МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1985

УДК 531.38

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО ПОСРЕДСТВОМ СИСТЕМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

СТОРОЖЕНКО В. А.

В ряде работ, посвященных устойчивости вращательных движений твердых тел, подвешенных на струне, например [1–4], струна рассматривается лишенной массы и не сопротивляющейся скручивающим усилиям. Между тем при реальном конструировании устройств, использующих струнный подвес, струна обычно выполняет функцию передачи вращательного движения от двигателя к телу. Для тел, значительных по размеру, струнный подвес обладает достаточно большой собственной массой, которую необходимо учитывать при анализе движения тела, особенно при движении его с большими угловыми скоростями. В публикуемой работе исследуется один из возможных вариантов реального осуществления весомой нескручивающейся струны.

1. Одной из возможных моделей, близких к абсолютно гибкой нескручивающейся струне, является система из n последовательно соединенных посредством шарниров Гука стержней (фиг. 1). Каждый из шарниров Гука (фиг. 1, a), соединяющих стержни между собой, а также с телом и с валом электродвигателя, обеспечивает две степени свободы между соединяемыми их частями. В результате механическая система, изображенная на фиг. 1, имеет $2(n+1)$ степеней свободы. Предполагаем, что все стержни совершенно одинаковы и каждый из них представляет прямой круговой цилиндр с высотой l и радиусом основания r. Исследуемое тело является осесимметрическим с главными центральными моментами инерции $A=B$; C. Считаем также, что центр каждого из шарниров Гука находится строго на оси симметрии соответствующего стержня или тела, следовательно, в положении равновесия центры всех шарниров Гука и центры масс всех стержней и тела находятся на вертикали, совпадающей с осью вала электродвигателя. В качестве обобщенных координат выберем совокупность углов α_j и β_j, характеризующих отклонение оси симметрии каждого стержня и тела от вертикали (фиг. 2). Функция Лагранжа с точностью до малых второго порядка включительно относительно углов α_j и β_j имеет вид

$$L=\frac{m_1l^2}{8}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{k-1}2(\dot\alpha_j-\omega\beta_j)+\dot\alpha_k-\omega\beta_k\right)^2+\left(\sum_{j=1}^{k-1}2(\dot\beta_j+\omega\alpha_j)+\right.\right.\right.$$

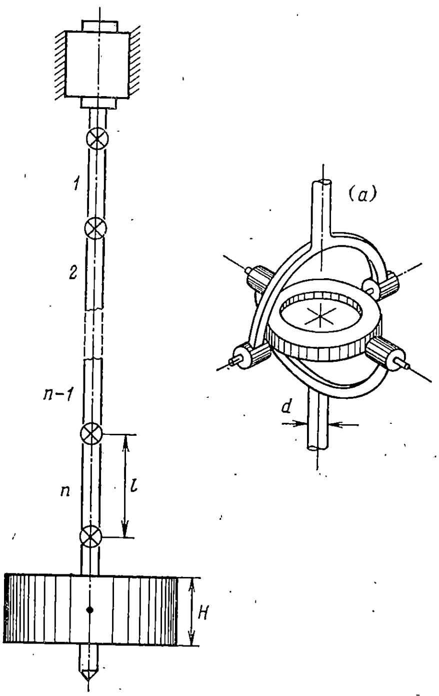
$$\left.\left.\left.+\dot\beta_k+\omega\alpha_k\right)^2\right]\right\}+\frac{m}{2}\left\{\left[l\sum_{k=1}^{n}(\dot\alpha_k-\omega\beta_k)+a(\dot\alpha_{n+1}-\omega\beta_{n+1})\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[l\sum_{k=1}^{n}(\dot\beta_k-\omega\alpha_k)+a(\dot\beta_{n+1}+\omega\alpha_{n+1})\right]^2\right\}+$$

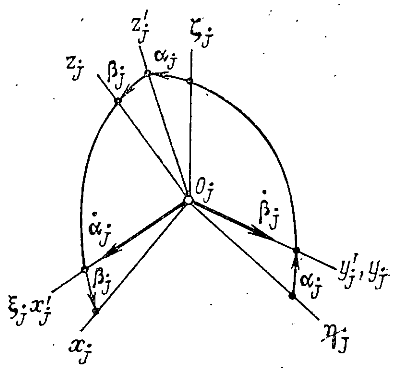
$$
\begin{aligned}
&+\frac{A_1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}((\alpha_k^{\cdot}-\omega\beta_k)^2+(\beta_k^{\cdot}+\omega\alpha_k)^2)\right]+\frac{A}{2}\left[(\alpha_{n+1}^{\cdot}-\omega\beta_{n+1})^2+\right.\\
&\left.+(\beta_{n+1}^{\cdot}+\omega\alpha_{n+1})^2\right]+\frac{C_1}{2}\left[n\omega^2+\sum_{k=1}^{n}(-\omega^2(\alpha_k^2+\beta_k^2)+\right.\\
&\left.+(n+1-k)\alpha_k^{\cdot}(\beta_k-\beta_{k-1})-(n-k)\beta_k^{\cdot}(\alpha_{k+1}-\alpha_k))\right]+\\
&+\frac{C}{2}\left[\omega^2(1-\alpha_{k+1}^2-\beta_{k+1}^2)+2\omega\sum_{k=1}^{n+1}(\alpha_k^{\cdot}(\beta_k-\beta_{k-1})-\beta_{k-1}^{\cdot}(\alpha_k-\alpha_{k-1}))\right]+\\
&+m_1g\frac{l}{2}\left(n^2-\sum_{k=1}^{n}\frac{2(n-k)+1}{2}(\alpha_k^2+\beta_k^2)+\right.\\
&\left.+mg\frac{l}{2}\left(2n-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)\right)+mga\left(1-\frac{\alpha_{n+1}^2}{2}-\frac{\beta_{n+1}^2}{2}\right)\right.
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

Здесь m, m_1 — соответственно масса тела и одного стержня, A_1, C_1 — соответственно экваториальный и осевой моменты инерции каждого из цилиндрических стержней, a — расстояние от центра масс тела до центра ближайшего из шарниров Гука, ω — величина постоянной угловой скорости вращения системы.

Уравнения движения, описывающие возмущенное движение системы около вертикального положения динамического равновесия ее, полученные в форме



Фиг. 1



Фиг. 2

уравнений Лагранжа II рода при использовании функции (1.1), могут быть приведены к виду

$$
\begin{aligned}
&(A_1-{}^1/_4m_1l^2)(\alpha_j^{\cdot\cdot}-2\omega\beta_j^{\cdot}-\omega^2\alpha_j)+l(m+m_1(n-j+{}^1/_2))\times\\
&\times\left[g\alpha_j+l\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^{\cdot\cdot}-2\omega\beta_k^{\cdot}-\omega^2\alpha_k)\right]+C_1\omega(\beta_j^{\cdot}+\omega\alpha_j)+
\end{aligned}
$$

$$+mla(\ddot\alpha_{n+1}-2\omega\dot\beta_{n+1}-\omega^2\alpha_{n+1})-m_1l^2\sum_{p=1}^{n-j}p(\ddot\alpha_{j+p}-2\omega\dot\beta_{j+p}-\omega^2\alpha_{j+p})=0$$

$$(j=1,2,\ldots,n)$$

$$(A_1-{}^1/_4m_1l^2)(\ddot\beta_j+2\omega\dot\alpha_j-\omega^2\beta_j)+l(m+m_1(n-j+{}^1/_2))\times$$

$$\times\left[g\beta_j+l\sum_{k=1}^{n}(\ddot\beta_k-2\omega\dot\alpha_k-\omega^2\beta_k)\right]-C_1\omega(\dot\alpha_j-\omega\beta_j)+mla(\ddot\beta_{n+1}+2\omega\dot\alpha_{n+1}-$$

$$-\omega^2\beta_{n+1})-m_1l^2\sum_{p=1}^{n-j}p(\ddot\beta_{j+p}+2\omega\dot\alpha_{j+p}-\omega^2\beta_{j+p})=0\quad(j=1,2,\ldots,n)$$

$$(1.2)$$

$$A(\ddot\alpha_{n+1}-2\omega\dot\beta_{n+1}-\omega^2\alpha_{n+1})+C\omega(\dot\beta_{n+1}+\omega\alpha_{n+1})+$$

$$+ma\left[l\sum_{k=1}^{n}(\ddot\alpha_k-2\omega\dot\beta_k-\omega^2\alpha_k)+a(\ddot\alpha_{n+1}-2\omega\dot\beta_{n+1}-\omega^2\alpha_{n+1})\right]+mga\alpha_{n+1}=0$$

$$A(\ddot\beta_{n+1}+2\omega\dot\alpha_{n+1}-\omega^2\beta_{n+1})-C\omega(\dot\alpha_{n+1}-\omega\beta_{n+1})+$$

$$+ma\left[l\sum_{k=1}^{n}(\ddot\beta_k+2\omega\dot\alpha_k-\omega^2\beta_k)+a(\ddot\beta_{n+1}+2\omega\dot\alpha_{n+1}-\omega^2\beta_{n+1})\right]+mga\beta_{n+1}=0$$

Введя комплекснозначные переменные $\alpha_j+i\beta_j=z_j$, безразмерное время $\tau=\omega t$ и обозначения

$$\varepsilon=m_1/(4m),\ \nu=g/(l\omega^2),\ \varkappa=a/l,\ \rho=A/(ma^2)$$
$$\sigma=C/(ma^2),\ \rho_1=A_1/(ml^2),\ \sigma_1=C_1/(ml^2)\qquad(1.3)$$

получим следующую упрощенную систему уравнений с комплексными коэффициентами:

$$(\rho_1-\varepsilon)(\ddot z_j+2i\dot z_j-z_j)+(1+4\varepsilon(n-j+{}^1/_2))\left(\nu z_j+\sum_{k=1}^{n}(\ddot z_k+2i\dot z_k-z_k)\right)+$$

$$+\sigma_1(-i\dot z_j+z_j)+\varkappa(\ddot z_{n+1}+2i\dot z_{n+1}-z_{n+1})-$$

$$-4\varepsilon\sum_{p=1}^{n-j}p(\ddot z_{j+p}+2i\dot z_{j+p}-z_{j+p})=0\quad(j=1,2,\ldots,n)\qquad(1.4)$$

$$\varkappa(1+\rho)(\ddot z_{n+1}+2i\dot z_{n+1}-z_{n+1})+\varkappa\sigma(-i\dot z_{n+1}+z_{n+1})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(\ddot z_k+2i\dot z_k-z_k)+\nu z_{n+1}=0$$

2. Будем искать решение системы уравнений (1.4) в виде

$$z_j=z_{j0}\exp(-\lambda\tau i)\qquad(2.1)$$

Соответственно получим следующее характеристическое уравнение с вещественными коэффициентами:

$$\det\|-d_{jk}(1+\lambda)^2+g_{jk}(1+\lambda)+q_{jk}\nu\|=0_{(j,\,k=1,\,2,\,\ldots,\,n+1)}\qquad(2.2)$$

$$d_{jk}=1+4\varepsilon(n+{}^1/_2-\max(j,k))-\delta_{jk}(-\rho_1+\varepsilon)$$
$$g_{jk}=\delta_{jk}\sigma_1,\ q_{jk}=\delta_{jk}[1+4\varepsilon(n+{}^1/_2-j)]$$
$$d_{j,\,n+1}=d_{n+1,\,j}=1,\ g_{j,\,n+1}=g_{n+1,\,j}=q_{j,\,n+1}=q_{n+1,\,j}=0\qquad(2.3)$$
$$d_{n+1,\,n+1}=1+\rho,\ g_{n+1,\,n+1}=\sigma,\ q_{n+1,\,n+1}=1/\varkappa\ (j=1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Как следует из (2.1), тривиальное решение системы уравнений (1.4) будет устойчиво по первому приближению, если все корни $U_\mu=1+\lambda_\mu$ уравнения (2.2) будут вещественны. Предположим обратное, что уравнение (2.2) имеет пару комплексных корней

$$U_1=\delta_1+i\delta_2,\quad U_2=\delta_1-i\delta_2 \tag{2.4}$$

Это означает, что существует два комплексно-сопряженных вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1&=\{x_1+iy_1,\ x_2+iy_2,\ldots,x_{n+1}+iy_{n+1}\} \\ \mathbf{r}_2&=\{x_1-iy_1,\ x_2-iy_2,\ldots,\ x_{n+1}-iy_{n+1}\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

таких, что выполняются равенства

$$(-Du_1^2+Gu_1+Q)\mathbf{r}_1=0,\quad (-Du_2^2+Gu_2+Q)\mathbf{r}_2=0 \tag{2.6}$$

где $D=\|d_{jk}\|$, $G=\|g_{jk}\|$, $Q=\|q_{jk}\|$ — симметрические матрицы с элементами (2.3).

Умножив первое из равенств (2.6) скалярно на $\mathbf{r}_2$, получим

$$-(D\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)u_1^2+(G\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)u_1+(Q\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)=0 \tag{2.7}$$

Равенство (2.7) можно рассматривать как квадратное уравнение относительно u_1, коэффициентами которого в силу симметричности матриц D, G, Q являются эрмитовы формы с вещественными коэффициентами. Как известно [5], такие формы принимают только вещественные значения. Рассмотрим дискриминант уравнения (2.7):

$$\Delta=(G\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)^2+4(Q\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)\,(D\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2). \tag{2.8}$$

Форма $(Q\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)$ является положительно-определенной, так как матрица Q диагональная, и все элементы ее положительны. Но тогда положительность формы $(D\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2)$ является достаточным условием вещественности корней уравнения (2.7), поскольку дискриминант (2.8) при этом будет строго положительным. Признаком определенной положительности эрмитовой формы $(D\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ является положительность главных миноров матрицы D. В силу закона инерции для эрмитовых форм [5] этот признак может быть сведен к требованию положительности главных миноров любой матрицы

$$D_1=S'DS \tag{2.9}$$

где S — произвольная невырожденная $(n+1)\times(n+1)$ матрица преобразования.

Возьмем матрицу преобразования S в виде

$$S=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{Vmatrix} \tag{2.10}$$

Эта матрица невырожденная, так как $|S|=1$. Тогда согласно формулам (2.9) и (2.3) получим

$$D_1=\begin{Vmatrix} 2(\rho_1+\varepsilon) & -\rho_1+\varepsilon & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho_1+\varepsilon & 2(\rho_1+\varepsilon) & -\rho_1+\varepsilon & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_1+\varepsilon & 2(\rho_1+\varepsilon) & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2(\rho_1+\varepsilon) & -\rho_1+\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\rho_1+\varepsilon & 1+\rho_1+\varepsilon & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \rho+\varepsilon \end{Vmatrix} \tag{2.11}$$

Определим главные миноры этой матрицы

$$\Delta_1=2(\rho_1+\varepsilon)$$

$$\Delta_2=(\rho_1+3\varepsilon)(3\rho_1+\varepsilon)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_k=4\rho_1\varepsilon\sum_{j=1}^{k-2}(\rho_1+\varepsilon)^{k-2-j}\Delta_j+(\rho_1+\varepsilon)\Delta_{k-1}+$$
$$+(\rho_1^2+6\rho_1\varepsilon+\varepsilon^2)(\rho_1+\varepsilon)^{k-2}\quad(3<k\leqslant n-1)\tag{2.12}$$

$$\Delta_n=4\rho_1\varepsilon\sum_{j=1}^{n-2}(\rho_1+\varepsilon)^{n-j-2}\Delta_j+\Delta_{n-1}+(\rho_1+\varepsilon)^{n-2}(\rho_1^2+6\rho_1\varepsilon+\varepsilon^2)$$

$$\Delta_{n+1}=(1+\rho)\left\{4\rho_1\varepsilon\sum_{j=1}^{n-2}(\rho_1+\varepsilon)^{n-2-j}\Delta_j+(\rho_1+\varepsilon)^{n-2}(\rho_1^2+6\rho_1\varepsilon+\varepsilon^2)\right\}+\rho\Delta_{n-1}$$

Так как величины ρ_1, ρ и ε согласно формулам (1.3) положительны, то все главные миноры матрицы D_1 положительны, такими же согласно закону инерции эрмитовых форм являются главные миноры матрицы D, т. е. эрмитова форма $(D\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ является определенно-положительной и, следовательно, корни квадратного уравнения (2.7) являются вещественными, что противоречит нашему предположению о существовании комплексных корней уравнения (2.2). Следовательно, все корни этого уравнения вещественны, т. е. тривиальное решение систем уравнений (1.4) устойчиво по первому приближению.

В процессе доказательства не накладывалось никаких ограничений на параметры тела, подвеса и значения угловой скорости вращения, отсюда следует вывод, что вертикальная форма динамического равновесия тела, подвешенного указанным образом, устойчива в первом приближении при любых значениях угловой скорости вращения. Аналогичный результат был получен в [2] для тела, подвешенного на невесомой абсолютно гибкой струне.

3. Рассмотрим теперь вопрос о существовании форм динамического равновесия данной механической системы, отличных от вертикальной формы. Существование таких форм возможно, если уравнения (1.4) допускают существование постоянных решений $z_j=z_j^\circ=\text{const}$, отличных от нуля. Эти решения согласно уравнениям (1.4) удовлетворяют следующим условиям:

$$-(\rho_1+\varepsilon)z_j^\circ+\left(1+4\varepsilon\left(n-j+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\nu z_j^\circ-\sum_{k=1}^{n}z_k^\circ\right)+$$
$$+\sigma_1 z_j^\circ+\varkappa \overset{\circ}{z}_{n+1}+4\varepsilon\sum_{p=1}^{n-j}p\overset{\circ}{z}_{j+p}=0\quad(j=1,2,\ldots,n)\tag{3.1}$$
$$-\varkappa(1+\rho)\overset{\circ}{z}_{n+1}+\varkappa\sigma\overset{\circ}{z}_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}z_k^\circ+\nu\overset{\circ}{z}_{n+1}=0$$

Чтобы ненулевые решения системы уравнений (3.1) относительно z_j° были возможны, определитель этой системы должен быть равным нулю. Отсюда получаем уравнение

$$\det\|d_{jk}-g_{jk}-q_{jk}\nu\|=0\tag{3.2}$$

где d_{jk}, g_{jk}, q_{jk} определяются из формул (2.3). При этом вещественным положительным корням $\nu_\mu=g/(l\omega_\mu^2)$ будут соответствовать действительные значения угловой скорости вращения ω_μ, при которых от вертикальной формы динамического равновесия ответвляются новые формы динамического равновесия.

Учитывая, что, согласно формулам (2.3), параметр ν входит только в состав членов, находящихся на главной диагонали, уравнение может быть приведено к виду

$$\det\|c_{jk}-\nu\delta_{jk}\|=0 \tag{3.3}$$

$$c_{jk}=(d_{jk}-g_{jk})/\sqrt{q_{jj}q_{kk}} \tag{3.4}$$

Следовательно, корни ν_μ уравнения (3.3) можно рассматривать как собственные значения матрицы $C=\|c_{jk}\|$. Нетрудно убедиться в том, что матрица C симметрична, следовательно, все ее собственные значения вещественны. При этом, согласно закону инерции для квадратичных форм и теореме Якоби [5], число положительных собственных значений равно числу постоянств знаков в ряду чисел $1, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n+1}$, где Δ_j ($j=1, 2, \ldots, n+1$) — главные миноры матрицы C или конгруэнтной ей матрицы $C_1=P'CP$ ($|P|\neq 0$).

Выберем следующую матрицу преобразования P:

$$P=\begin{Vmatrix} q_{11} & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{q_{11}q_{22}} & q_{22} & 0\ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{q_{22}q_{33}} & q_{33}\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots & q_{n-1,\,n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\ldots & -\sqrt{q_{n-1,\,n-1}q_{nn}} & q_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 & -\sqrt{q_{nn}q_{n+1,\,n+1}} & q_{n+1,\,n+1} \end{Vmatrix} \tag{3.5}$$

являющуюся невырожденной, так как $|P|=q_{11}q_{22}\ldots q_{n+1,\,n+1}\neq 0$. Согласно формулам (2.3), (3.4), (3.5) и $C_1=P'CP$, получим

$$C_1=\begin{Vmatrix} 2(\xi+\varepsilon) & -\xi+\varepsilon & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -\xi+\varepsilon & 2(\xi+\varepsilon) & -\xi+\varepsilon & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi+\varepsilon & 2(\xi+\varepsilon) & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2(\xi+\varepsilon) & -\xi+\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\xi+\varepsilon & 1+\xi+\varepsilon & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1+\eta \end{Vmatrix} \tag{3.6}$$

где введены обозначения

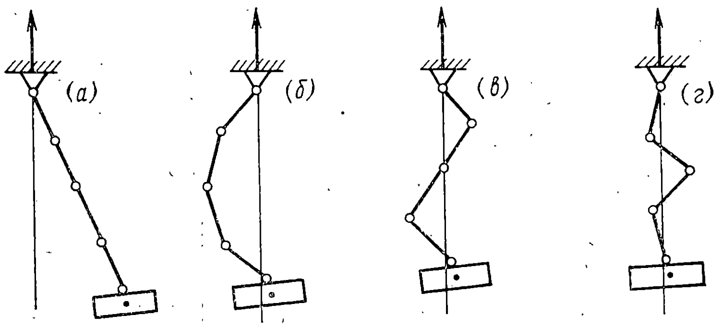
$$\xi=\rho_1-\sigma_1,\quad \eta=\rho-\sigma \tag{3.7}$$

Матрица C_1 совпадает с матрицей D_1 (см. (2.11)), если в последней положить вместо ρ_1 и ρ соответственно ξ и η. Если это преобразование сделать в формулах (2.12), то получим выражения для главных миноров матрицы C_1. Учитывая, что каждый из стержней, составляющих подвес, является вытянутым цилиндром и, следовательно, $\xi=\rho_1-\sigma_1=(A_1-C_1)/ml^2>0$, приходим к выводу, что первые n главных миноров матрицы C_1 являются положительными. Знак минора Δ_{n+1} зависит от величины η. Если тело, вращающееся на таком подвесе, также является вытянутым цилиндром ($A>C$), то $\eta>0$ и, следовательно $\Delta_{n+1}>0$, т. е. число постоянств знаков в ряду $1, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n+1}$ равно $n+1$.

Если же тело представляет собой сплюснутый цилиндр, такой, что

$$C>A+ml^2\quad (\eta<-1) \tag{3.8}$$

то $\Delta_{n+1}<0$ и число постоянств знаков в ряду (3.5) равно n. Соответственно этому для сплюснутого тела, удовлетворяющего условию (3.8), существует n значений угловой скорости ω, при которых от вертикальной формы динамического равновесия ответвляются новые формы. Для вытянутого тела ($A>C$) существует $n+1$ таких значений угловой скорости вращения. Для цилиндрического тела с параметрами $A<C<A+ml^2$ знак минора Δ_{n+1} устанавливается непосредственной подстановкой параметров в



Фиг. 3

рекуррентные формулы (2.12) с учетом замены в них ρ_1 и ρ соответственно на ξ и η.

4. Определим характер форм динамического равновесия, ответвляющихся от вертикальной формы при значениях параметра $\nu_i=g/(l\omega_i^2)$, обращающих определитель (3.2) в нуль. Для этого, очевидно, нужно решить систему любых n из $n+1$ уравнений (3.1), считая в этой системе известным один из параметров r_μ^0. Так как коэффициенты системы уравнений (3.1) вещественны, а параметры $z_j=\alpha_j+i\beta_j^0$ комплекснозначные, то эта система распадается на две идентичные системы относительно параметров α_j^0 и β_j^0. Не ограничивая общности, рассмотрим одну из них, например ту, которая в качестве неизвестных содержит углы α_j^0. Тогда задачу можно свести к решению следующей системы:

$$-(\rho_1-\varepsilon)x_j+\left(1+4\varepsilon\left(n-j+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\nu x_j-\sum_{k=1}^{n}x_k\right)+\sigma_1 x_j+$$

$$+4\varepsilon\sum_{p=1}^{n-j}px_j=-\varkappa \quad (j=1,2,\ldots n,), \quad x_j=\alpha_j^0/(\overset{\circ}{\alpha}_{n+1}) \tag{4.1}$$

Ввиду громоздкости аналитического решения системы уравнений (4.1) она была численно решена для конкретной механической системы, состоящей из цилиндрического тела с массой $m=2500$ г, радиусом основания $R=27{,}5$ см и высотой $H=10$ см и подвеса из четырех соединенных посредством шарниров Гука стержней, каждый из которых представляет цилиндр с массой $m_1=50$ г, высотой $l=8$ см и диаметром основания $d=1$ см. Данные расчетов приведены в таблице.

В первых двух столбцах таблицы находятся значения параметра ν_i, найденные посредством численного решения уравнения (3.2) для данной механической системы, и соответствующие им значения угловой скорости вращения ω_i, при которых происходит ответвление новых форм динамического равновесия от вертикальной формы. Оказалось, что существует четыре таких значения угловой скорости, что совпадает с аналитически полученным в п. 3 выводом для сплюснутого цилиндрического тела.

В последующих столбцах таблицы представлены величины x_j, найденные посредством численного решения системы уравнений (4.1) и характеризующие отношение величины угла отклонения от вертикали оси соответствующего стержня к величине угла отклонения от вертикали оси симметрии тела. По данным этой

ν_i	ω_i, с$^{-1}$	x_1	x_2	x_3	x_4
4,295	$1{,}511\cdot10^{-2}$	3,375	3,376	2,277	3,377
$6{,}153\cdot10^{-4}$	$1{,}263\cdot10^{2}$	$-8{,}668\cdot10^{3}$	$-3{,}593\cdot10^{3}$	$3{,}591\cdot10^{3}$	$8{,}675\cdot10^{3}$
$1{,}329\cdot10^{-4}$	$2{,}716\cdot10^{2}$	$2{,}959\cdot10^{4}$	$-2{,}958\cdot10^{4}$	$-2{,}960\cdot10^{4}$	$2{,}962\cdot10^{4}$
$5{,}021\cdot10^{-5}$	$4{,}420\cdot10^{2}$	$-5{,}055\cdot10^{4}$	$1{,}220\cdot10^{5}$	$-1{,}219\cdot10^{5}$	$5{,}046\cdot10^{4}$

таблицы были схематически построены положения динамического равновесия тела, показанные на фиг. 3. Первая из таких форм динамического равновесия (фиг. 3, *а*) характерна тем, что оси всех стержней составляют практически одну прямую линию, в результате чего центр масс тела удалён от неподвижной вертикали. Аналогичная форма динамического равновесия была выявлена для тела, подвешенного на невесомой струне [1]. Другие формы динамического равновесия (фиг. 3, *б–г*) возникают при довольно больших значениях угловой скорости ω. Эти формы характерны тем, что центр масс и ось симметрии тела незначительно отклонены от неподвижной вертикали, а стержни при этом имеют различные кинематически возможные взаимные расположения.

С увеличением количества стержней, составляющих подвес, растет число различных вариантов их возможного взаимного расположения при соответствующих положениях динамического равновесия тела. Поэтому увеличивается и число этих положений динамического равновесия, что и показано в п. 3.

При большом количестве стержней n подвес является достаточно близким к идеальной модели весомой абсолютно гибкой нескручиваемой струны. Заметим, что формы динамического равновесия тела на таком подвесе внешне напоминают формы равновесия стержня, сжимаемого продольной силой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю., Малашенко С. В., Темченко М. Е.* О разветвлении устойчивых положений динамического равновесия одной механической системы.– Изв. АН СССР. ОТН, 1958, № 8, с. 53–61.
2. *Морозова Е. П.* Об устойчивости вращения твердого тела, подвешенного на струне.– ПММ, 1956, т. 20, вып. 5, с. 621–626.
3. *Возлинский В. И.* О бифуркации стационарных движений консервативных систем с двумя циклическими координатами.– ПММ, 1967, т. 31, вып. 5, с. 841–847.
4. *Скимель В. Н.* О движении гиростата, подвешенного на струне.– Тр. межвуз. конф. по прикладной теории устойчивости движения и аналитической механике. Казань: Изд-во Казан. авиац. ин-та, 1964, с. 118–122.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.

Киев

Поступила в редакцию
2.XI.1983