МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1985

УДК 531.383

КОРРЕКЦИЯ СИСТЕМЫ «ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ИЗМЕРИТЕЛЬ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ — ГИРОСТАБИЛИЗАТОР»

ТКАЧЕНКО А. И.

В [1] указан метод калибровки и уточнения ориентации пространственного измерителя угловой скорости, установленного на движущемся объекте, с использованием точной угловой информации о положении некоторого связанного с объектом координатного трехгранника. В публикуемой работе аналогичная задача решается при условии, что упомянутая угловая информация получается с малыми погрешностями известного вида, которые необходимо оценить одновременно с погрешностями пространственного измерителя угловой скорости. Получено условие разрешимости этой задачи. Рассматриваются также влияние ошибок съема (считывания) первичной информации на точность калибровки и коррекции и возможности уменьшения этого влияния.

1. Свяжем с недеформируемым подвижным объектом ортонормированный базис $E(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. На объекте установлен пространственный измеритель угловой скорости, предназначенный для измерения координат ω_1, ω_2, ω_3 вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости объекта в базисе E. Нормированный кватернион Λ, характеризующий ориентацию базиса E относительно ортонормированного инерциального базиса I $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, удовлетворяет уравнению $\Lambda_E^{\boldsymbol{\cdot}}={}^1/{}_2\Lambda_E\circ\boldsymbol{\omega}_E$. (Нижним индексом отмечается отображение кватерниона или вектора на соответствующий базис). В действительности показания упомянутого измерителя вместо $\boldsymbol{\omega}_E$ образуют вектор $\boldsymbol{\omega}_E^*=\omega_1^*\mathbf{i}_1+\omega_2^*\mathbf{i}_2+\omega_3^*\mathbf{i}_3=\boldsymbol{\omega}_E+\Delta\boldsymbol{\omega}_E$, где $\Delta\boldsymbol{\omega}_E$ — малый вектор погрешностей измерений. Кроме того, начальное значение $\Lambda(t_0)$ в момент $t=t_0$ задано с малой ошибкой. Поэтому вместо Λ_E вычисляется нормированный кватернион M_E, который задает ориентацию базиса E относительно близкого к I медленно вращающегося ортонормированного базиса K и удовлетворяет уравнению

$$M_E^{\boldsymbol{\cdot}}={}^1/{}_2M_E\circ\boldsymbol{\omega}_E^* \tag{1.1}$$

На объекте находится гироскопическое устройство, предназначенное для стабилизации положения базиса I в пространстве и определения ориентации связанного с объектом ортонормированного базиса J относительно I путем измерения соответствующих углов Эйлера φ_1, φ_2, φ_3. Взаимная ориентация базисов E и J известна лишь в первом приближении. Вследствие неидеальности названного устройства его стабилизируемый элемент поворачивается с малой абсолютной угловой скоростью $\delta\boldsymbol{\omega}(t)$, воспроизводя положение близкого к I ортонормированного базиса L. В некоторый известный момент $t_*\leqslant t_0$ базис L совмещен с I. Пусть

$$\Delta\boldsymbol{\omega}_E=D(\boldsymbol{\omega}_E, t)\mathbf{c}, \quad \delta\boldsymbol{\omega}_L=G(t)\mathbf{d}, \quad \mathbf{c}^{\boldsymbol{\cdot}}=0, \quad \mathbf{d}^{\boldsymbol{\cdot}}=0 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ — неизвестные малые векторы размерностей $3m$ и $3n$ соответственно; D — матрица известного вида с размерами $3\times3m$, непрерывно дифференцируемая по t и компонентам вектора $\boldsymbol{\omega}_E$, которые, в свою очередь, непрерывно дифференцируемы по t почти всюду на промежутке $T=[t_0, t_f]$, $G(t)$ — матрица с размерами $3\times3n$, зависящая известным образом от t и непрерывно дифференцируемая почти всюду на T. Необходимо, используя измерения ω_E и φ_1, φ_2, φ_3 на T, уточнить значение $\Lambda_E(t_f)$ и оценить векторы $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$.

2. Ориентацию базиса J относительно I охарактеризуем нормированным кватернионом $N_J{}^\circ(t)=N_I{}^\circ(t)$. Изменение ориентации объекта в пространстве в течение промежутка $[t_0, t]$ определяется нормированным кватернионом $P_I{}^\circ=p_0{}^\circ+\mathbf{p}^\circ=N_J{}^\circ(t)\circ\overline{N}_J{}^\circ(t_0)$, заданным в базисе I. (Чертой отмечается сопряженный кватернион.) По значениям углов φ_1, φ_2, φ_3, отсчитываемых от «дрейфующего» базиса L, может быть найден нормированный кватернион $N_J(\varphi)=N_L(\varphi)$, задающий ориентацию базиса J относительно L. Здесь $\varphi^T=[\varphi_1\varphi_2\varphi_3]$, индекс T означает транспонирование. Положим

$$N_J{}^\circ(t)\approx(1+\mathbf{v})\circ N_J(\varphi) \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{v}=\mathbf{v}_L(t)$ — малый вектор, характеризующий отклонение базиса L от I. Примем вначале $t_*=t_0$; тогда $N_J(\varphi_0)=N_J(\varphi(t_0))=N_J{}^\circ(t_0)$ и $\mathbf{v}(t_0)=0$. Так как $N_J{}^{\circ\cdot}={}^1/_2N_J{}^\circ\circ\omega_J$ и $N_J{}^\cdot={}^1/_2(N_J\circ\omega_J{}^*-\delta\omega_L\circ N_J)$, то в первом приближении $\mathbf{v}^\cdot={}^1/_2\delta\omega_L$:

$$\mathbf{v}(t)={}^1/_2\Psi(t,t_0)\mathbf{d},\qquad \Psi(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}G(t)\,dt \tag{2.2}$$

Сформируем кватернион $P=p_0+\mathbf{p}=N_J(\varphi)\circ\overline{N}_J(\varphi_0)$. Из (2.1) следует $P\approx(1-\mathbf{v})\circ P_I{}^\circ$. Переходя от умножения кватернионов к операциям над их векторными и скалярными частями [2] и пренебрегая величинами выше первого порядка малости, получим

$$\mathbf{p}^\circ=\mathbf{p}+p_0{}^\circ\mathbf{v}-\mathbf{p}^\circ\times\mathbf{v} \tag{2.3}$$

Положим $\Lambda_E(t)\approx[1+\mathbf{w}(t)]\circ M_E(t)$, где $\mathbf{w}=\mathbf{w}_K$ — малый вектор, характеризующий отклонение базиса K от I. В первом приближении [1]:

$$\mathbf{w}^\cdot=-{}^1/_2A^T\Delta\omega_E,\qquad \mathbf{w}=\mathbf{w}_0-{}^1/_2\Theta(t)\mathbf{c}$$

$$\mathbf{w}_0=\mathbf{w}(t_0),\quad \Theta(t)=\int_{t_0}^{t}B^TD(\omega_E{}^*,t)\,dt \tag{2.4}$$

Матрицы A и B с размерами 3×3 задают соответственно преобразования $\mathbf{r}_E=A\mathbf{r}_I=\overline{\Lambda}\circ\mathbf{r}_I\circ\Lambda$ и $\mathbf{r}_E=B\mathbf{r}_K=\overline{M}\circ\mathbf{r}_K\circ M$. Элементы матрицы B однозначно выражаются через вычисленные компоненты M_E. Найдем кватернион $P^*=p_0{}^*+\mathbf{p}^*=M_E(t)\circ\overline{M}_E(t_0)$. Так как $P_I{}^\circ=\Lambda_E(t)\circ\overline{\Lambda}_E(t_0)$, то с принятой точностью [1]:

$$\mathbf{p}^\circ=\mathbf{p}^*+p_0{}^\circ[\mathbf{w}(t)-\mathbf{w}_0]+\mathbf{p}^\circ\times[\mathbf{w}(t)+\mathbf{w}_0] \tag{2.5}$$

Сравнивая (2.3) и (2.5), получим

$$\mathbf{z}(t,t_0)=\mathbf{p}^*-\mathbf{p}=p_0{}^\circ[\mathbf{v}(t)-\mathbf{w}(t)+\mathbf{w}_0]-\mathbf{p}^\circ\times[\mathbf{v}(t)-\mathbf{w}(t)-\mathbf{w}_0] \tag{2.6}$$

Используем выражения (2.2), (2.4):

$$2\Phi(\mathbf{p})\mathbf{w}_0+{}^1/_2[p_0E_3-\Phi(\mathbf{p})][\Theta(t)\mathbf{c}+\Psi(t,t_0)\mathbf{d}]=\mathbf{p}^*-\mathbf{p} \tag{2.7}$$

Здесь E_3 — единичная матрица с размерами 3×3; $\Phi(\mathbf{r})$ — кососимметрическая матрица с размерами 3×3, сопоставляемая вектору $\mathbf{r}=[r_1r_2r_3]^T$ [1].

3. Будем считать систему «пространственный измеритель угловой скорости — гиростабилизатор» (для краткости — систему (1.2), (2.4)) полностью наблюдаемой на промежутке T по функции (2.6), если любая совокупность векторов $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ однозначно определяется по соответствующим значениям $\mathbf{z}(t,t_0)$ при $t\in T$. Полная наблюдаемость системы (1.2), (2.4) на T по функции (2.6) имеет место тогда и только тогда,

если тождество $\mathbf{z}(t, t_0)=0$ $(t\in T)$ не удовлетворяется никакой совокупностью постоянных векторов $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, не равных одновременно нулю [3].

Рассмотрим конструкцию, аналогичную (2.6):

$$\mathbf{z}(t+\Delta t, t)=p_0^\circ[\mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t)-\mathbf{w}(t+\Delta t)+\mathbf{w}(t)]-$$
$$-\mathbf{p}^\circ\times[\mathbf{v}(t+\Delta t)+\mathbf{v}(t)-\mathbf{w}(t+\Delta t)-\mathbf{w}(t)]$$

Здесь кватернион $P_I^\circ=p_0+\mathbf{p}$ характеризует изменение ориентации объекта в течение промежутка $[t+\Delta t, t]$. Так как $p_0^\circ\to1$ и $(\Delta t)^{-1}\mathbf{p}^\circ\to{}^1/_2\boldsymbol{\omega}_I$ при $\Delta t\to0$, то, учитывая (2.4) и равенство $A^\cdot=-\Phi(\boldsymbol{\omega}_E)A$, находим

$$\mathbf{s}(t)=A(t)\lim_{\Delta t\to0}[(\Delta t)^{-1}\mathbf{z}(t+\Delta t,t)]=\Phi(\boldsymbol{\omega}_E)A(\mathbf{w}-\mathbf{v})+$$
$$+{}^1/_2(\Delta\boldsymbol{\omega}_E+A\delta\boldsymbol{\omega}_L)=(d/dt)[A(t)\mathbf{v}-\mathbf{w}]$$

Тождество $\mathbf{z}(t, t_0)\equiv0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbf{s}(t)\equiv0$ при $t\in T$. Поскольку, кроме того, функции $\mathbf{s}(t)$ и $\mathbf{y}(t)=\mathbf{s}(t)+\int\limits_{t_0}^{t}\mathbf{s}(t)dt=$ $=\Phi(\boldsymbol{\omega}_E)A(t_0)\mathbf{w}_0+{}^1/_2[\Delta\boldsymbol{\omega}_E+A(t)\delta\boldsymbol{\omega}_L]$ взаимно однозначны [1], то система (1.2), (2.4) полностью наблюдаема на T по функции (2.6) тогда и только тогда, если она полностью наблюдаема на T по функции $\mathbf{y}(t)$, т. е. если существуют точки $t_1,\ldots,t_r\in T$ $(r\geqslant m+n+1)$, такие, что

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix}\Phi(\boldsymbol{\omega}_1) & D(\boldsymbol{\omega}_1,t_1) & A(t_1)G(t_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \Phi(\boldsymbol{\omega}_r) & D(\boldsymbol{\omega}_r,t_r) & A(t_r)G(t_r)\end{bmatrix}=3(m+n+1) \qquad (3.1)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}_j=\boldsymbol{\omega}_E(t_j)$ $(j=1,\ldots,r)$. Если условие (3.1) выполняется, то по значениям $\boldsymbol{\omega}_E^*$, φ, $\Theta(t)$, $\Psi(t, t_0)$, полученным при $t\in T$, может быть сформирована система уравнений (2.7), имеющая единственное решение $\mathbf{w}_0^*$, $\mathbf{c}^*$, $\mathbf{d}^*$, которое является оценкой соответствующих векторов в первом приближении. Последовательность операций по вычислению $\mathbf{w}(t_f, \mathbf{w}_0^*, \mathbf{c}^*)$ и уточнению $\Lambda_E(t_f)$ очевидна.

Так как в окрестности возможных точек неоднозначности $\varphi(t)$ малые значения $\mathbf{d}$ могут приводить к большим ошибкам измерения φ, эти точки должны быть исключены при формировании уравнений (2.7).

Если $t_*<t_0$, то посредством указанных выше действий уточняется ориентация базиса E относительно положения, занимаемого базисом L при $t=t_0$. Затем с использованием матрицы $\Psi(t_0, t_*)$, вычисленной по аналогии с (2.2), оценивается вектор $\mathbf{v}(t_0)={}^1/_2\Psi(t_0, t_*)\mathbf{d}$, характеризующий отклонение базиса L от I при $t=t_0$, и вводится соответствующая поправка в значение $\Lambda_E(t_f)$.

4. В простейшем случае $m=n=1$, $D=G=E_3$ условие (3.1) выполняется если найдутся точки t_1, t_2, t_3, $t_4\in T$, такие, что

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix}\Phi(\boldsymbol{\omega}_2)-\Phi(\boldsymbol{\omega}_1) & A_2-A_1\\ \Phi(\boldsymbol{\omega}_3)-\Phi(\boldsymbol{\omega}_1) & A_3-A_1\\ \Phi(\boldsymbol{\omega}_4)-\Phi(\boldsymbol{\omega}_1) & A_4-A_1\end{bmatrix}=6 \qquad (4.1)$$

Здесь $A_i=A(t_i)$ $(i=1, 2, 3, 4)$. Введем представление $A_j=S(t_j, t_1)A_1$ $(j=2, 3, 4)$, $S(t_j, t_1)=E_3+\Phi(\mathbf{v}_j)\sin\alpha_j+(1-\cos\alpha_j)\Phi^2(\mathbf{v}_j)$, где α_j и $\mathbf{v}_j=\mathbf{v}_{jE}$ — соответственно величина и орт вектора ориентации [4], характеризующего изменение положения объекта в течение промежутка $[t_1, t_j]$. Условие (4.1) удовлетворяется в том и только том случае, если три равенства

$$(\boldsymbol{\omega}_j-\boldsymbol{\omega}_1)\times\boldsymbol{\omega}+\mathbf{v}_j\times\mathbf{v}\sin\alpha_j+\mathbf{v}_j\times(\mathbf{v}_j\times\mathbf{v})(1-\cos\alpha_j)=0 \qquad (4.2)$$

не выполняются одновременно ни при каких трехмерных векторах $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{v}$, не равных одновременно нулю. Если векторы $\mathbf{v}_j\times(\boldsymbol{\omega}_j-\boldsymbol{\omega}_1)$ $(j=2, 3, 4)$ линейно независимы, то равенства (4.2) не выполняются одновременно ни при каком $\boldsymbol{\omega}\neq0$. Если же линейно независимы три вектора $(\boldsymbol{\omega}_j-\boldsymbol{\omega}_1)\times$ $\times\mathbf{v}_j\sin\alpha_j+[(\boldsymbol{\omega}_j-\boldsymbol{\omega}_1)\times\mathbf{v}_j]\times\mathbf{v}_j(1-\cos\alpha_j)$, то равенства (4.2) не выполняются одновременно ни при каком $\mathbf{v}\neq 0$. Одновременное соблюдение двух последних предположений, теоретически вполне осуществимое, является достаточным для выполнения условия (3.1) в рассмотренном случае.

5. Пусть в формулах численного интегрирования уравнения (1.1) фигурируют величины

$$\boldsymbol{\theta}_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{\omega}_E^*\,dt=\theta_{1,k}\mathbf{i}_1+\theta_{2,k}\mathbf{i}_2+\theta_{3,k}\mathbf{i}_3$$

$$(t_k=t_{k-1}+h,\quad 0<h\ll 1,\quad k=1,2,\ldots)$$

Квантованные по уровню сигналы пространственного измерителя угловой скорости имеют вид импульсов фиксированной малой цены $\sigma>0$. Очередной импульс информации ω_i^* ($i=1, 2, 3$) с соответствующим знаком поступает в момент, когда абсолютная величина приращения интеграла от ω_i^* с момента поступления предыдущего импульса достигает σ. Значение $\theta_{i,k}$ аппроксимируется суммой $\theta_{i,k}^*$ всех импульсов информации о ω_i^*, поступивших в течение промежутка $[t_{k-1}, t_k]$. Если $\tau_{i,k}$ — момент поступления последнего на промежутке $[t_{k-1}, t_k]$ импульса информации ω_i^*, то

$$\theta_{i,k}^*=\int_{\tau_{i,k-1}}^{\tau_{i,k}}\omega_i^*\,dt=\theta_{i,k}+\Delta\theta_{i,k-1}-\Delta\theta_{i,k},\qquad \Delta\theta_{i,k}=\int_{\tau_{i,k}}^{t_k}\omega_i^*\,dt \tag{5.1}$$

Здесь $\Delta\theta_{i,k}$ — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-\sigma, 0]$ при $\omega_i^*(t_k)<0$ или в интервале $[0, \sigma]$ — при $\omega_i^*(t_k)>0$. Поэтому $\mu(\Delta\theta_{i,k})={}^1\!/_2\sigma\,\mathrm{sign}\,\omega_i^*(t_k)$, где $\mu(a)$ — математическое ожидание случайной величины a. Поскольку все ошибки определения ориентации базиса E относительно L при $t=t_0$, независимо от происхождения, учитываются значением w_0, то $\Delta\theta_{i,0}=0$.

Обозначим $\delta\theta_{i,k}=\theta_{i,k}^*-\theta_{i,k}$. Из (5.1) следует, что $\mu(\delta\theta_{i,k})=0$ при $\omega_i^*(t_{k-1})\omega_i^*(t_k)>0$; если же $\omega_i^*(t_{k-1})\omega_i^*(t_k)<0$, то $\mu(\delta\theta_{i,k})=-\sigma\,\mathrm{sign}\,\omega_i^*(t_k)$. Так как направления орта $\mathbf{e}_i$ в последовательные моменты изменения знака ω_i^* в общем случае не совпадают, то вследствие неперестановочности конечных поворотов [5] возникает ошибка определения ориентации базиса E — ошибка некоммутативности, не учтенная в (2.7). Если, однако, промежуток $[t_0, t_f]$ достаточно краток, то влияние накопленной ошибки некоммутативности на точность оценки векторов $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ незначительно по сравнению с влиянием локальных ошибок $\Delta\boldsymbol{\theta}(t)=\Delta\theta_{1,k}\mathbf{i}_1+\Delta\theta_{2,k}\mathbf{i}_2+\Delta\theta_{3,k}\mathbf{i}_3$ в моменты формирования уравнений (2.7). Если пренебречь накопленной ошибкой некоммутативности, то при $\Delta\boldsymbol{\theta}(t)\neq 0$ вместо M вычисляется нормированный кватернион M^*, а числовой образ базиса E отклоняется в положение ортонормированного базиса F, так что

$$M_F^*(t)=M_E(t)\circ Q_F(t),\qquad Q_F\approx 1+\mathbf{q}_F,\qquad \mathbf{q}_F(t)=\mathbf{q}_E(t)={}^1\!/_2\Delta\boldsymbol{\theta}(t) \tag{5.2}$$

Кватернион Q характеризует отклонение базиса F от E. Из (5.2) следует $M_F^*(t)=Q_K(t)\circ M_E(t)$, $Q_K=M_E\circ Q_F\circ\overline{M}_E=1+\mathbf{q}_K$, $\mathbf{q}_K(t)=B^T(t)\mathbf{q}_F(t)$. Так как $\Delta\theta_{1,k}$, $\Delta\theta_{2,k}$, $\Delta\theta_{3,k}$ в общем случае некоррелированы, то

$$\mu(\mathbf{q}_K)=-{}^1\!/_4\sigma\boldsymbol{\rho}(t),\quad R(\mathbf{q}_K)={}^1\!/_{12}\sigma^2E_3,$$

$$\boldsymbol{\rho}^T(t)=[\mathrm{sign}\,\omega_1^*(t),\ \mathrm{sign}\,\omega_2^*(t),\ \mathrm{sign}\,\omega_3^*(t)] \tag{5.3}$$

Здесь $R(\mathbf{r})$ — корреляционная матрица случайного вектора $\mathbf{r}$. Вместо P^* вычисляется кватернион $P'=p_0'+\mathbf{p}'$:

$$P'=M_F^*(t)\circ\overline{M}_E(t_0)=Q_K(t)\circ P^*$$

Используя вместо $\mathbf{p}^*$ вектор $\mathbf{p}'\approx\mathbf{p}^*+p_0{}^*\mathbf{q}_K-\mathbf{p}^*\times\mathbf{q}_K$, получим вместо (2.7) уравнение

$$\mathbf{z}(t,\ t_0)=\mathbf{z}'(t)+\delta\mathbf{z},\qquad \delta\mathbf{z}=[E_3p_0-\Phi(p)]\mathbf{q}_K \tag{5.4}$$

Здесь $z(t,\ t_0)$ — левая часть уравнения (2.7); $\mathbf{z}'(t)=\mathbf{p}'-\mathbf{p}$. Из (5.3) следует $\mu(\delta\mathbf{z})=-{}^1/_4\sigma[E_3p_0-\Phi(\mathbf{p})]\boldsymbol{\rho}$.

Для получения центрированной невязки $\delta\mathbf{z}$ положим

$$\mathbf{z}'(t)=\mathbf{p}'-\mathbf{p}+{}^1/_4\sigma[E_3p_0-\Phi(p)]B^T\boldsymbol{\rho}_* \tag{5.5}$$

где $\boldsymbol{\rho}_*{}^T=[\operatorname{sign}\overset{*}{\theta}_{1,k},\operatorname{sign}\overset{*}{\theta}_{2,k},\operatorname{sign}\overset{*}{\theta}_{3,k}]$. Тогда в (5.4)

$$\mu(\delta\mathbf{z})=0,\qquad R(\delta\mathbf{z})={}^1/_{48}[p_0E_3-\Phi^2(\mathbf{p})]\sigma^2$$

Иной путь получения несмещенной невязки $\delta\mathbf{z}$ — использование при интегрировании уравнения (1.1) вместо $\theta_{i,k}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ величин

$$\overset{\circ}{\theta}_{i,k}=\overset{*}{\theta}_{i,k}+{}^1/_2\sigma(\operatorname{sign}\overset{*}{\theta}_{i,k}-\operatorname{sign}\overset{*}{\theta}_{i,k-1})\qquad(\operatorname{sign}\overset{*}{\theta}_{i,0}=0) \tag{5.6}$$

Этот прием позволяет также уменьшить упоминавшуюся ошибку некоммутативности на больших интервалах вычислений.

Систему уравнений (5.4) для моментов $t_j\in T$ $(j=1,\dots,\ r\gg m+n+1)$, таких, что $p_0(t_j)=p_{0j}\neq0$, представим в виде

$$U\mathbf{x}=\mathbf{Z}^*=\mathbf{Z}+\delta\mathbf{Z},\qquad \mathbf{x}^T=[\mathbf{w}_0{}^T\mathbf{c}^T\mathbf{d}^T] \tag{5.7}$$

$$U=\begin{bmatrix}2\Phi(\mathbf{p}_1) & \Gamma(t_1)\Theta(t_1) & \Gamma(t_1)\Psi(t_1,t_0)\\ \dots & \dots & \dots\\ 2\Phi(\mathbf{p}_r) & \Gamma(t_r)\Theta(t_r) & \Gamma(t_r)\Psi(t_r,t_0)\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}^T=[\mathbf{z}_1{}'^T(t_1)\ \dots\ \mathbf{z}_1{}'^T(t_r)],\qquad \delta\mathbf{Z}^T=[\delta\mathbf{z}^T(t_1)\ \dots\ \delta\mathbf{z}^T(t_r)]$$

$$\Gamma(t_j)={}^1/_2[p_{0j}E_3-\Phi(\mathbf{p}_j)],\qquad \mathbf{p}_j=\mathbf{p}(t_j)$$

Условие (3.1) гарантирует возможность удовлетворить требование $\operatorname{rang}U=3(m+n+1)$. При достаточно малом σ векторы $\Delta\boldsymbol{\theta}(t_k)$, $\Delta\boldsymbol{\theta}(t_l)$ $(t_k\neq t_l)$ практически не коррелированы. Поэтому $R(\delta\mathbf{Z})$ — квазидиагональная матрица с блоками $R[\delta\mathbf{z}(t_j)]$ на главной диагонали. Если каждое уравнение (5.4) умножить слева на соответствующую матрицу $[p_0E_3-\Phi(\mathbf{p})]^{-1}=p_0{}^{-1}[E_3+p_0\Phi(\mathbf{p})+\Phi^2(\mathbf{p})]$, то решение полученной таким образом системы методом наименьших квадратов эквивалентно решению исходной системы (5.7) методом минимизации среднеквадратической ошибки [6]. Однако в силу отмеченной структуры матрицы $R(\delta\mathbf{Z})$ решение системы (5.7) методом минимизации среднеквадратической ошибки при $r\gg m+n+1$ практически не превосходит по точности решение этой системы методом наименьших квадратов, которое получается как единственное в данном случае решение уравнения $U^TUx=U^TZ^*$ [7]. Подчеркнем, что матрица U^TU и вектор U^TZ^* могут быть вычислены с помощью последовательных итераций вида [8]:

$$(U^TU)_s=(U^TU)_{s-1}+u_s{}^Tu,\qquad (U^TZ^*)_s=(U^TZ^*)_{s-1}+u_s{}^Tz_s{}^* \tag{5.8}$$

Здесь $s=1,\dots,\ 3r$ — номер итерации, u_s и z_s — соответственно s-я строка матрицы U и s-й скалярный элемент вектора Z^*; $(U^TU)_0=0$, $(U^TZ^*)_0=0$. Поэтому нет необходимости запоминать коэффициенты уравнений (5.4) до момента t_r.

6. Моделирование процесса коррекции системы «пространственный измеритель угловой скорости — гиростабилизатор» было выполнено при следующих условиях:

$$m=3,\qquad n=1,\qquad D=[D_{\mathrm{I}}D_{\mathrm{II}}E_3],\qquad G=E_3$$

$$D_{\mathrm{I}}=\operatorname{diag}[\omega_1,\omega_2,\omega_3],\qquad D_{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix}\omega_2 & 0 & \omega_3\\ \omega_1 & \omega_3 & 0\\ 0 & \omega_2 & \omega_1\end{bmatrix}$$

$$t_0=t_*=0, \quad t_f=30\text{ c}, \quad h=0{,}02\text{ c}$$
$$\Lambda(0)=0{,}64+0{,}48\mathbf{i}_1+0{,}36\mathbf{i}_2-0{,}48\mathbf{i}_3$$
$$w_1(0)=w_2(0)=w_3(0)=10^{-3}$$
$$c_1=c_2=c_3=3\cdot10^{-4}, \quad c_4=c_5=-c_6=5\cdot10^{-4}$$
$$c_7=-c_8=-c_9=10^{-5}\text{ c}^{-1}, \quad d_1=d_2=d_3=10^{-6}\text{ c}^{-1}$$

Составляющие вектора $\boldsymbol{\omega}_E$ задавались следующими значениями

t, c	ω_1, c^{-1}	ω_2, c^{-1}	ω_3, c^{-1}
$0\leqslant t\leqslant5$	0,01	0,02	−0,01
$5<t\leqslant10$	0,02	0,32	−0,015
$10<t\leqslant15$	0,01	0,01	−0,02
$15<t\leqslant20$	0,16	0,015	−0,03
$20<t\leqslant25$	0,03	0,017	−0,16
$25<t\leqslant30$	0,02	0,02	−0,02

«Самолетные» углы — рысканье φ_1, тангаж φ_2, крен φ_3 [5] — вычислялись с начальными условиями $\varphi_0^T=[-0{,}5;\ 0{,}17;\ -0{,}6]$. Интегрирование уравнения (1.1) выполнялось с шагом $H=2h$ с помощью формул, имеющих ошибку на шаге порядка H^5. Квадратуры в (2.4) вычислялись с шагом $H=2h$ по формулам, имеющим ошибку на шаге порядка H^3. Уравнения (5.4) формировались в моменты $t_1=4$ c, $t_2=4{,}2$ c, ..., $t_{j+1}=t_j+0{,}2$ c, ..., $t_r=t_f$. Соответствующая система (5.7) решалась методом наименьших квадратов с использованием операций (5.8). Вектор $\mathbf{w}°$, характеризующий ошибку определения ориентации базиса E после коррекции, находился, как в [1]. При отсутствии квантования величин $\theta_{i,k}$ по уровню были получены следующие значения $\mathbf{w}°$ и компонент векторов ошибок $\delta\mathbf{c}=\mathbf{c}^*-\mathbf{c}$, $\delta\mathbf{d}=\mathbf{d}^*-\mathbf{d}$: $\mathbf{w}°=10^{-5}(-0{,}67\mathbf{i}_1+0{,}32\mathbf{i}_2-1{,}3\mathbf{i}_3)$, $\delta c_1=-5{,}9\cdot10^{-7}$, $\delta c_2=-5{,}8\cdot10^{-6}$, $\delta c_3=-1{,}4\cdot10^{-5}$, $\delta c_4=6\cdot10^{-6}$, $\delta c_5=-3{,}7\cdot10^{-6}$, $\delta c_6=-2{,}4\cdot10^{-8}$, $\delta c_7=-4{,}1\cdot10^{-7}$ c^{-1}, $\delta c_8=1{,}4\cdot10^{-7}$ c^{-1}, $\delta c_9=-1{,}5\cdot10^{-7}$ c^{-1}, $\delta d_1=-2{,}2\cdot10^{-7}$ c^{-1}, $\delta d_2=2{,}1\cdot10^{-7}$ c^{-1}, $\delta d_3=-2{,}5\cdot10^{-7}$ c^{-1}.

С учетом квантования величин $\theta_{i,k}$ при $\sigma=2\cdot10^{-5}$ без использования операций центрирования невязки $\delta\mathbf{z}$ были получены ошибки $\mathbf{w}°=10^{-5}(-2\mathbf{i}_1+0{,}5\mathbf{i}_2-3{,}2\mathbf{i}_3)$, $\delta c_1=9{,}6\cdot10^{-6}$, $\delta c_2=-2{,}7\cdot10^{-6}$, $\delta c_3=-9{,}7\cdot10^{-6}$, $\delta c_4=1{,}8\cdot10^{-5}$, $\delta c_5=-1{,}6\cdot10^{-5}$, $\delta c_6=-2{,}8\cdot10^{-6}$, $\delta c_7=-1{,}2\cdot10^{-6}$ c^{-1}, $\delta c_8=-2{,}1\cdot10^{-6}$ c^{-1}, $\delta c_9=1{,}9\cdot10^{-6}$ c^{-1}, $\delta d_1=-6{,}7\cdot10^{-8}$ c^{-1}, $\delta d_2=2\cdot10^{-7}$ c^{-1}, $\delta d_3=1{,}1\cdot10^{-6}$ c^{-1}.

В тех же условиях при использовании формул центрирования невязок (5.5) или (5.6) ошибки оценок и коррекции приняли значения $\mathbf{w}°=10^{-5}(1{,}7\mathbf{i}_1+0{,}83\mathbf{i}_2-1{,}4\mathbf{i}_3)$, $\delta c_1=4{,}5\cdot10^{-6}$, $\delta c_2=-9{,}4\cdot10^{-6}$, $\delta c_3=-1{,}8\cdot10^{-5}$, $\delta c_4=4{,}9\cdot10^{-6}$, $\delta c_5=-5{,}1\cdot10^{-6}$, $\delta c_6=8{,}7\cdot10^{-7}$, $\delta c_7=-3{,}8\cdot10^{-7}$ c^{-1}, $\delta c_8=1{,}6\cdot10^{-7}$ c^{-1}, $\delta c_9=-1{,}8\cdot10^{-7}$ c^{-1}, $\delta d_1=2{,}9\cdot10^{-7}$ c^{-1}, $\delta d_2=-1{,}1\cdot10^{-7}$ c^{-1}, $\delta d_3=-1{,}4\cdot10^{-7}$ c^{-1}.

В последнем случае ошибки оценок и коррекции приблизились к значениям ошибок при неквантованной первичной информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ткаченко А. И.* Определение ориентации и калибровка пространственного измерителя угловой скорости. Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 3, с. 19–23.
2. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 319 с.
3. *Д"Анжело Г.* Линейные системы с переменными параметрами. Анализ и синтез. М.: Машиностроение, 1974. 288 с.
4. *Bortz J. E.* A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation.— IEEE Trans. Aerospace and Electronic Syst., 1971, 7, N 1, p. 61–66.
5. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
6. *Браммер К., Зиффлинг Г.* Фильтр Калмана – Бьюси. М.: Наука, 1982. 200 с.
7. *Эльясберг П. Е.* Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976. 416 с.
8. *McCaskill T., Buisson J., Buonaguro A.* A sequential range navigation algorithm for a medium attitude navigation satellite.— Navigation, 1976, 23, N 2, p. 164–177.

Киев

Поступила в редакцию
9.XI.1983