МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1985

УДК 531.53

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ СИСТЕМОЙ С ДВУМЯ МАЯТНИКАМИ

НГУЕН ВАН ДИНЬ

При помощи принципа максимума Л. С. Понтрягина [1] решены различные задачи об оптимальном управлении перемещением маятника [2–4].

Случай многих маятников рассмотрен в [5], случай системы с учетом упругих связей – в [6]. В публикуемой работе полученные в [2–4] результаты распространены на систему с двумя маятниками в резонансном случае, а именно на упрощенную модель упругой системы, в которой рассматриваются колебания с двумя наименьшими частотами.

1. Рассмотрим механическую систему, движение которой описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$x^{\cdot\cdot}=v^{\cdot}=u(t),\quad -1\leqslant u(t)\leqslant 1\quad \varphi^{\cdot\cdot}+\varphi=u(t),\quad \psi^{\cdot\cdot}+4\psi=u(t) \tag{1.1}$$

Здесь x, v – перемещение и скорость горизонтального прямолинейного движения точки подвеса; φ, ψ – углы отклонения маятников с собственными частотами 1 и 2; $u(t)$ – управляющая функция – ускорение точки подвеса.

Задача 1. Требуется отыскать оптимальное по быстродействию управление $u(t)$, переводящее рассматриваемую систему из начального состояния равновесия $t=0$, $x(0)=x^{\cdot}(0)=\varphi(0)=\varphi^{\cdot}(0)=\psi(0)=\psi^{\cdot}(0)=0$ в конечное $t=T$, $x(T)=a$, $x^{\cdot}(T)=\varphi(T)=\varphi^{\cdot}(T)=\psi(T)=\psi^{\cdot}(T)=0$. Здесь $a>0$ – заданное число, T – неизвестное минимальное время.

В векторно-матричной форме уравнения (1.1) имеют вид

$$y^{\cdot}=Ay+u(t)B \tag{1.2}$$

$$y=\begin{Vmatrix} x\\ x^{\cdot}\\ \varphi\\ \varphi^{\cdot}\\ \psi\\ \psi^{\cdot}\end{Vmatrix},\quad A=\begin{Vmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&-4&0\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\end{Vmatrix}$$

Как и в [3], нетрудно доказать что:
оптимальное управление симметрично относительно $t={}^1/_2T$, т. е.

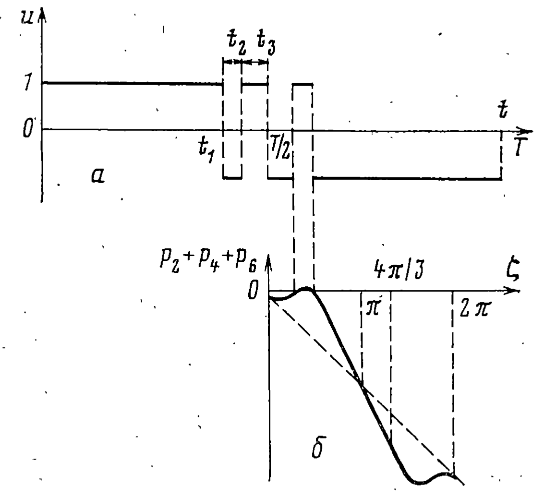
$$u(t)=-u(T-t) \tag{1.3}$$

в момент ${}^1/_2T$ выполнены равенства

$$x({}^1/_2T)={}^1/_2a,\quad \varphi({}^1/_2T)=0,\quad \psi({}^1/_2T)=0 \tag{1.4}$$

Задача 2. Требуется отыскать оптимальное по быстродействию управление $u(t)$, переводящее рассматриваемую систему из начального состояния равновесия $t=0$, $v(0)=\varphi(0)=\varphi^{\cdot}(0)=\psi(0)=\psi^{\cdot}(0)=0$ в конечное состояние поступательного движения $t=T$, $v(T)=a$, $\varphi(T)=\varphi^{\cdot}(T)=\psi(T)=\psi^{\cdot}(T)=0$.

Здесь a – заданное число (скорость поступательного движения), T – неизвестное время процесса управления.



Фиг. 1

В векторно-матричной форме уравнения (1.1) имеют вид (1.2), но

$$y=\begin{Vmatrix} v\\ \varphi\\ \varphi^{\cdot}\\ \psi\\ \psi^{\cdot}\end{Vmatrix},\quad A=\begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&-4&0\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{Vmatrix}$$

Как и в задаче 1, нетрудно доказать что:
оптимальное управление симметрично относительно $t={}^1/_2T$, т. е.

$$u(t)=u(T-t) \tag{1.5}$$

в момент ${}^1/_2T$ выполнены равенства

$$v({}^1/_2T)={}^1/_2a,\quad \varphi^{\cdot}({}^1/_2T)=0,\quad \psi^{\cdot}({}^1/_2T)=0 \tag{1.6}$$

2. Рассмотрим первую задачу. Через γ_i $(i=1, 2, \ldots, 6)$ обозначим сопряженные переменные. Составим функцию Гамильтона $H=\gamma_1x^{\cdot}+\gamma_2u+$ $+\gamma_3\varphi^{\cdot}+\gamma_4(-\varphi+u)+\gamma_5\psi^{\cdot}+\gamma_6(-4\psi+u)$ и сопряженную систему $\gamma_1^{\cdot}=0$, $\gamma_2^{\cdot}=$ $=-\gamma_1$, $\gamma_3=\gamma_4$, $\gamma_4^{\cdot}=-\gamma_3$, $\gamma_5^{\cdot}=4\gamma_6$, $\gamma_6^{\cdot}=-\gamma_5$.

Согласно принципу максимума Л. С. Понтрягина, оптимальное управление имеет вид (C, D, E, ξ, F, η — неопределенные постоянные): $u(t)=$ $=\operatorname{sign}P(t)=+1$ при $P(t)>0$, $u(t)=\operatorname{sign}P(t)=-1$ при $P(t)<0$:

$$P(t)=\gamma_2(t)+\gamma_4(t)+\gamma_6(t)=Ct+D+E\sin(t+\xi)+F\sin 2(t+\eta)$$

Очевидно, что в момент T условие $H\geqslant 0$ удовлетворяется. На основании (1.3) попытаемся искать оптимальное управление в виде (фиг. 1, *а*):

$$u(t)=+1 \text{ при } 0\leqslant t<t_1,\quad t_1+t_2\leqslant t<{}^1/_2T=t_1+t_2+t_3, \tag{2.1}$$

$${}^1/_2T+t_3\leqslant t<{}^1/_2T+t_3+t_2;\quad u(t)=-1 \text{ при } t_1\leqslant t<t_1+t_2,$$

$${}^1/_2T\leqslant t<t_3+{}^1/_2T,\quad {}^1/_2T+t_3+t_2\leqslant t\leqslant T=2(t_1+t_2+t_3)$$

Здесь $t_1>0$, $t_2\geqslant 0$, $t_3\geqslant 0$ — неизвестные.

Тогда равенства (1.4) преобразуются к следующим соотношениям:

$${}^1/_2t_1^2+t_1t_2-{}^1/_2t_2^2+(t_1-t_2)t_3+{}^1/_2t_3^2={}^1/_2a$$

$$1-2\cos t_3+2\cos(t_3+t_2)-\cos{}^1/_2T=0 \tag{2.2}$$

$$1-2\cos 2t_3+2\cos 2(t_3+t_2)-\cos T=0$$

Из первого равенства (2.2) следует $a={}^1/_4T^2-2t_2^2-4t_2t_3$.

Пусть $a=4k^2\pi^2$ ($k=1, 2, \ldots$). Выберем $t_2=t_3=0$, $T=4k\pi$. Нетрудно видеть, что система уравнений (2.2) удовлетворяется и искомое управление имеет вид

$$\begin{aligned} u(t)&=1 \text{ при } 0\leqslant t<{}^1/_2T=2k\pi \\ u(t)&=-1 \text{ при } {}^1/_2T\leqslant t\leqslant T=4k\pi \end{aligned} \tag{2.3}$$

Пусть $a\neq 4k^2\pi^2$ ($k=1, 2, \ldots$). Будем искать T при условии $T\neq 4k\pi$. Запишем второе и третье равенства (2.2) в виде $\cos t_3-\cos(t_3+t_2)={}^1/_2(1-\cos{}^1/_2T)$, $\cos^2 t_3-\cos^2(t_3+t_2)={}^1/_4(1-\cos T)$.

Отсюда находим

$$\lim_{T\to 4k\pi} t_3=0<t_3=\arccos\frac{3+\cos{}^1/_2T}{4}\leqslant\frac{\pi}{3} \tag{2.4}$$

$$\lim_{T\to 4k\pi}(t_3+t_2)=0<t_3<t_3+t_2=\arccos\frac{1+3\cos{}^1/_2T}{4}\leqslant\frac{2\pi}{3}$$

Справедливы неравенства, из которых вытекает, что a — положительная монотонно возрастающая функция

$$\frac{dT_3}{dT}<\frac{1}{4}=\lim_{T\to 4k\pi+0}\frac{dt_3}{dT},\qquad 0<t_3<\frac{T}{4}$$

$$\frac{dt_2}{dT}<\frac{\sqrt{3}-1}{4}=\lim_{T\to 4k\pi+0}\frac{dt_2}{dT},\qquad 0<t_2<\frac{\sqrt{3}-1}{4}T$$

$${}^1/_2T>t_1={}^1/_2T-t_2-t_3>{}^1/_2T-\sqrt{3}/_4T>0$$

$$a>\frac{T^2}{4}-2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2T^2-4\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)\frac{T^2}{4}=0$$

$$\frac{da}{dT}=\frac{T}{2}-4t_2\frac{dt_2}{dT}-4\left(t_3\frac{dt_2}{dT}+t_2\frac{dt_2}{dT}\right)>\frac{T}{2}-$$

$$-4\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2T-4\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)\frac{T}{2}>0$$

поэтому для любого положительного a имеется единственное предлагаемое управление. На фиг. 2, 3 изображены графики функций t_1, t_2, t_3+t_2 и a в зависимости от T.

Чтобы утверждать оптимальность найденного управления, как и в [2, 3], нужно проверить три условия, из которых, очевидно, выполнены два первых: $u(t)\equiv 0$ — внутренняя точка области управления; $\det[B, AB, A^2B, A^3B, A^4B, A^5B]=-144\neq 0$. Докажем третье условие, состоящее в том, что управление (2.5) удовлетворяет принципу максимума. Для этого положим $t={}^1/_2T+\zeta$ и выберем $C=-1$, $D=-\xi=-\eta={}^1/_2T$. Тогда

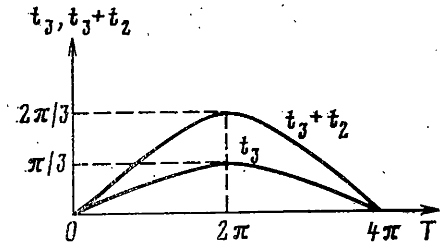
$$P(\zeta)=-\zeta+E\sin\zeta+F\sin 2\zeta,\qquad dP/d\zeta=-1+E\cos\zeta+2\cos 2\zeta \tag{2.5}$$

При $a=4k\pi^2$ ($k=1, 2, \ldots$) найденное управление (2.3) приобретает вид $u(\zeta)=-1$ при $0\leqslant\zeta\leqslant{}^1/_2T$, $u(\zeta)=+1$ при $-{}^1/_2T\leqslant\zeta<0$.

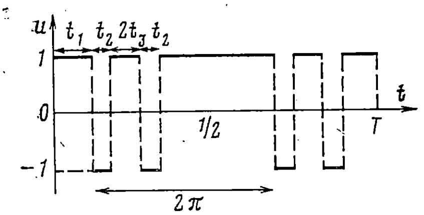
Выбирая $|E|+|2F|<1$ и принимая во внимание, что $P(0)=0$, находим $dP/d\zeta<0$, а $\operatorname{sign}P(\zeta)=-1$ при $\zeta>0$, $\operatorname{sign}P(\zeta)=+1$ при $\zeta<0$, т. е. третье условие выполнено.

При $a\neq 4k^2\pi^2$ ($k=1, 2, \ldots$) найденное управление (2.1) представляет собой нечетную функцию, которая для $\zeta\geqslant 0$ имеет вид

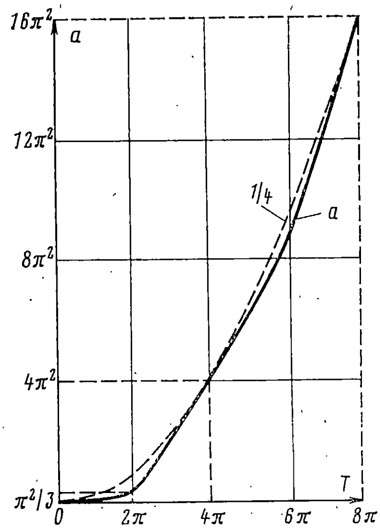
$$\begin{aligned} u(\zeta)&=-1 \text{ при } 0\leqslant\zeta<t_3,\quad t_3+t_2\leqslant\zeta<{}^1/_2T \\ u(\zeta)&=+1 \text{ при } t_3\leqslant\zeta<t_3+t_2 \end{aligned} \tag{2.6}$$



Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3

Нетрудно видеть, что третье условие для $\zeta\geqslant 0$ удовлетворяется, если выполняются два утверждения: уравнение $P(\zeta)=0$ имеет два корня t_3, t_3+t_2 (кроме $\zeta=0$) и в интервале $0\leqslant\zeta\leqslant t_3+t_2$ не существует других корней; $P(\zeta)<0$ для $\zeta>t_3+t_2$ (по непрерывности в интервале $(0, t_3)$ и (t_3, t_3+t_2) функция $P(\zeta)$ имеет знак управления (2.6)). При указанных значениях корней из (2.5) следует система уравнений для E и F:

$$E\sin t_3+F\sin 2t_3=t_3$$

$$E\sin(t_3+t_2)+F\sin 2(t_3+t_2)=t_3+t_2$$

$$E=\frac{1}{\Delta}\left[t_3\sin 2(t_3+t_2)-(t_3+t_2)\sin 2t_3\right]=$$

$$=\frac{2}{\Delta}t_3(t_3+t_2)\left[\frac{\sin 2(t_3+t_2)}{2(t_3+t_2)}-\frac{\sin 2t_3}{2t_3}\right]$$

$$F=\frac{1}{\Delta}\left[(t_3+t_2)\sin t_3-t_3\sin(t_3+t_2)\right]=\frac{1}{\Delta}t_3(t_3+t_2)\left[\frac{\sin t_3}{t_3}-\frac{\sin(t_3+t_2)}{t_3+t_2}\right]$$

$$\Delta=\sin t_3\sin 2(t_3+t_2)-\sin 2t_3\sin(t_3+t_2)=$$

$$=2\sin t_3\sin(t_3+t_2)\left[\cos(t_3+t_2)-\cos t_3\right]$$

Учитывая (2.4) и принимая во внимание, что в интервале $(0, {}^3/_2\pi)$ выражение $\sin\alpha/\alpha$ является убывающей функцией, нетрудно получить $E>0$, $F<0$, $\Delta<0$.

Предположим, что в интервале $(0, t_3+t_2)$ уравнение $P(\zeta)=0$ имеет и другие корни. По непрерывности в указанном интервале производная $dP/d\zeta$ будет обращаться в нуль больше двух раз. Это невозможно, поскольку $0<t_3+t_2\leqslant{}^2/_3\pi<\pi$ и $dP/d\zeta=0$ является алгебраическим уравнением второго порядка относительно $\cos\zeta$. Итак, первое утверждение доказано. Теперь через ζ_1, ζ_2 $(0<\zeta_1<t_3<\zeta_2<t_3+t_2)$ обозначим два корня уравнения $dP/d\zeta=0$; два других ζ_3 и ζ_4 таковы, что ${}^4/_3\pi<\zeta_3=2\pi-\zeta_2<2\pi$ и ${}^5/_3\pi<\zeta_4=2\pi-\zeta_1<2\pi$ (фиг. 1, *б*). В силу $E>0$, $F<0$, $\Delta<0$ при $\zeta=\pi$ имеем $dP/d\zeta=-1-E+2F<0$.

Следовательно, и в интервале $\zeta_2<\zeta<\zeta_3$ справедливо неравенство $dP/d\zeta<0$. С другой стороны, при $\zeta=t_3+t_2$ $(\zeta_2<t_3+t_2<\zeta_3)$ имеем $P(t_3+t_2)=0$, отсюда следует $P(\zeta)<0$ для $t_2+t_3<\zeta\leqslant{}^4/_3\pi<\zeta_3$. Остается определить знак функции $P(\zeta)$ для $\zeta>{}^4/_3\pi$. Имеем

$$E+|F|=\frac{(t_3+t_2)\sin(2\cos t_3+1)-t_3\sin(t_3+t_2)\,[2\cos(t_3+t_2)+1]}{2\sin t_3\sin(t_3+t_2)\,[\cos t_3-\cos(t_3+t_2)]}$$

Учитывая, что $k=2\operatorname{tg}{}^1/_2(t_3+t_2)/(t_3+t_2)>2\operatorname{tg}{}^1/_2t_3/t_3=k'>1$, получим

$$E+|F|<\frac{k(t_3+t_2)\sin t_3(2\cos t_3+1)-k't_3\sin(t_3+t_2)\,[2\cos(t_3+t_2)+1]}{2\sin t_3\sin(t_3+t_2)\,[\cos t_3-\cos(t_3+t_2)]}=$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}{}^1/_2(t_3+t_2)\sin t_3(2\cos t_3+1)-2\operatorname{tg}{}^1/_2t_3\sin(t_3+t_2)\,[2\cos(t_3+t_2)+1]}{2\sin t_3\sin(t_3+t_2)\,[\cos t_3-\cos(t_3+t_2)]}=$$

$$=\frac{\cos^2{}^1/_2t_3(2\cos t_3+1)-\cos^2{}^1/_2(t_3+t_2)\,[2\cos(t_3+t_2)+1]}{2\cos^2{}^1/_2t_3\cos^2{}^1/_2(t_3+t_2)\,[\cos t_3-\cos(t_3+t_2)]}=$$

$$=\frac{80+32\cos{}^1/_2T}{(7+\cos{}^1/_2T)\,(5+3\cos{}^1/_2T)}\leqslant 4$$

Из этого неравенства выводим для $\zeta>{}^4/_3\pi$:

$$P=-\zeta+E\sin\zeta+F\sin 2\zeta\leqslant-{}^4/_3\pi+E+|F|\leqslant-{}^4/_3\pi+4<0$$

Второе утверждение доказано.

3. Рассмотрим вторую задачу. Через γ_i $(i=1, 2,\ldots 5)$ обозначим сопряженные переменные. Составим функцию Гамильтона $H=\gamma_1u+\gamma_2\varphi^\cdot+$ $+\gamma_3(-\varphi+u)+\gamma_4\psi^\cdot+\gamma_5(-4\psi+u)$ и сопряженную систему $\gamma_1^\cdot=0$, $\gamma_2^\cdot=\gamma_3$, $\gamma_3^\cdot=$ $=-\gamma_2$, $\gamma_4^\cdot=4\gamma_5$, $\gamma_5^\cdot=-\gamma_4$.

Согласно принципу максимума Л. С. Понтрягина, оптимальное управление имеет вид (C, D, ξ, E, η — неопределенные постоянные): $u(t)=$ $=\operatorname{sing}P(t)=+1$ при $P(t)>0$, $u(t)=\operatorname{sing}P(t)=-1$ при $P(t)<0$

$$P(t)=\gamma_1(t)+\gamma_2(t)+\gamma_3(t)=C-D\cos(t-\xi)-E\cos 2(t-\eta)$$

Очевидно, что в момент T условие $H\geqslant0$ удовлетворяется. На основании (1.5) будем искать оптимальное управление в виде $u(t)=+1$ при $0\leqslant t\leqslant t_1$, $2(k-1)\pi+t_1+t_2\leqslant t<t_1+t_2+2t_3+2(k-1)\pi$, $2(l-1)\pi+t_1+2t_2+2t_3\leqslant t<t_1+2l\pi$, $t_1+2t_2+2t_3+2n\pi\leqslant t\leqslant T=2t_1+2t_2+2t_3+2n\pi$; $u(t)=-1$ при $2(k-1)\pi+t_1\leqslant t<$ $<t_1+t_2+2(k-1)\pi$, $2(k-1)\pi+t_1+t_2+2t_3\leqslant t_1+2t_2+2t_3+2(k-1)\pi$ $(k=1, 2,\ldots$ $\ldots, n+1$; $l=1, 2,\ldots, n)$, где n — целая часть отношения $a/2\pi$; t_1, t_2, t_3 — неизвестные $(t_1\geqslant0,\ t_2\geqslant0,\ t_3\geqslant0,\ 2(t_1+t_2+t_3)\leqslant2\pi)$.

На фиг. 4 изображен график функции $u(t)$ для $n=1$. Интегрируя систему (1.1) и подставляя полученные результаты в (1.6), получим

$$a=T-4(n+1)t_2 \tag{3.1}$$
$$(-1)^{n-1}2(n+1)[\sin(t_3+t_2)-\sin t_3]+\sin{}^1/_2T=0$$
$$-2(n+1)[\sin 2(t_3+t_2)-\sin 2t_3]+\sin T=0$$

При $a=2n\pi$ $(n=1, 2,\ldots)$ выберем $t_2=t_3=0$, $t_1=T=2n\pi$, тогда $u(t)=$ $=+1$. При $2n\pi<a<2(n+1)\pi$ выберем t_2 и T из условий $t_2>0$ и $2n\pi<T<$ $<2(n+1)\pi$. Из второго и третьего равенств (3.1) получим

$$8(n+1)^2\zeta^2/(1+\zeta^2)+(n+1)\zeta\sin T-\sin^2{}^1/_2T=0 \tag{3.2}$$

или в ином виде

$$f(\zeta)=(n+1)\zeta^3\sin T+[8(n+1)^2-\sin^2{}^1/_2T]\zeta^2+$$
$$+(n+1)\zeta\sin T-\sin^2{}^1/_2T=0,\quad \zeta=\operatorname{tg}{}^1/_2t_2 \tag{3.3}$$

$$f(0)<0,$$

$$f\left(\frac{1}{2(n+1)}\right)=2+\left[\frac{1}{8(n+1)^2}+\frac{1}{2}\right]\sin T-\left[1+\frac{1}{4(n+1)^2}\right]\sin^2\frac{T}{2}>0$$

$$f(-\infty)>0,\ f(+\infty)<0,\ f(6)=288(n+1)^2+222(n+1)\sin T-$$
$$-37\sin^2 {}^1/_2 T>0 \text{ при } \sin T<0$$
$$f(-\infty)<0,\ f(+\infty)>0,\ f(-6)=288(n+1)^2-$$
$$-222(n+1)\sin T-37\sin^2 {}^1/_2 T>0 \text{ при } \sin T>0$$

Отсюда следует, что уравнение (3.3) имеет три действительных корня; при этом всегда существует один и только один положительный корень со значением $\zeta_1<[2(n+1)]^{-1}\leqslant{}^1/_2$ (второй положительный корень, если он существует, будет больше шести).

Определим t_2 равенством

$$0<t_2=2\operatorname{arc\,tg}\zeta_1<2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2(n+1)}\leqslant 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}<\frac{\pi}{3} \qquad (3.4)$$

Дифференцируя (3.2) по T, получим

$$\left[\frac{16(n+1)^2\zeta_1}{(1+\zeta_1^2)^2}+(n+1)\sin T\right]\frac{d\zeta_1}{dT}=\frac{1}{2}\sin T-(n+1)\zeta_1\cos T.$$

Докажем, что коэффициент при производной положителен

$$16(n+1)^2\zeta_1/(1+\zeta_1^2)^2+(n+1)\sin T>0 \qquad (3.5)$$

Действительно, если при некотором T в последнем соотношении стоит знак равенства, то из (3.2) находим $\cos T=1+16(n+1)^2\zeta_1^2(1-\zeta_1^2)/(1+\zeta_1^2)^2$, что невозможно для $0<\zeta_1<{}^1/_2$. Но при $T=(2n+1)\pi$, $\zeta_1=[8(n+1)^2-1]^{-1/2}$ неравенство (3.5), очевидно, выполнено, поэтому согласно непрерывности оно будет выполнено и для всех $2n\pi<T<2(n+1)\pi$. Естественным следствием является то, что $d\zeta_1/dT=0$ при $\zeta=\zeta_1^*={}^1/_2\operatorname{tg}T^*/(n+1)$.

Подставляя это значение в (3.2), получим уравнение $(\cos T^*-1)\times\times\{[20(n+1)^2-1]\cos^2 T^*+16(n+1)^2\cos T^*+1\}=0$. Принимая во внимание, что $0<\zeta_1<[2(n+1)]^{-1}$, имеем $0<\operatorname{tg}T^*<1$, $-1<\cos T^*<-\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2<<\cos T^*<1$. Тогда выберем T^*:

$$(2n+1)\pi<T^*=$$
$$=\arccos\left\{\frac{-8(n+1)^2-[64(n+1)^4-20(n+1)^2+1]^{1/2}}{20(n+1)^2-1}\right\}<2(n+1)\pi$$

(другой корень T^{**} исключается из рассмотрения, так как $\sqrt{2}/2<\cos T^{**}<<0$). Отсюда следует $d\zeta_1/dt>0$ при $2n\pi<T<T^*$; $d\zeta_1/dT<0$ при $T^*<T<<2(n+1)\pi$.

Аналогично можно доказать следующие неравенства:

$$\lim_{T\to 2(n+1)\pi-0}\frac{dt_2}{dT}=-\frac{1}{2(n+1)}<\frac{dt_2}{dT}=\frac{2}{1+\zeta_1^2}\frac{d\zeta_1}{dT}<\frac{1}{4(n+1)}=\lim_{T\to 2n\pi+0}\frac{dt_2}{dT}$$

$$0<t_2<{}^1/_4(T-2n\pi)/(n+1),\qquad a=T-4(n+1)t_2>0$$

$$da/dT=1-4(n+1)\,dt_2/dT>0$$

Итак, $a(T)$ — однозначная положительная и строго возрастающая функция, поэтому для любого положительного a можно найти единственное решение (t_2, T).

Неизвестные t_1, t_3 определим из системы уравнений

$$\cos\left(t_3+\frac{t_2}{2}\right)=\frac{|\sin {}^1/_2 T|}{4(n+1)\sin {}^1/_2 t_2},\qquad t_1+t_3=\frac{T-2n\pi}{2}-t_2$$

(первое уравнение вытекает из второго и третьего уравнений (3.1)).

По тому же известному методу можно доказать, что

$$\frac{1}{2}<\frac{|\sin {}^1/_2T|}{4(n+1)\sin {}^1/_2t_2}<1, \quad \lim_{T\to 2n\pi+0}\left(t_3+\frac{t_2}{2}\right)=0<t_3+\frac{t_2}{2}=$$
$$=\arccos\frac{|\sin {}^1/_2T|}{4(n+1)\sin {}^1/_2t_2}<\frac{\pi}{3}=\lim_{T\to 2(n+1)\pi-0}\left(t_3+\frac{t_2}{2}\right) \qquad (3.6)$$

$$\lim_{T\to 2(n+1)\pi-0}\frac{d(t_3+{}^1/_2t_2)}{dT}=0<\frac{d(t_3+{}^1/_2t_2)}{dT}<\frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{1-\frac{1}{16(n+1)^2}}=$$
$$=\lim_{T\to 2n\pi+0}\frac{d(t_3+{}^1/_2t_2)}{dT}$$

Следующие неравенства являются очевидными

$$\frac{T-2n\pi}{2}>t_1+t_3=\frac{T-2n\pi}{2}-t_2>\frac{T-2n\pi}{2}-\frac{T-2n\pi}{4(n+1)}=$$
$$=\frac{T-2n\pi}{2}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)}>\frac{T-2n\pi}{4}>0$$

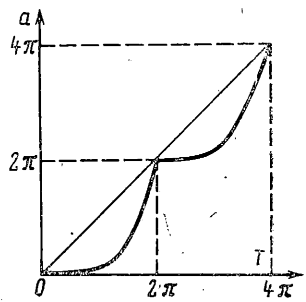
$$\lim_{T\to 2n\pi+0}\frac{d(t_1+t_3)}{dT}=\frac{2n+1}{4(n+1)}<\frac{d(t_1+t_3)}{dT}<\frac{n+2}{2(n+1)}=\lim_{T\to 2(n+1)\pi-0}\frac{d(t_1+t_3)}{dT}$$

Положительность найденных значений t_1, t_3 является следствием неравенств

$$\cos\left(\frac{T-2n\pi}{2}-\frac{t_2}{2}\right)=\cos\left(t_1+t_3+\frac{t_2}{2}\right)<\cos\left(t_3+\frac{t_2}{2}\right)=\frac{|\sin {}^1/_2T|}{4(n+1)\sin {}^1/_2t_2}$$
$$\frac{|\sin {}^1/_2T|}{4(n+1)\sin {}^1/_2t_2}=\cos\left(t_3+\frac{t_2}{2}\right)<\cos\frac{t_2}{2}$$

Итак, предлагаемое управление определено.

На фиг. 5 изображен график функции a по T. Как и для первой задачи, чтобы утверждать оптимальный характер найденного управления, среди трех условий нужно практически проверить только третье.



Фиг. 5

При $a=2n\pi$ $(n=1, 2, \ldots)$, $u(t)\equiv+1$ выберем $C=1$, $|D|+|E|<1$. Тогда третье условие выполняется, так как $u(t)\equiv+1\equiv\mathrm{sing}\,[1-D\cos\times(t-\xi)-E\cos 2(t-\eta)]$. При $2n\pi<a<2(n+1)\pi$ выберем $C=1$, $\xi=\eta=t_1+t_2+t_3$. Тогда

$$P(t)=\gamma_1(t)+\gamma_3(t)+\gamma_5(t)=1-D\cos(t-t_1-t_2-t_3)-E\cos 2(t-t_1-t_2-t_3) \qquad (3.7)$$

Из непрерывности и периодичности функции $P(t)$ нетрудно видеть, что третье условие эквивалентно двум следующим: в интервале $(0, 2\pi)$ уравнение $P(t)=0$ имеет четыре и только четыре корня: $t=t_1$, t_1+t_2, $t_1+t_2+2t_3$, $t_1+2t_2+2t_3$; при $t=t_1+t_2+t_3$ функция $P(t)$ положительна $P(t_1+t_2+t_3)=1-D-E>0$.

Из (3.7) при указанных значениях корней следует система уравнений для D и E:

$$D\cos(t_2+t_3)+E\cos 2(t_2+t_3)=1, \quad D\cos t_3+E\cos 2t_3=1 \qquad (3.8)$$

В силу (3.4) и последнего неравенства (3.6) имеем $\cos t_3 > \cos(t_3+t_2) > 0$, $1+2\cos t_3 \cos(t_3+t_2) > 0$. Тогда из системы (3.8) находим

$$D=\frac{1}{\Delta}[\cos 2t_3-\cos 2(t_3+t_2)]=\frac{2[\cos t_3+\cos(t_3+t_2)]}{1+2\cos t_3\cos(t_3+t_2)}>0$$

$$E=\frac{1}{\Delta}[\cos(t_3+t_2)-\cos t_3]=\frac{-2}{1+2\cos t_3\cos(t_3+t_2)}<0$$

$$\Delta=\cos(t_3+t_2)\cos 2t_3-\cos t_3\cos 2(t_3+t_2)=$$

$$={}^1/_2[\cos t_3-\cos(t_3+t_2)][1+2\cos t_3\cos(t_3+t_2)]>0$$

Другие корни в интервале $(0, 2\pi)$ не существуют, поскольку $0<t_1+2t_2+2t_3<2(t_1+t_2+t_3)<{}^1/_2(T-2n\pi)<2\pi$ и $P=0$ является алгебраическим уравнением второго порядка относительно $\cos(t-t_1-t_2-t_3)$.

Условие положительности функции очевидно:

$$1-D-E=\frac{1+2[1-\cos t_3][1-\cos(t_3+t_2)]}{1+2\cos t_3\cos(t_3+t_2)}>0$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. *Баничук Н. В., Черноусько Ф. Л.* Определение оптимальных и квазиоптимальных управлений в одной колебательной механической системе.– Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2, с. 3–9.
3. *Нгуен Ван Динь.* Об оптимальном перемещении маятника.– Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 6, с. 58–62.
4. *Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л.* Об оптимальном перемещении висящего груза.– Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4, с. 26–33.
5. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
6. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Об управлении системами с упругими элементами.– ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 22–31.

Ханой

Поступила в редакцию
31.V.1982