

УДК 531.55:521.2

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА
ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС
В РЕЖИМЕ ОДНООСНОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ОРИЕНТАЦИИ

САЗОНОВ В. В., СИДОРЮК М. Е.

Рассматривается движение спутника относительно центра масс под действием гравитационного момента на круговой орбите, описываемое автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка. Предполагается, что отношение среднего момента инерции спутника к его минимальному моменту инерции велико и рассматриваемая система содержит малый параметр. Аналитическими и численными методами исследованы симметричные периодические решения этой системы, близкие периодическим решениям соответствующей порождающей системы. Некоторые из найденных решений описывают периодические колебания или вращения спутника вокруг оси минимального момента инерции, направленной приблизительно вдоль радиус-вектора центра масс спутника относительно притягивающего центра. Предлагается использовать такие движения для реализации режима одноосной гравитационной ориентации спутника.

1. На круговой орбите движение спутника, представляющего собой твердое тело, относительно центра масс под действием гравитационного момента описывается уравнениями [1]:

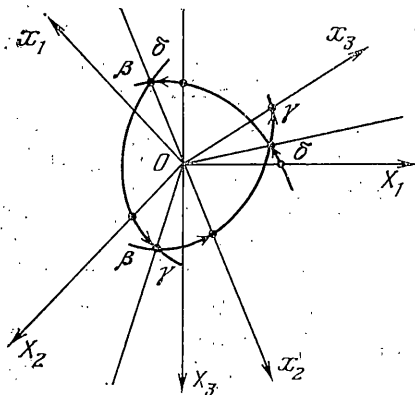
$$\begin{aligned} \omega_1 \dot{} &= \mu (\omega_2 \omega_3 - 3a_{32}a_{33}) \\ \omega_2 \dot{} &= (1-\lambda) (\omega_1 \omega_3 - 3a_{31}a_{33}) / (1+\lambda\mu) \\ \omega_3 \dot{} &= -(1-\lambda+\lambda\mu) (\omega_1 \omega_2 - 3a_{31}a_{32}) \\ \gamma \dot{} &= \omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma) \\ \delta \dot{} &= (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma) / \cos \beta - 1 \\ \beta \dot{} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени t , в единицах которого период обращения спутника по орбите равен 2π , $\lambda = A/C$, $\mu = (B-C)/A$, A , B и C — моменты инерции спутника относительно его главных центральных осей инерции Ox_1 , Ox_2 и Ox_3 , ω_1 , ω_2 , ω_3 — отнесенные к угловой скорости орбитального движения компоненты абсолютной угловой скорости спутника в системе координат $Ox_1x_2x_3$, γ , δ и β — углы (фиг. 1), задающие ориентацию системы $Ox_1x_2x_3$ относительно орбитальной системы координат $OX_1X_2X_3$ (ось OX_3 направлена вдоль радиус-вектора точки O в сторону от притягивающего центра, ось OX_1 направлена по касательной к орбите в сторону движения спутника, ось OX_2 дополняет систему до правой), $a_{31} = -\cos \delta \cos \beta$, $a_{32} = -\sin \delta \sin \gamma + \cos \delta \sin \beta \cos \gamma$, $a_{33} = -\sin \delta \cos \gamma - \cos \delta \sin \beta \sin \gamma$ — направляющие косинусы оси Ox_3 в системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Углы δ и β задают положение оси Ox_1 в орбитальной системе координат, а угол γ — поворот спутника вокруг этой оси. Физически допустимые значения параметров λ и μ лежат в интервалах $0 \leq \lambda \leq 2/(1-\mu)$, $-1 \leq \mu \leq 1$.

Эти неравенства следуют из «неравенств треугольника» $A+B \geq C$, $B+C \geq A$, $C+A \geq B$ для моментов инерции спутника.

Далее считается, что λ мало (при $\lambda=0$ спутник вырождается в стержень с осью Ox_1), и исследуются периодические решения системы (1.1), описывающие колебательные и вращательные движения спутника вокруг оси Ox_1 , направленной приблизительно антипараллельно оси Ox_3 . Такие движения можно считать номинальными невозмущенными движениями вытянутого спутника в режиме одноосной гравитационной ориентации [2, 3]. При $\lambda \ll 1$ существование иско-



Фиг. 1

мых периодических решений будет доказано методом Пуанкаре [4]. Затем при помощи численных расчетов эти решения будут построены при конечных значениях λ . Публикуемая работа является продолжением работ [2, 3], в которых указанные выше периодические решения системы (1.1) были исследованы при $|\mu| \ll 1$.

2. Для решения поставленных задач вместо переменных ω_2, ω_3 введем переменные $\Omega_2 = \omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma$, $\Omega_3 = \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma$. Величины ω_1, Ω_2 и Ω_3 представляют собой отнесенные к угловой скорости орбитального движения проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси Резаля, совпадающие с осями Ox_1, Ox_2 и Ox_3 при $\gamma=0$. В новых переменных уравнения (1.1) принимают вид

$$\dot{\gamma} = \omega_1 - \Omega_2 \operatorname{tg} \beta, \quad \dot{\omega}_1 = Q_1 \quad (2.1)$$

$$\dot{\delta} = \Omega_2 / \cos \beta - 1, \quad \dot{\beta} = \Omega_3$$

$$\dot{\Omega}_2 = \Omega_2 \Omega_3 \operatorname{tg} \beta - 3 \sin \delta \cos \delta \cos \beta + \lambda Q_2$$

$$\dot{\Omega}_3 = -\Omega_2^2 \operatorname{tg} \beta - 3 \cos^2 \delta \sin \beta \cos \beta + \lambda Q_3$$

$$Q_5 = Q_2 \cos \gamma - Q_3 \sin \gamma, \quad Q_6 = Q_2 \sin \gamma + Q_3 \cos \gamma$$

$$Q_1 = \mu (\omega_2 \omega_3 - 3a_{32} a_{33})$$

$$Q_2 = -(1 + \mu) (\omega_1 \omega_3 - 3a_{31} a_{33}) / (1 + \lambda \mu)$$

$$Q_3 = (1 - \mu) (\omega_1 \omega_2 - 3a_{21} a_{32})$$

причем переменные ω_2 и ω_3 должны быть выражены через Ω_2, Ω_3 .

Укажем некоторые свойства системы (2.1). Для сокращения записи используем векторные обозначения. Введем вектор $z = (\gamma, \omega_1, \delta, \beta, \Omega_2, \Omega_3)^T$ и определим функцию $F(z, \lambda) \in R^6$ так, чтобы система (2.1) могла быть записана в виде

$$\dot{z} = F(z, \lambda) \quad (2.2)$$

Система (2.2) обладает свойством (E) [5] по отношению к матрицам $S = \operatorname{diag}(-1, 1, -1, 1, 1, -1)$, $S' = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1, 1, 1)$, т. е. функция $F(z, \lambda)$ удовлетворяет соотношениям

$$SF(Sz, \lambda) = -F(z, \lambda), \quad S'F(S'z, \lambda) = -F(z, \lambda) \quad (2.3)$$

Кроме того

$$F(z + \lambda e_1, \lambda) = F(z, \lambda), \quad e_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad (2.4)$$

Сформулируем краевые условия, определяющие периодические решения системы (2.2). Пусть $T > 0$. В общем случае построение колебательных T -периодических решений этой системы сводится к решению для (2.2)

краевой задачи

$$z(0) = z(T) \quad (2.5)$$

Вследствие соотношений (2.3) можно искать симметричные периодические решения, определяемые более простыми, нежели (2.5), краевыми условиями. Для решений с периодом T эти краевые условия имеют вид [5, 6]:

$$Sz(0) = z(0), \quad S'z(1/4T) = z(1/4T) \quad (2.6)$$

$$Sz(0) = z(0), \quad Sz(1/2T) = z(1/2T) \quad (2.7)$$

$$S'z(0) = z(0), \quad S'z(1/2T) = z(1/2T) \quad (2.8)$$

Рассмотрим, например, краевую задачу (2.6), имеющую в скалярной форме вид

$$\gamma(0) = \delta(0) = \Omega_3(0) = \omega_1(1/4T) = \delta(1/4T) = \beta(1/4T) = 0 \quad (2.9)$$

Считаем, что период T задан. Тогда последние три соотношения (2.9) можно рассматривать как уравнения относительно трех неизвестных начальных условий: $\omega_1(0)$, $\Omega_2(0)$, $\beta(0)$. В задаче общего вида (2.5) имеется шесть уравнений (скалярных) относительно шести неизвестных начальных условий. Таким образом, если сложность краевой задачи оценивать числом неизвестных начальных условий ее решения, то задача (2.6) проще задачи (2.5). Можно показать, что задачи (2.7) и (2.8) также являются трехпараметрическими.

В силу соотношений (2.3) для решения $z(t)$ краевой задачи (2.6) справедливы равенства [5, 6]: $Sz(-t) = z(t)$, $S'z(-t+1/4T) = z(t+1/4T)$. Отсюда $z(t+1/2T) = SS'z(t)$, т. е. третья и пятая компоненты вектора $z(t)$ (отвечающие переменным δ и Ω_2) — $1/2T$ -периодические функции t , а остальные компоненты — $1/2T$ -антипериодические функции. Решения задач (2.7) и (2.8) соответственно удовлетворяют равенствам [5, 6]: $Sz(-t) = z(t)$, $Sz(-t+1/2T) = z(t+1/2T)$ и $S'z(-t) = z(t)$, $S'z(-t+1/2T) = z(t+1/2T)$. Отсюда в обоих случаях имеем $z(t+T) = z(t)$. Заметим, что если $z(t)$ — решение задачи (2.6), то эта функция — также решение задачи (2.7), а $z'(t) = z(t-1/4T)$ — решение задачи (2.8). Однако существуют решения задач (2.7) и (2.8), не сводящиеся к решениям задачи (2.6).

Перейдем к вращательным периодическим решениям. Дадим следующее определение: Решение $z(t)$ системы (2.2) назовем вращательным периодическим решением, если существует такое число $T \geq 0$ (период), что $z(t+T) = z(t) + 2\pi e_1$. Такие решения описывают периодические вращения спутника вокруг оси Ox_1 . Значения T разных знаков отвечают вращениям в разные стороны. Ниже рассматриваются только симметричные периодические вращения, определяемые краевыми условиями

$$Sz(0) = z(0), \quad Sz(1/4T) = z(1/4T) - \pi e_1 \quad (2.10)$$

Скалярная форма этих условий

$$\gamma(0) = \delta(0) = \Omega_3(0) = \gamma(1/4T) - 1/2\pi = \delta(1/4T) = \Omega_3(1/4T) = 0 \quad (2.11)$$

Пусть $z(t)$ — решение краевой задачи (2.10). Тогда в силу первого соотношения (2.3), соотношений (2.4) и $Se_1 = -e_1$ имеем $Sz(-t) = z(t)$, $Sz(-t+1/4T) = z(t+1/4T) - \pi e_1$. Отсюда $z(t+1/2T) = z(t) + \pi e_1$.

3. При $\lambda = 0$ система (2.1) принимает вид

$$\dot{\gamma} = \omega_1 - \Omega_2 \operatorname{tg} \beta$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 = & \mu [\sin \gamma \cos \gamma (\Omega_3^2 - \Omega_2^2 - 3 \sin^2 \delta + 3 \cos^2 \delta \sin^2 \beta) + \\ & + (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) (\Omega_2 \Omega_3 + 3 \sin \delta \cos \delta \sin \beta)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\dot{\delta} = \Omega_2 / \cos \beta - 1, \quad \dot{\beta} = \Omega_3, \quad \dot{\Omega}_2 = \Omega_2 \Omega_3 \operatorname{tg} \beta - 3 \sin \delta \cos \delta \cos \beta \quad (3.2)$$

$$\dot{\Omega}_3 = -\Omega_2^2 \operatorname{tg} \beta - 3 \cos^2 \delta \sin \beta \cos \beta$$

Эта система допускает частные решения

$$\gamma = \gamma_0(t), \quad \omega_1 = \omega_{10}(t), \quad \delta = \beta = \Omega_3 = 0, \quad \Omega_2 = 1 \quad (3.3)$$

в которых $\gamma_0(t)$ и $\omega_{10}(t)$ определяются уравнениями

$$\dot{\gamma} = \omega_1, \quad \dot{\omega}_1 = -\mu \sin \gamma \cos \gamma \quad (3.4)$$

Система (3.4) эквивалентна уравнению математического маятника $2\ddot{\gamma} + \mu \sin 2\gamma = 0$ и интегрируется в эллиптических функциях. Решения (3.3) описывают движения спутника-стержня вокруг продольной оси, совпадающей с осью Ox_3 .

Предположим, что $\mu > 0$, и рассмотрим для системы (3.4) краевые задачи (сравни (2.9) и (2.11)):

$$\gamma(0) = \omega_1(1/4T) = 0 \quad (T > 0) \quad (3.5)$$

$$\gamma(0) = \gamma(1/4T) - 1/2\pi = 0 \quad (T \geq 0) \quad (3.6)$$

Эти задачи допускают однопараметрические семейства решений: задача (3.5) имеет решения

$$\begin{aligned} \gamma_0(t) &= \arcsin(k \operatorname{sn} \sqrt{\mu} t) \\ \omega_{10}(t) &= k \sqrt{\mu} \operatorname{cn} \sqrt{\mu} t, \quad T = 4K(|k|) / \sqrt{\mu} \end{aligned} \quad (3.7)$$

задача (3.6) — решения

$$\begin{aligned} \gamma_0(t) &= \operatorname{am} \frac{\sqrt{\mu} t}{k}, \quad \omega_{10}(t) = \frac{\sqrt{\mu}}{k} \operatorname{dn} \frac{\sqrt{\mu} t}{k} \\ T &= 2kK(|k|) / \sqrt{\mu} \quad (k \neq 0) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь $k \in (-1, 1)$ — параметр, модуль эллиптических функций равен $|k|$, $K(|k|)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Решения (3.3), (3.7) и (3.3), (3.8) будем использовать в качестве порождающих при построении методом Пуанкаре решений краевых задач (2.1), (2.9) и (2.1), (2.11) в случае $\lambda < 1$.

Исследуем сначала краевую задачу (2.1), (2.9). При $\lambda = 0$ система уравнений в вариациях для решения (3.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\gamma} &= \Delta \omega_1 - \Delta \beta \\ \Delta \omega_1 &= -\mu [(\Delta \gamma - \Delta \Omega_3) \cos 2\gamma_0(t) + \Delta \Omega_2 \sin 2\gamma_0(t)] \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\Delta \delta^* = \Delta \Omega_2, \quad \Delta \Omega_2^* = -3\Delta \delta, \quad \Delta \beta^* = \Delta \Omega_3, \quad \Delta \Omega_3^* = -4\Delta \beta$$

Последние четыре уравнения этой системы образуют две независимые замкнутые подсистемы. Третье и четвертое уравнения описывают малые колебания оси Ox_1 в плоскости орбиты, пятое и шестое уравнения — колебания этой оси в плоскости, перпендикулярной плоскости орбиты.

Рассмотрим для системы (3.9) краевую задачу (сравни (2.9))

$$\Delta \gamma(0) = \Delta \delta(0) = \Delta \Omega_3(0) = \Delta \omega_1(1/4T) = \Delta \delta(1/4T) = \Delta \beta(1/4T) = 0 \quad (3.10)$$

Пусть в (2.9), (3.9) и (3.10) $\gamma_0(t)$ и T имеют вид (3.7); k фиксировано. Тогда если краевая задача (3.9), (3.10) не допускает нетривиальных решений, то согласно теореме Пуанкаре [4] краевая задача (2.2), (2.6) при достаточно малом λ имеет единственное решение $z = z_0(t, \lambda)$, аналитически зависящее от λ и совпадающее в точке $\lambda = 0$ с решением (3.3), (3.7).

Условия отсутствия у задачи (3.9), (3.10) нетривиальных решений имеют вид

$$\begin{aligned} T &\neq 2\pi l_\delta / \sqrt{3} \quad (l_\delta = 2, 4, 6, \dots) \\ T &\neq \pi l_\beta \quad (l_\beta = 1, 3, 5, \dots), \quad k \neq 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

При нарушении этих условий существуют следующие решения

$$\begin{aligned} T &= 2\pi l_\delta / \sqrt{3} \quad (l_\delta = 2, 4, 6, \dots) \quad \Delta\gamma = \Delta\omega_1 = \Delta\beta = \Delta\Omega_3 = 0 \\ \Delta\delta &= \sin\sqrt{3}t, \quad \Delta\Omega_2 = \sqrt{3} \cos\sqrt{3}t \\ T &= \pi l_\beta \quad (l_\beta = 1, 3, 5, \dots) \quad \Delta\gamma = \Delta\omega_1 = \Delta\delta = \Delta\Omega_2 = 0 \\ \Delta\beta &= \cos 2t, \quad \Delta\Omega_3 = -2 \sin 2t \\ k &= 0 \quad \Delta\gamma = \sin\sqrt{\mu}t, \quad \Delta\omega_1 = \sqrt{\mu} \cos\sqrt{\mu}t \\ \Delta\delta &= \Delta\beta = \Delta\Omega_2 = \Delta\Omega_3 = 0, \quad T = 2\pi/\sqrt{\mu} \end{aligned}$$

Таким образом, если нарушено первое условие (3.11), то имеет место резонанс между движением спутника вокруг оси Ox_1 и колебаниями этой оси в плоскости орбиты. При нарушении второго условия резонанс возникает между движением спутника вокруг оси Ox_1 и колебаниями этой оси в плоскости, перпендикулярной плоскости орбиты. Резонансы первого типа назовем δ -резонансами, резонансы второго типа — β -резонансами.

Нарушение третьего условия (3.11) связано с ветвлением решений краевой задачи (2.1), (2.9) в точке $\lambda=0$, $T=2\pi/\sqrt{\mu}$. Это ветвление обусловлено ветвлением порождающего решения (3.7) в точке $k=0$ — решение (3.7) существует только при $T \geq 2\pi/\sqrt{\mu}$.

Исследование краевой задачи (2.1), (2.11) проводится аналогично и приводит к следующему результату. Пусть в (3.8) k фиксировано, в (2.11) T определено последней формулой (3.8) и удовлетворяет условиям

$$T \neq 2\pi l_\delta / \sqrt{3}, \quad T \neq \pi l_\beta \quad (l_\delta, l_\beta = \pm 2, \pm 4, \dots) \quad (3.12)$$

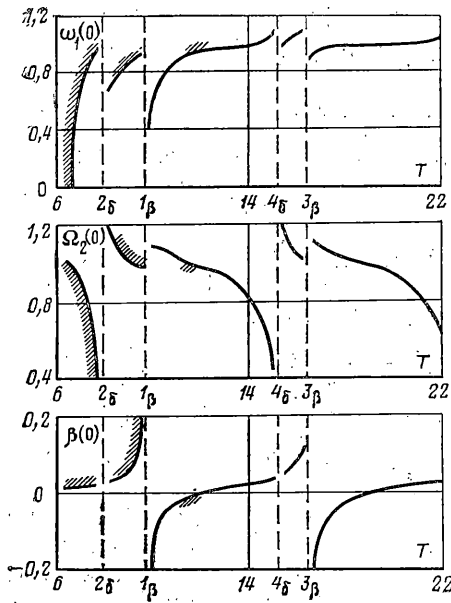
Тогда при достаточно малом λ краевая задача (2.2), (2.10) имеет единственное решение $z=z_1(t, \lambda)$, аналитически зависящее от λ и совпадающее в точке $\lambda=0$ с решением (3.3), (3.8). Смысл условий (3.12) аналогичен смыслу первых двух условий (3.11). При нарушении первого условия (3.12) возникает δ -резонанс, при нарушении второго условия — β -резонанс.

Для исследования устойчивости периодических решений $z_0(t, \lambda)$ и $z_1(t, \lambda)$ рассмотрим характеристическое уравнение соответствующей системы уравнений в вариациях. Поскольку подходящей заменой переменных систему (2.1) можно привести к гамильтоновой форме [1], это характеристическое уравнение — возвратное. В силу автономности системы (2.1) это уравнение имеет корень, равный единице. С учетом сказанного рассматриваемое характеристическое уравнение можно представить в виде

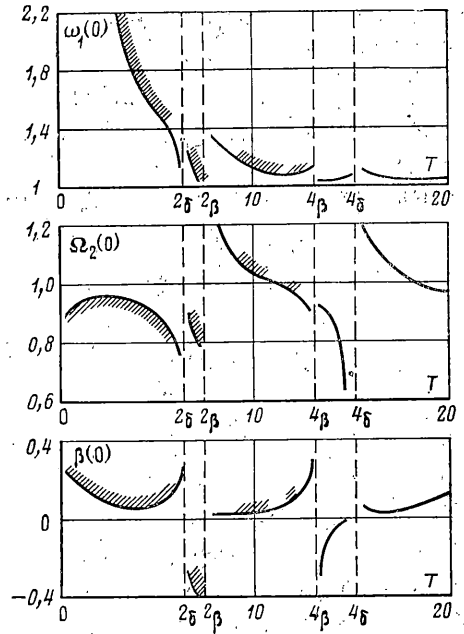
$$(\rho-1)^2(\rho^2-2a_1\rho+1)(\rho^2-2a_2\rho+1)=0 \quad (3.13)$$

где a_1 и a_2 — некоторые коэффициенты. Если корни уравнения (3.13) лежат на окружности $|\rho|=1$ (a_1, a_2 действительны и принадлежат отрезку $[-1, 1]$), то выполнены необходимые условия орбитальной устойчивости исследуемого периодического решения. В противном случае это решение орбитально неустойчиво.

Используя свойства симметрии системы (2.1) и решений $z_0(t, \lambda)$, $z_1(t, \lambda)$, можно доказать [2, 7], что корни уравнения (3.13) суть квад-



Фиг. 2



Фиг. 3

раты корней уравнения $(p-1)^2(p^2-2b_1p+1)(p^2-2b_2p+1)=0$, являющегося характеристическим уравнением действительной матрицы. Здесь $b_i=b_i(\lambda)$ ($i=1, 2$) — аналитические функции λ в окрестности точки $\lambda=0$: $b_1(\lambda)=\cos(\sqrt{3/2}T)+O(\lambda)$, $b_2(\lambda)=-\cos T+O(\lambda)$ для решения z_0 ; $b_1(\lambda)=-\cos(\sqrt{3/2}T)+O(\lambda)$, $b_2(\lambda)=\cos T+O(\lambda)$ для решения z_1 .

Если период T решения $z_0(t, \lambda)$ удовлетворяет неравенствам

$$|\cos(\sqrt{3/2}T)| < 1, \quad |\cos T| < 1, \quad \cos(\sqrt{3/2}T) \neq -\cos T \quad (3.14)$$

то при достаточно малом λ это решение орбитально устойчиво в первом приближении. Если же неравенства (3.14) не выполнены, то решение $z_0(t, \lambda)$ может быть орбитально неустойчивым. Аналогичное утверждение справедливо и для решения $z_1(t, \lambda)$, только в (3.14) последнее неравенство следует заменить неравенством $\cos(\sqrt{3/2}T) \neq \cos T$.

4. Решая краевые задачи (2.1), (2.9) и (2.1), (2.11) численными методами, можно построить найденные в п. 3 решения $z_0(t, \lambda)$ и $z_1(t, \lambda)$ в явном виде и исследовать их зависимость от T .

Рассмотрим сначала краевую задачу (2.9). Численное построение ее решений проводилось следующим образом. Задавалось некоторое значение периода T ($T > 2\pi/\sqrt{\mu}$), и при этом T задача (2.9) решалась методом пристрелки. Первое приближение неизвестных начальных условий выбиралось в виде (сравни (3.3), (3.7) при $t=0$): $\omega_1(0)=k\sqrt{\mu}$, $\Omega_2(0)=1$, $\beta(0)=0$, где $k=k(T)$ — положительный корень уравнения, заданного последним соотношением (3.7).

Для $\lambda=0,1$, $\mu=0,9$ зависимость от T начальных условий $\omega_1(0)$, $\Omega_2(0)$ и $\beta(0)$ решений краевой задачи (2.9) приведена на фиг. 2. В силу равенств (2.3) система (2.2) сохраняет свой вид при замене $t \rightarrow t$, $z \rightarrow SS'z$. Поэтому кривые, получающиеся из кривых на фиг. 2 преобразованием $T \rightarrow T$, $\omega_1(0) \rightarrow -\omega_1(0)$, $\Omega_2(0) \rightarrow \Omega_2(0)$, $\beta(0) \rightarrow -\beta(0)$, также будут задавать начальные условия решений задачи (2.9).

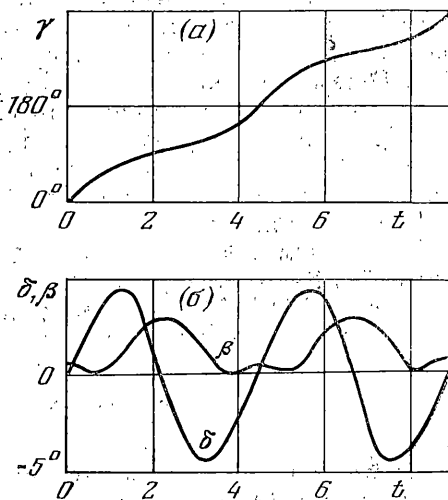
Краевая задача (2.11) решалась аналогично. Значение периода $T (T > 0)$ было фиксировано, первое приближение неизвестных начальных условий выбиралось в виде (сравни (3.3), (3.8) при $t=0$): $\omega_1(0) = \sqrt{\mu/k}$, $\Omega_2(0) = 1$, $\beta(0) = 0$, где $k = k(T)$ — корень уравнения, заданного последним соотношением (3.8). Для $\lambda = 0,1$, $\mu = 0,9$ зависимость от T начальных условий $\omega_1(0)$, $\Omega_2(0)$ и $\beta(0)$ решений задачи (2.11) приведена на фиг. 3. В силу второго равенства (2.3) кривые, получающиеся из кривых на фиг. 3 преобразованием $T \rightarrow -T$, $\omega_1(0) \rightarrow -\omega_1(0)$, $\Omega_2(0) \rightarrow \Omega_2(0)$, $\beta(0) \rightarrow -\beta(0)$, также будут задавать начальные условия решений этой задачи.

Кривые на фиг. 2 и 3 состоят из отдельных непрерывных кусков. Рассмотрим фиг. 2, относящуюся к задаче (2.9). Для решений этой задачи, начальные условия которых принадлежат одному и тому же куску, якобиан

$$\frac{\partial[\omega_1(T/4), \delta(T/4), \beta(T/4)]}{\partial[\omega_1(0), \Omega_2(0), \beta(0)]} \quad (4.1)$$

имеет одинаковый знак. При переходе на соседний кусок знак якобиана меняется. Абсциссы «точек разрыва» кривых на фиг. 2 приблизительно равны значениям T , при которых нарушаются первые два условия (3.11). Именно нарушение этих условий, т. е. резонанс между колебаниями оси Ox_1 и движением спутника вокруг этой оси, приводит к возникновению разрывов. Такая же ситуация имеет место и для решений краевой задачи (2.11). Поведение знака якобиана $\partial[\gamma(T/4), \delta(T/4), \Omega_2(T/4)] / \partial[\omega_1(0), \Omega_2(0), \beta(0)]$ вдоль кривых, представленных на фиг. 3, аналогично описанному выше поведению знака якобиана (4.1). Абсциссы точек разрыва этих кривых приблизительно равны значениям T , при которых нарушаются условия (3.12). Каждый разрыв на фиг. 2 и 3 отмечен символом l_2 или l_3 (l — целое число). Этот символ указывает порядок и тип резонанса (сравни условия (3.11) и (3.12)), ответственного за данный разрыв.

На фиг. 4 для решения краевой задачи (2.11) с параметрами $\lambda = 0,1$, $\mu = 0,9$, $T = 8,92578$, $\omega_1(0) = 1,10824$, $\Omega_2(0) = 1,08233$, $\beta(0) = 0,01227$ приведены графики функций $\gamma(t)$, $\delta(t)$ и $\beta(t)$ ($0 \leq t \leq T$). Начальные условия этого решения лежат на кусках кривых (фиг. 3), заключенных между резонансами 2_2 и 4_2 . Как и следовало ожидать, максимальные значения функций $|\delta(t)|$ и $|\beta(t)|$ на приведенных графиках малы, т. е. в соответствующем движении спутника ось Ox_1 направлена приблизительно в притягивающий центр. Указанным свойством обладают все найденные решения краевых задач (2.9) и (2.11), период которых лежит вне малых окрестностей резонансных значений. Это свойство делает построенные движения удобными для использования в качестве номинальных невозмущенных движений спутника в режиме одноосной гравитационной ориентации. Численное исследование задач (2.9) и (2.11) методом [7] показало¹, что в окрестности резонансных значений периода происходит



Фиг. 4

¹ Более полно результаты численных расчетов, упоминаемых здесь и далее, приведены в работе: Сазонов В. В., Сидорук М. Е. Периодические движения динамически вытянутого спутника в режиме одноосной гравитационной ориентации. — Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1981, № 163. 28 с.

ветвление найденных решений, приводящее к появлению решений с большими амплитудами колебаний по углам δ и β . Это ветвление аналогично ветвлению, описанному в [2, 3], и здесь не рассматривается.

Для исследования устойчивости найденных периодических решений вычислялись коэффициенты a_1, a_2 в характеристическом уравнении (3.13). Участки кривых (см. фиг. 2, 3), на которых a_1, a_2 действительны и удовлетворяют неравенствам $|a_1| \leq 1, |a_2| \leq 1$, отмечены штриховкой. Соответствующие таким участкам решения краевых задач (2.9) и (2.11) орбитально устойчивы в первом приближении.

5. Сочетание метода Пуанкаре и численных расчетов позволяет найти периодические решения системы (2.2), отличные от решений $z_0(t, \lambda)$ и $z_1(t, \lambda)$. Хотя такие решения не представляют интереса для реализации режима гравитационной ориентации, их построение демонстрирует эффективность применяемой методики. Приведем некоторые результаты, полученные в этом направлении.

Рассмотрим краевую задачу (2.1), (2.9). В качестве порождающих решений в ней используем решения задачи (2.9), (3.1), (3.2). Поскольку в системе (3.1), (3.2) уравнения (3.2) образуют замкнутую подсистему, последнюю задачу можно решать в два этапа. Сначала решить краевую задачу

$$\delta(0) = \Omega_3(0) = \delta(1/4T) = \beta(1/4T) = 0 \quad (5.1)$$

для системы (3.2), а затем, подставив найденное решение в (3.1), решить для полученной системы задачу (3.5). Частный случай такого подхода использовался в п. 3, где в качестве решения задачи (3.2), (5.1) было взято стационарное решение $\delta = \beta = \Omega_3 = 0, \Omega_2 = 1$. Ниже выбираются более сложные решения.

Краевая задача (3.2), (5.1) допускает однопараметрические семейства решений

$$\beta = \Omega_3 = 0, \quad \delta = \delta_0(t, \varepsilon) \equiv \arcsin(\varepsilon \operatorname{sn} \sqrt{3}t) \quad (5.2)$$

$$\Omega_2 = \Omega_{20}(t, \varepsilon) \equiv 1 + \varepsilon \sqrt{3} \operatorname{cn} \sqrt{3}t$$

$$T = T_0(\varepsilon^2) \equiv 4lK(|\varepsilon|)/\sqrt{3} \quad (l=2, 4, 6, \dots)$$

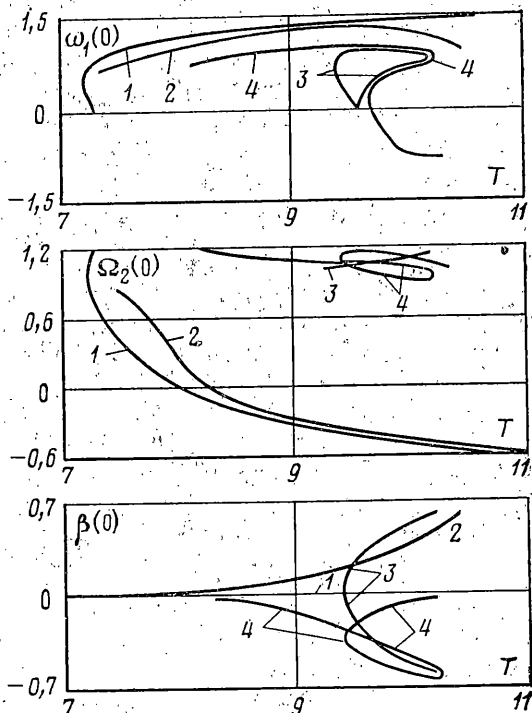
Здесь $\varepsilon \in (-1, 1)$ — параметр; модуль эллиптических функций равен $|\varepsilon|$. Функции $\delta_0(t, \varepsilon)$ и $\Omega_{20}(t, \varepsilon)$ имеют наименьший период $4K(|\varepsilon|)/\sqrt{3}$ и удовлетворяют уравнениям $\delta' = \Omega_2 - 1, \Omega_2' = -3 \sin \delta \cos \delta$.

Подставив решение (5.2) в (3.1) и (3.5), получим краевую задачу

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \omega_1 \\ \omega_1 &= -\mu [\Omega_{20}^2(t, \varepsilon) + 3 \sin^2 \delta_0(t, \varepsilon)] \sin \gamma \cos \gamma \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\gamma(0) = \omega_1[1/4T_0(\varepsilon^2)] = 0$$

При $\varepsilon = 0$ первые два уравнения (5.3) переходят в уравнения (3.4). Исследуем задачу (5.3) методом Пуанкаре. Малым параметром будем считать ε , порождающими решениями — решения (3.7), в которых k — корень уравнения $4K(|k|)/\sqrt{\mu} = T_0(0)/n = 2\pi l/n\sqrt{3}$. Здесь n — натуральное число, взаимно простое с $l, n < l\sqrt{3}$. Можно доказать, что при достаточно малом $|\varepsilon|$ задача (5.3) имеет единственное решение $\gamma = \gamma_{ln}(t, \varepsilon), \omega_1 = \omega_{1ln}(t, \varepsilon)$, аналитически зависящее от ε и совпадающее в точке $\varepsilon = 0$ с порождающим решением.



Фиг. 5

Построение решения $\gamma_{in}(t, \varepsilon)$, $\omega_{1in}(t, \varepsilon)$, $\delta_0(t, \varepsilon)$, $\Omega_{20}(t, \varepsilon)$ в явном виде и продолжение его в область больших значений $|\varepsilon|$ сводится к решению краевой задачи

$$\begin{aligned} \delta' &= \Omega_2 - 1, & \Omega_2' &= -3 \sin \delta \cos \delta \\ \gamma' &= \omega_1, & \omega_1' &= -\mu(\Omega_2^2 + 3 \sin^2 \delta) \sin \gamma \cos \gamma \\ \delta(0) &= \gamma(0) = \delta(1/4 T) = \omega_1(1/4 T) = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Эта задача решалась методом, изложенным в [7]. Зависимость от T начальных условий $\omega_1(0)$ и $\Omega_2(0)$ ее решений в случае $l=2$, $n=1$, $\mu=0,9$ приведена на фиг. 5 (кривые 1). Найденные решения использовались как порождающие при построении решений задачи (2.1), (2.9). Сначала в результате решения последней задачи методом [7] при фиксированном T одно из решений задачи (5.4) продолжалось по λ из точки $\lambda=0$ в точку $\lambda=0,1^2$. Затем при $\lambda=0,1$ полученное решение задачи (2.1), (2.9) опять же методом [7] продолжалось по T . Результаты последнего продолжения представлены на фиг. 5 (кривые 2).

Укажем еще один класс решений краевой задачи (3.2), (5.1). Для сокращения записи переменные системы (3.2) представим в векторной форме: $\mathbf{u} = (\delta, \beta, \Omega_2, \Omega_3)^T$. Эта система допускает первый интеграл

$$H = 1/2(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) - 3/2 \cos^2 \delta \cos^2 \beta - \Omega_2 \cos \beta = \text{const} \quad (5.5)$$

и стационарное решение $\mathbf{u}_0 = (0, 0, 1, 0)^T$. Линеаризация (3.2) в окрестности \mathbf{u}_0 приводит к системе, состоящей из последних четырех уравнений

² В точке $\lambda=0$ для решения задачи (5.4), рассматриваемого как порождающее решение задачи (2.1), (2.9), якобиан (4.1) должен быть отличен от нуля. Как показали расчеты, для решений, приведенных на фиг. 5 (кривые 1), этот якобиан обращается в нуль только в конечном числе точек.

(3.9). Собственные частоты такой системы, равные $\sqrt[3]{3}$ и 2, несоизмеримы. Следовательно, в окрестности u_0 система (3.2) имеет два семейства периодических решений Ляпунова [8]. Семейство, отвечающее частоте $\sqrt[3]{3}$, получается из (5.2) заменой $t \rightarrow t + t_0$, где t_0 — произвольная постоянная. Напомним, что наименьший период функций $\delta_0(t, \varepsilon)$ и $\Omega_{20}(t, \varepsilon)$ в (5.2) равен $4K(|\varepsilon|)/\sqrt[3]{3}$ и при $|\varepsilon| \ll 1$ составляет $\approx 2\pi/\sqrt[3]{3}$.

Семейство решений Ляпунова, отвечающее частоте 2, обозначим $u = \varphi[\omega(c^2)(t+t_0), c]$. Здесь t_0 и c — произвольные постоянные, c связано с интегралом (5.5) соотношением $H = c^2 - 2$ и достаточно мало по абсолютной величине, $\omega(c^2)$ и $\varphi(\tau, c)$ — аналитические функции своих аргументов, $\varphi(\tau + \pi, c) = \varphi(\tau, -c)$; $\varphi(\tau, 0) = u_0$, $\omega(0) = 2$.

В силу соотношений (2.3) функцию $\varphi(\tau, c)$ можно выбрать так, чтобы выполнялись равенства³ $S_1 \varphi(-\tau, c) = \varphi(\tau, c)$, $S_1' \varphi(-\tau + 1/2\pi, c) = \varphi(\tau + 1/2\pi, c)$, где $S_1 = \text{diag}(-1, 1, 1, -1)$, $S_1' = \text{diag}(-1, -1, 1, 1)$. Вследствие этих равенств краевая задача (3.2), (5.1) допускает однопараметрические семейства решений, параметром в которых служит c :

$$u = \varphi[\omega(c^2)t, c], \quad T = 2\pi l / \omega(c^2) \quad (l=1, 3, 5, \dots) \quad (5.6)$$

Подставив решение (5.6) в уравнения (3.1), получим систему второго порядка, совпадающую при $c=0$ с системой (3.4). Для полученной системы рассмотрим краевую задачу (3.5), причем будем считать, что в (3.5) T имеет вид (5.6). Поставленную краевую задачу исследуем методом Пуанкаре. Малым параметром будем считать c , порождающими решениями — решения (3.7), в которых k — корень уравнения $4K(|k|)/\sqrt[3]{\mu} = \pi l/n$. Здесь n — натуральное число, взаимно простое с l , $n < l\sqrt[3]{\mu}/2$. Можно доказать, что при достаточно малом $|c|$ рассматриваемая краевая задача имеет единственное решение $\gamma = \gamma_{ln}'(t, c)$, $\omega_1 = \omega_{1ln}'(t, c)$, аналитически зависящее от c и совпадающее в точке $c=0$ с порождающим решением.

Построение решения $\gamma = \gamma_{ln}'(t, c)$, $\omega_1 = \omega_{1ln}'(t, c)$; $u = \varphi[\omega(c^2)t, c]$ в явном виде и продолжение его в область больших значений c сводится к численному решению краевой задачи (2.9), (3.1), (3.2). Эта задача решалась методом [7]. Ее решения в случае $l=1$, $n=1$, $\mu=0,9$ приведены на фиг. 5 (кривые 3). Найденные решения использовались как порождающие при построении решений краевой задачи (2.1), (2.9). Результаты решения этой задачи приведены на фиг. 5 (кривые 4).

Выше исследовалась краевая задача (2.2), (2.6). Совершенно аналогично можно исследовать и краевую задачу (2.2), (2.10). Описанным способом можно также найти решения краевых задач (2.2), (2.7) и (2.2), (2.8), не сводящиеся к решениям задачи (2.2), (2.6). Рассмотрим, например, задачу (2.2), (2.7). При $\lambda=0$ эту задачу можно решить в два этапа. Сначала решить краевую задачу

$$\delta(0) = \Omega_3(0) = \delta(1/2T) = \Omega_3(1/2T) = 0 \quad (5.7)$$

для системы (3.2), а затем, подставив найденное решение в (3.1), решить для полученной системы краевую задачу

$$\gamma(0) = \gamma(1/2T) = 0 \quad (5.8)$$

Задача (3.2), (5.7) допускает однопараметрические семейства решений, получающиеся из семейств (5.2), (5.6) при другом выборе l . В (5.2) следует положить $l=1, 3, 5, \dots$, в (5.6) — $l=2, 4, 6, \dots$. Если l определено таким образом, то в (5.2) $\delta(1/2T) \neq 0$, в (5.6) $\beta(1/2T) \neq 0$. Подставив указанные семейства в (3.1), (5.8) и решая полученные краевые задачи ме-

³ См. также: Сазонов В. В., Сарычев В. А. Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, близких автономным. — Препринт Ин-та приклад. матем. АН СССР, 1977, № 90. 59 с.

тодом Пуанкаре в окрестности точек $\varepsilon=0$ и $c=0$, можно доказать существование решений этих задач, аналогичных решениям $\gamma_{in}(t, \varepsilon)$, $\omega_{in}(t, \varepsilon)$ и $\gamma'_{in}(t, c)$, $\omega'_{in}(t, c)$. Порождающие решения здесь задаются теми же соотношениями, что и для решений γ_{in} , ω_{in} и γ'_{in} , ω'_{in} . Используя численные методы, найденные решения можно продолжить в область больших значений $|\varepsilon|$ и $|c|$, а затем использовать их в качестве порождающих решений при численном построении решений краевой задачи (2.2), (2.7).

Авторы благодарят В. А. Сарычева за полезные обсуждения при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. 222 с.
2. Сарычев В. А., Сазонов В. В. Гравитационная ориентация вращающегося спутника.— Космич. исследования, 1981, т. 19, № 4, с. 499—512.
3. Сарычев В. А., Сазонов В. В. Одноосная гравитационная ориентация искусственных спутников.— Космич. исследования, 1981, т. 19, № 5, с. 659—673.
4. Пуанкаре А. Избр. тр. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.; Т. 2. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. М.: Наука, 1972, 999 с.
5. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966. 230 с.
6. Heinbockel J. H., Struble R. A. Periodical solutions for differential systems with symmetries.— J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1965, v. 13, № 2, p. 425—440.— Рус. перев.: Механика: Период. сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1966, № 1, с. 3—17.
7. Сарычев В. А., Сазонов В. В., Мельник Н. В. Пространственные периодические колебания спутника относительно центра масс.— Космич. исследования, 1980, т. 18, № 5, с. 659—677.
8. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.IV.1983