) перейдем к более простым приближенным уравнениям, позволяющим изучить эволюцию переменных «действие» и медленных угловых переменных φ_3 и ψ_3. Соотношения (2.3) — (2.6) позволяют вычислить правые части уравнений (2.7) и усреднить их по угловым переменным φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2. Получим вначале усредненные уравнения для углов φ_3 и ψ_3. Имеем

$$\begin{aligned}\varphi_3^{\bullet}&=-\varepsilon(\Omega_1-\Omega_2)\mathbf{g}_1(I_2^2-I_3^2)^{-1/2}\\ \psi_3^{\bullet}&=-\varepsilon(\Omega_2-\Omega_1)\mathbf{n}_1(J_2^2-J_3^2)^{-1/2}\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\langle\Omega_1\mathbf{g}_1\rangle=\langle\Gamma_3(\varphi_3)\Gamma_1(\delta_1)\Gamma_3(\varphi_2)\Gamma_1(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1)\boldsymbol{\omega}_1\cdot\Gamma_3(\varphi_3)(1,0,0)\rangle=0$$

$$\langle\Omega_2\mathbf{g}_1\rangle=\langle\Gamma_3(\psi_3)\Gamma_1(\beta_1)\Gamma_3(\psi_2)\Gamma_1(\beta_2)\Gamma_3(\psi_1)\boldsymbol{\omega}_2\cdot\Gamma_3(\varphi_3)(1,0,0)\rangle=$$

$$=-\sin\beta_1\sin(\varphi_3-\psi_3)\left[A_2^{-1}(J_2^2-J_1^2)^{1/2}\sin\beta_2+C_2^{-1}J_1\cos\beta_2\right]$$

$$\langle\cdot\rangle=(2\pi)^{-4}\iiiint_0^{2\pi}\cdot\, d\varphi_1 d\varphi_2 d\psi_1 d\psi_2$$

где $\langle\cdot\rangle$ — операция усреднения по переменным φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2. Уравнения (3.1) после усреднения примут вид

$$\varphi_3^{\bullet}=\varepsilon\sin(\psi_3-\varphi_3)\sqrt{\frac{J_2^2-J_3^2}{I_2^2-I_3^2}}\left(\frac{J_2^2-J_1^2}{A_2J_2^2}+\frac{J_1^2}{C_2J_2^2}\right)$$
$$\psi_3^{\bullet}=\varepsilon\sin(\varphi_3-\psi_3)\sqrt{\frac{I_2^2-I_3^2}{J_2^2-J_3^2}}\left(\frac{I_2^2-I_1^2}{A_1I_2^2}+\frac{I_1^2}{C_1I_2^2}\right) \qquad (3.2)$$

Не нарушая общности, выберем в начальный момент времени систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ так, чтобы ось $O\xi_1$ совпала с вектором момента количества движения системы $\mathbf{G}$ ($\mathbf{G}\neq 0$), а векторы $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_2$ — моменты количеств движения первого и второго тел — лежали в плоскости $O\xi_1\xi_3$. Тогда в начальный момент времени $\varphi_3=\psi_3={}^1/_2\pi$ и это равенство сохранится при любых t в силу уравнений (3.2). Таким образом, при указанном выборе системы координат медленные угловые переменные φ_3 и ψ_3 не эволюционируют.

Усредненные уравнения (2.7), описывающие изменение переменных «действие», имеют вид

$$I_1^{\bullet}=-\varepsilon[I_1C_1^{-1}-I_1I_2^{-1}D_2\cos(\delta_1-\beta_1)]$$
$$J_1^{\bullet}=-\varepsilon[J_1C_2^{-1}-J_1J_2^{-1}D_1\cos(\delta_1-\beta_1)]$$
$$I_2^{\bullet}=-\varepsilon[D_1-D_2\cos(\delta_1-\beta_1)],\qquad J_2^{\bullet}=-\varepsilon[D_2-D_1\cos(\delta_1-\beta_1)] \qquad (3.3)$$
$$I_3^{\bullet}=-J_3^{\bullet}=-\varepsilon(I_3I_2^{-1}D_1-J_3J_2^{-1}D_2)$$
$$D_1=\frac{I_2^2-I_1^2}{A_1I_2}+\frac{I_1^2}{C_1I_2},\qquad D_2=\frac{J_2^2-J_1^2}{A_2J_2}+\frac{J_1^2}{C_2J_2}$$

Величина $D_1=(A_1^{-1}\sin^2\delta_2+C_1^{-1}\cos^2\delta_2)I_2>0$, так как $I_2=|\mathbf{G}_1|$, и аналогично $D_2>0$. Заметим, что $I_3^{\bullet}+J_3^{\bullet}=0$, а следовательно, $I_3+J_3=0$ — следствие закона сохранения проекции момента количества движения на ось $O\xi_3$. Приравнивая правые части уравнений (3.3) к нулю, найдем точки, соответствующие стационарным вращениям системы. Имеем

$$I_1[I_2C_1^{-1}-D_2\cos(\delta_1-\beta_1)]=0,\qquad J_1[J_2C_2^{-1}-D_1\cos(\delta_1-\beta_1)]=0$$
$$D_1-D_2\cos(\delta_1-\beta_1)=0,\qquad D_1\cos(\delta_1-\beta_1)-D_2=0 \qquad (3.4)$$
$$I_3I_2^{-1}D_1=J_3J_2^{-1}D_2$$

Из третьего и четвертого уравнений (3.4) следует, что $\cos(\delta_1-\beta_1)=1$ и $D_1=D_2$. Но тогда из пятого уравнения (3.4) и условия $I_3+J_3=0$ получим $I_3=J_3=0$, поскольку $I_2^{-1}+J_2^{-1}\neq 0$. В стационарном движении углы δ_1 и β_1 равны ${}^1/_2\pi$. Первое и второе уравнения (3.4) представим в виде

$$I_1I_2^{-1}(I_2^2-I_1^2)(C_1^{-1}-A_1^{-1})=0,\qquad J_1J_2^{-1}(J_2^2-J_1^2)(C_2^{-1}-A_2^{-1})=0$$

Отсюда следует $I_1=I_2$ или $I_1=0$, $J_1=J_2$ или $J_1=0$. Модули моментов количеств движения отыскиваются из условий $D_1=D_2$ и $I_2+J_2=G$. Возможны следующие стационарные вращения системы:

$$I_1=J_1=0,\qquad I_2=A_1G(A_1+A_2)^{-1},\qquad J_2=A_2G(A_1+A_2)^{-1}$$
$$I_1=0,\qquad J_1=J_2=C_2G(A_1+C_2)^{-1},\qquad I_2=A_1G(A_1+C_2)^{-1}$$
$$I_1=I_2=C_1G(C_1+C_2)^{-1},\qquad J_1=J_2=C_2G(C_1+C_2)^{-1} \qquad (3.5)$$
$$I_1=I_2=C_1G(C_1+A_2)^{-1},\qquad J_1=0,\qquad J_2=A_2G(C_1+A_2)^{-1}$$

Во всех четырех стационарных вращениях $I_3=J_3=0$. Устойчивость стационарных вращений исследуем на основе уравнений в вариациях при условии, что вектор момента количества движения системы не возмущается. Для переменных I_3, J_3 получим уравнения

$$I_3^{\bullet}=-\varepsilon\left(I_3\frac{D_0}{I_{20}}-J_3\frac{D_0}{J_{20}}\right),\qquad J_3^{\bullet}=-\varepsilon\left(J_3\frac{D_0}{J_{20}}-I_3\frac{D_0}{I_{20}}\right)\tag{3.6}$$

где $D_0=D_1=D_2$, I_{20}, J_{20} — значения соответствующих величин в стационарном движении. Характеристическое уравнение системы уравнений (3.6) имеет один нулевой корень, что соответствует закону сохранения момента количества движения, и один отрицательный корень, равный $-\varepsilon D_0(I_{20}^{-1}+$ $+J_{20}^{-1})$. Следовательно, переменные I_3, J_3 всегда стремятся к нулю. При $I_3=J_3=0$ уравнения (3.3) примут вид

$$\begin{gathered}I_1^{\bullet}=-\varepsilon\frac{I_1}{I_2}\left(\frac{I_2}{C_1}-D_2\right),\qquad J_1^{\bullet}=-\varepsilon\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{J_2}{C_2}-D_1\right)\\ I_2^{\bullet}=-\varepsilon(D_1-D_2),\qquad J_2^{\bullet}=-\varepsilon(D_2-D_1)\end{gathered}\tag{3.7}$$

Обозначая через x_i, y_i вариации переменных I_i, J_i $(i=1,2)$ соответственно, получим уравнения в вариациях

$$\begin{gathered}x_1^{\bullet}=-\varepsilon(I_{20}C_1^{-1}-D_0)I_{20}^{-1}x_1-\varepsilon I_{10}I_{20}^{-2}D_0x_2+\\ +\varepsilon I_{10}I_{20}^{-1}\{[A_2^{-1}(J_{20}^2+J_{10}^2)J_{20}^{-2}-J_{10}^2J_{20}^{-2}C_2^{-1}]y_2+\\ +2(C_2^{-1}-A_2^{-1})J_{10}J_{20}^{-1}y_1\}\\ y_1^{\bullet}=-\varepsilon(J_{20}C_2^{-1}-D_0)J_{20}^{-1}y_1-\varepsilon J_{10}J_{20}^{-2}D_0y_2+\\ +\varepsilon J_{10}J_{20}^{-1}\{[A_1^{-1}(I_{10}^2+I_{20}^2)I_{20}^{-2}-C_1^{-1}I_{10}^2I_{20}^{-2}]x_2+\\ +2I_{10}I_{20}^{-1}(C_1^{-1}-A_1^{-1})x_1\}\\ x_2^{\bullet}=-y_2^{\bullet}=-\varepsilon\{[A_1^{-1}(I_{10}^2+I_{20}^2)-C_1^{-1}I_{10}^2]I_{20}^{-2}x_2+\\ +2I_{10}I_{20}^{-1}(C_1^{-1}-A_1^{-1})x_1\}+\varepsilon\{[A_2^{-1}(J_{10}^2+J_{20}^2)-\\ -C_2^{-1}J_{10}^2]J_{20}^{-2}y_2+2J_{10}J_{20}^{-1}(C_2^{-1}-A_2^{-1})y_1\}\end{gathered}\tag{3.8}$$

Подставим в уравнения (3.8) значения переменных (3.5) и найдем корни характеристического уравнения

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=-\varepsilon(A_1^{-1}+A_2^{-1}),\quad \lambda_3=-\varepsilon(C_1^{-1}-A_1^{-1}),\quad \lambda_4=-\varepsilon(C_2^{-1}-A_2^{-1})$$

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=-\varepsilon(C_2^{-1}+A_1^{-1}),\quad \lambda_3=-2\varepsilon(A_2^{-1}-C_2^{-1}),\quad \lambda_4=-\varepsilon(C_1^{-1}-A_1^{-1})$$

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=-\varepsilon(C_1^{-1}+C_2^{-1}),\quad \lambda_3=-2\varepsilon(A_1^{-1}-C_1^{-1}),\quad \lambda_4=-2\varepsilon(A_2^{-1}-C_2^{-1})$$

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=-\varepsilon(C_1^{-1}+A_2^{-1}),\quad \lambda_3=-2\varepsilon(A_1^{-1}-C_1^{-1}),\quad \lambda_4=-\varepsilon(C_2^{-1}-A_2^{-1})$$

Корень $\lambda_1=0$ — следствие закона сохранения момента количества движения. Устойчивость или неустойчивость стационарных вращений зависит от знаков корней λ_3 и λ_4. Например, если $A_1>C_1$, $A_2>C_2$, то устойчив первый стационарный режим, а остальные неустойчивы. В случае, когда $A_1\neq$ $\neq C_1$, $A_2\neq C_2$, устойчивы всегда только такие вращения, при которых ось вращения является осью с максимальными моментами инерции для каждого тела.

Рассмотренный выше случай движения двух тел является случаем общего положения, когда нет динамического подобия тел. Вместе с тем в системе могут существовать другие стационарные движения, отличные от стационарных вращений, при условии $A_1C_1^{-1}=A_2C_2^{-1}$. Эти движения суть регулярные прецессии тел с одинаковыми угловыми скоростями. Представляет определенный интерес выяснение характера поведения системы в этом резонансном случае, а также исследование устойчивости стационарных вращений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М.: Наука, 1968. 352 с.
3. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела, содержащего сферический демпфер.— Ж. прикл. механ. и физ., 1968, № 1, с. 73—79.
4. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 5, с. 771—778.
5. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Быстрое движение вокруг неподвижной точки твердого тела в сопротивляющейся среде.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 3, с. 5—13.
6. *Вильке В. Г.* Аналитические и качественные методы в динамике систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во МГУ, 1982. 118 с.
7. *Болотина Н. Е., Вильке В. Г.* Движение симметричного спутника вокруг центра масс на круговой орбите при наличии гибких вязкоупругих стержней.— Космич. исследования, 1984, № 1, с. 13—19.

Москва

Поступила в редакцию
3.V.1983