

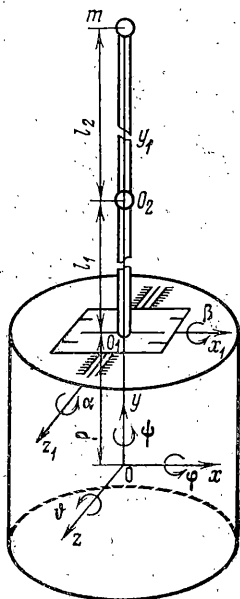
УДК 531.55:521.2

## ДИНАМИКА СИСТЕМ ОРИЕНТАЦИИ И СТАБИЛИЗАЦИИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С УПРАВЛЯЕМЫМ ГРАВИТАЦИОННЫМ СТАБИЛИЗАТОРОМ

ПОТАПЕНКО Е. М.

Исследована динамика космического аппарата с управляемым гравитационным стабилизатором, представляющим собой длинную тонкостенную штангу с грузом на свободном конце, другим концом закрепленную в двухступенном управляемом подвесе. Рассмотрено использование различных вспомогательных исполнительных органов для демпфирования колебаний: маховиков, гироскопов, реактивных двигателей, электромагнитов. Исследованы влияние упругости и искривления штанги стабилизатора на устойчивость движения аппарата. Найдены соотношения, позволяющие аналитически осуществлять анализ, синтез и сравнение рассматриваемых систем.

1. К числу основных требований, предъявляемых к космическим аппаратам, относятся высокоточная ориентация и длительный срок активного существования. Достижению этих целей служат электромеханические исполнительные органы [1] (электродвигатели-маховики, гиромаховики, гироскопы). Такие исполнительные органы способны обеспечить высокую точность ориентации, но из-за наличия в них сравнительно больших высокооборотных роторов имеют ограниченный ресурс и высокое электропотребление. Этим недостатком лишен управляемый гравитационный стабилизатор.

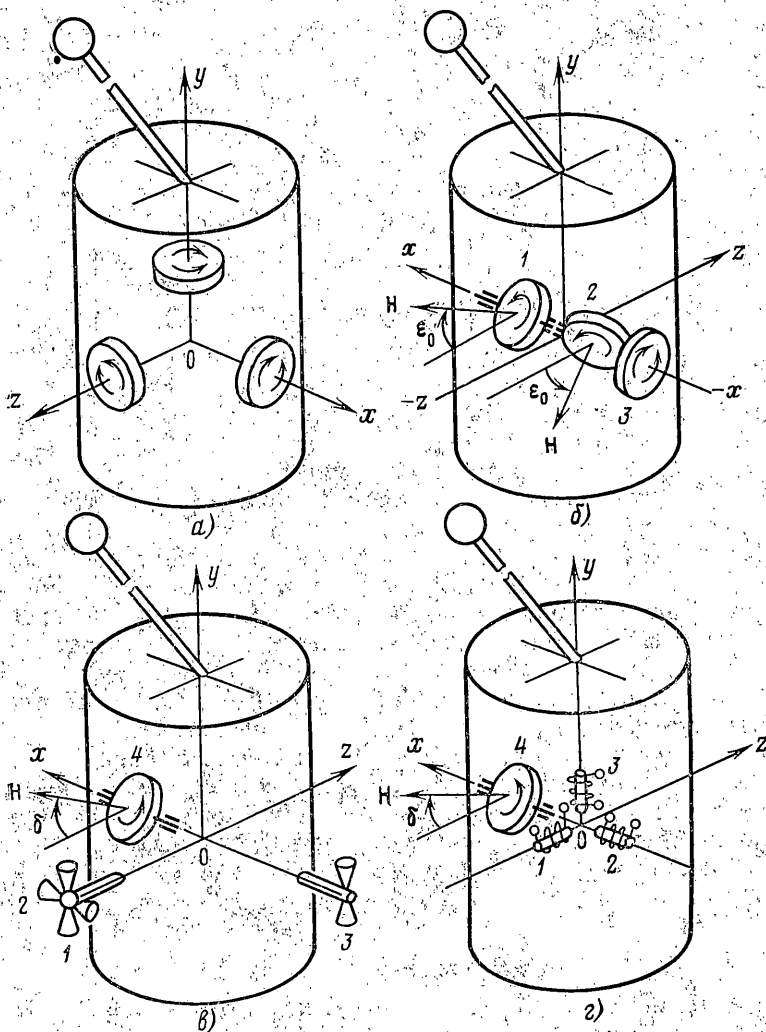


Фиг. 1

На фиг. 1 изображен корпус космического аппарата, к которому с помощью двухступенного подвеса присоединен гравитационный стабилизатор  $O_1m$ , представляющий собой штангу с грузом  $m$  на свободном конце. При выведении аппарата на орбиту штанга намотана на катушку, а после выведения сматывается с катушки, образуя полый стержень  $O_1m$  [2]. По осям подвеса  $O_1x_1$ ,  $O_1z_1$  установлены двигатели, поворачивающие штангу в двух плоскостях. Гравитационный стабилизатор в отличие от маховиков может иметь моменты инерции, превышающие моменты инерции корпуса аппарата, при малом весе, способен создавать управляющие моменты одновременно в каналах тангажа и крена и требует малой угловой скорости поворота. Все это ведет к снижению веса и электропотребления системы и к повышению ее ресурса и надежности по сравнению с обычными маховиками, а легкость изменения моментов инерции стабилизатора за счет изменения длины штанги делает его универсальным исполнительным органом.

В [3] исследована динамика аппарата без учета упругости штанги при использовании в качестве вспомогательных исполнительных органов трех ортогонально установленных маховиков.

Цель данной статьи — исследование динамики аппарата с учетом упругости штанги гравитационного стабилизатора в линейной и нелинейной постановках при использовании в качестве вспомогательных органов: трех маховиков (фиг. 2, а), блока двухступенных гироскопов 1, 2, установленных по схеме «V-крен» [4], в сочетании с маховиком крена 3 (фиг. 2, б), трех пар реактивных (например, пламенных) двигателей 1, 2, 3 с регулируемой средней тягой и силовым гироскопом 4 для управления в канале рыскания (фиг. 2, в), трех ортогонально установленных электромагнитов 1, 2, 3 [5] в сочетании с силовым гироскопом



Фиг. 2

скопом 4 (фиг. 2, г). В дальнейшем эти варианты будут именоваться соответственно схемой 1, 2 и т. д. Возможны и другие схемы. Однако они ни в методическом плане, ни в плане улучшения динамических характеристик не вносят в систему управления ничего нового по сравнению с перечисленными выше.

2. Уравнения движения аппарата с упругим температурно-искривленным гравитационным стабилизатором имеют следующий вид:

$$\varphi \ddot{A}_{11} + \beta \ddot{A}_{15} + \beta_d \ddot{A}_{16} + \psi \omega_0 (A_{11} + A_{22} - A_{33}) + \varphi 4\omega_0^2 (A_{33} - A_{22}) + \beta 4\omega_0^2 A_{15} + \beta_d 4\omega_0^2 A_{16} = M_x \quad (2.1)$$

$$\psi \ddot{A}_{22} - \varphi \omega_0 (A_{11} + A_{22} - A_{33}) + \psi \omega_0^2 (A_{33} - A_{11}) = M_y$$

$$\vartheta \ddot{A}_{33} + \alpha \ddot{A}_{15} + \alpha_d \ddot{A}_{16} + \vartheta 3\omega_0^2 (A_{11} - A_{22}) + \alpha 3\omega_0^2 A_{15} + \alpha_d 3\omega_0^2 A_{16} = M_z$$

$$\varphi \ddot{A}_{15} + \beta \ddot{A}_{44} + \beta_d \ddot{A}_{46} + (\varphi + \beta) 4\omega_0^2 A_{15} + \beta_d 4\omega_0^2 A_{16} - \beta \omega_0^2 B_1 - \beta_d \omega_0^2 B_2 = M_\beta$$

$$\vartheta \ddot{A}_{15} + \alpha \ddot{A}_{44} + \alpha_d \ddot{A}_{46} + (\vartheta + \alpha) 3\omega_0^2 A_{15} + \alpha_d 3\omega_0^2 A_{16} = M_\alpha$$

$$\varphi \ddot{A}_{16} + \beta \ddot{A}_{46} + \beta_d \ddot{A}_{77} + (\varphi + \beta + \beta_d) 4\omega_0^2 A_{16} - \beta \omega_0^2 B_2 - \beta_d \omega_0^2 B_3 = Q_\beta$$

$$\vartheta \ddot{A}_{16} + \alpha \ddot{A}_{46} + \alpha_d \ddot{A}_{77} + (\vartheta + \alpha + \alpha_d) 3\omega_0^2 A_{16} = Q_\alpha$$

$$q\gamma^* + G_2\gamma + \alpha_d Q_\beta - \beta_d Q_\alpha = 0$$

$$A_{11} = I_x + I_0 + m(\rho + L)^2 + \frac{1}{3}\delta[(\rho + L)^3 - \rho^3]$$

$$A_{22} = I_y, \quad A_{33} = A_{11} - I_x + I_z, \quad A_{44} = I_0 + (m + \frac{1}{3}\delta L)L^2$$

$$A_{77} = (m + \frac{1}{3}\delta l_2)l_2^2, \quad A_{46} = mLl_2 + \delta l_2^2(\frac{1}{3}l_2 + \frac{1}{2}l_1)$$

$$A_{15} = I_0 + mL^2(1 + \rho/L) + \delta(\frac{1}{3}L + \frac{1}{2}\rho)L^2$$

$$A_{16} = m(\rho + L)l_2 + \delta l_2^2[\frac{1}{3}l_2 + \frac{1}{2}(\rho + l_1)]$$

$$B_1 = (m + \frac{1}{2}\delta L)L\rho, \quad B_2 = (m + \frac{1}{2}\delta l_2)l_2\rho$$

$$B_3 = (m + \frac{1}{2}\delta l_2)(\rho + l_1)l_2, \quad G_2 = 5G_0J_pL^{-1}$$

Здесь  $\varphi, \psi, \vartheta$  — углы крена, рыскания и тангажа аппарата относительно орбитальной системы координат,  $\omega_0$  — модуль орбитальной угловой скорости,  $\alpha, \beta$  — углы поворота в карданном подвесе соответственно в плоскостях тангажа и крена,  $\alpha_d, \beta_d$  — углы в плоскостях тангажа и крена в фиктивном шарнире  $O_2$  (фиг. 1), моделирующие первый тон изгибных термоупругих искривлений штанги стабилизатора,  $\gamma$  — угол поворота плоскости температурного искривления штанги за счет упругой деформации вокруг оси  $O_1O_2$ , моделирующий первый тон крутильных колебаний,  $I_x, I_y, I_z$  — главные моменты инерции корпуса аппарата относительно осей системы координат с началом в центре масс  $O$ ,  $I_0$  — предполагаемые одинаковыми моменты инерции колец карданова подвеса относительно его осей,  $L$  — длина штанги,  $m$  — масса концевого груза,  $\rho$  — расстояние от центра  $O$  до точки крепления штанги  $O_1$ ,  $l_1, l_2$  — длины отрезков штанги, разделенных шарниром  $O_2$  (фиг. 1),  $\delta$  — погонная масса штанги,  $q$  — коэффициент демпфирования изгибно-крутильных колебаний,  $M_x, M_y, M_z$  — моменты, приложенные к корпусу аппарата со стороны вспомогательных исполнительных органов,  $M_\beta, M_\alpha$  — моменты, развиваемые приводами, установленными по осям карданова подвеса,  $Q_\alpha, Q_\beta$  — моменты упругости, действующие в шарнире  $O_2$ . В нелинейной постановке

$$Q_\beta = -G_1[\beta_d - (\beta_t \cos \gamma + \alpha_t \sin \gamma)] \quad (2.2)$$

$$Q_\alpha = -G_1[\alpha_d + (\beta_t \sin \gamma - \alpha_t \cos \gamma)], \quad G_1 = 3E_0J_0l_2^2L^{-3}$$

где  $\alpha_t, \beta_t$  — температурные искривления штанги стабилизатора в плоскостях соответственно тангажа и крена,  $E_0J_0$  — жесткость штанги на изгиб.

При линеаризации восьмого уравнения (2.1) и (2.2) имеем ( $G_0J_p$  — жесткость штанги при кручении):

$$Q_\beta = -G_1\tau_i^{-2}[\beta_d(\beta_i^2 + F^{-1}\alpha_i^2) + \alpha_d(1 - F^{-1})\alpha_i\beta_i - \beta_t\tau_i^2] \quad (2.3)$$

$$Q_\alpha = -G_1\tau_i^{-2}[\alpha_d(\alpha_i^2 + F^{-1}\beta_i^2) + \beta_d(1 - F^{-1})\alpha_i\beta_i - \alpha_t\tau_i^2]$$

$$F = 1 + G_1G_2^{-1}\tau_i^2, \quad \tau_i = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}, \quad G_2 = 5G_0J_pL^{-1}$$

В частности, при  $\alpha_i = 0, \beta_i \neq 0$  и при  $\alpha_i \neq 0, \beta_i = 0$  соответственно имеем

$$Q_\beta = -G_1(\beta_d - \beta_t), \quad Q_\alpha = -G_1F^{-1}\alpha_d \quad (2.4)$$

$$Q_\beta = -G_1F^{-1}\beta_d, \quad Q_\alpha = -G_1(\alpha_d - \alpha_t)$$

что отражает переменность жесткости штанги в плоскостях тангажа и крена.

Для получения уравнений движения с прямой и абсолютно жесткой штангой достаточно положить в уравнениях (2.1)  $\alpha_d = \alpha_t = \beta_d = \beta_t = 0$ . Тогда 4-е и 5-е уравнения (2.1) принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi'' A_{15} + \beta'' A_{44} + (\varphi + \beta) 4\omega_0^2 A_{15} - \beta\omega_0^2 B_1 &= M_\beta \\ \vartheta'' A_{15} + \alpha'' A_{44} + (\vartheta + \alpha) 3\omega_0^2 A_{15} &= M_\alpha \end{aligned} \quad (2.5)$$

Умножая 4-е и 5-е уравнения (2.1) на  $d_0 = A_{15}/A_{44}$  и вычитая соответственно из 1-го и 3-го уравнений (2.1), получаем

$$\begin{aligned} & \varphi''(A_{11} - d_0 A_{15}) + \beta_d''(A_{16} - d_0 A_{46}) + \psi' \dot{\omega}_0 (A_{11} + A_{22} - A_{33}) + \\ & + \varphi 4 \omega_0^2 (A_{33} - d_0 A_{15} - A_{22}) + \beta 4 \omega_0^2 A_{15} (1 - d_0) + \\ & + \beta_d 4 \omega_0^2 A_{16} (1 - d_0) + \beta \omega_0^2 B_1 d_0 + \beta_d \omega_0^2 B_2 d_0 = M_x - M_\beta d_0 \\ & \vartheta''(A_{33} - d_0 A_{15}) + \alpha_d''(A_{16} - d_0 A_{46}) + \vartheta 3 \omega_0^2 (A_{11} - d_0 A_{15} - A_{22}) + \\ & + \alpha 3 \omega_0^2 A_{15} (1 - d_0) + \alpha_d 3 \omega_0^2 A_{16} (1 - d_0) = M_z - M_\alpha d_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

С учетом имеющих место на практике неравенств  $\delta L \ll m$ ,  $I_0 \ll A_{44}$ ,  $\rho L^{-1} \ll 0,2$  можно записать

$$A_{11} - A_{15}^2 A_{44}^{-1} \approx I_x, \quad A_{22} \approx I_y, \quad A_{33} - A_{15}^2 A_{44}^{-1} \approx I_z \quad (2.7)$$

$$A_{16} - A_{46} A_{15} A_{44}^{-1} \approx 0, \quad 1 - A_{15} A_{44}^{-1} \approx \rho L^{-1}, \quad B_1 \approx \rho L^{-1} A_{44}, \quad B_2 < \rho L^{-1} A_{44}$$

В дальнейшем будет предполагаться, что значение углов и скоростей  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varphi'$ ,  $\psi'$ ,  $\vartheta'$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$  известны. Можно было бы попытаться с помощью наблюдателей или фильтров [6] получить информацию об  $\alpha_d$ ,  $\alpha_d'$ ,  $\beta_d$ ,  $\beta_d'$ ,  $\gamma$ . Однако вследствие нелинейности 8-го (последнего) уравнения (2.1) и (2.2) и значительной неопределенности величин  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  это представляется нереальным.

3. Для упрощения синтеза законов управления и уменьшения паразитных моментов, действующих на корпус аппарата, управляющие моменты, входящие в (2.1) и (2.6), формируются в виде

$$\begin{aligned} M_x - M_\beta d_0 &= -\Phi_x + \beta \omega_0^2 A_{15} [4(1 - d_0) + B_1/A_{44}] \\ M_y &= -\Phi_y, \quad M_z - M_\alpha d_0 = -\Phi_z + \alpha 3 \omega_0^2 A_{15} (1 - d_0) \end{aligned}$$

$$\Phi_x = k_\varphi \varphi + k_{\varphi'} \varphi' + k_{\varphi''} \int_0^t \varphi dt - \psi' \dot{\omega}_0 (A_{11} + A_{22} - A_{33}) - \varphi 4 \omega_0^2 (A_{33} - d_0 A_{15} - A_{22}), \quad (3.1)$$

$$\Phi_y = k_\psi \psi + k_{\psi'} \psi' + k_{\psi''} \int_0^t \psi dt + \varphi' \omega_0 (A_{11} + A_{22} - A_{33}) - \psi \omega_0^2 (A_{33} - A_{11})$$

$$\Phi_z = k_\vartheta \vartheta + k_{\vartheta'} \vartheta' + k_{\vartheta''} \int_0^t \vartheta dt - \vartheta 3 \omega_0^2 (A_{11} - d_0 A_{15} - A_{22})$$

В (3.1)  $k$  с соответствующими индексами — постоянные коэффициенты. С учетом (2.7), (3.1) уравнения движения корпуса аппарата (2-е уравнение (2.1) и (2.6)) принимают вид

$$I_m \xi'' + \xi' k_m' + \xi k_m + k_m'' \int_0^t \xi dt = 0 \quad (3.2)$$

При значениях индекса  $m=x$ ,  $m=y$ ,  $m=z$  переменная  $\xi$  соответственно равна  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\vartheta$ .

Таким образом, формирование законов управления в соответствии с (3.1) сообщает корпусу аппарата любые наперед заданные динамические характеристики. При этом движение корпуса независимо от движения гравитационного стабилизатора. Вследствие этого при исследовании динамики стабилизатора члены, содержащие  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\vartheta$ , их производные и интегралы, должны рассматриваться как возмущения, не влияющие на устойчивость движения стабилизатора.

Из уравнений (3.1) имеем

$$\begin{aligned} M_{\beta} &= (M_x + \Phi_x) / d_0 - \beta \omega_0^2 [4(A_{44} - A_{15}) + B_1] \\ M_{\alpha} &= (M_z + \Phi_z) / d_0 - \alpha 3\omega_0^2 (A_{44} - A_{15}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

4. Обобщенные управляющие моменты вспомогательных исполнительных органов для схем 1 и 2 представляются в виде

$$\begin{aligned} M_x &= -H_x^* - \omega_0 H_y - (\psi^* - \omega_0 \varphi) H_{z_0} \\ M_y &= -H_y^* + \omega_0 H_x + (\varphi^* + \omega_0 \psi) H_{z_0}, \quad M_z = -H_z^* \end{aligned} \quad (4.1)$$

а система уравнений (2.1) должна быть дополнена уравнениями динамики исполнительных органов

$$\begin{aligned} H_x^* + H_x / T_x &= U_x, \quad H_y^* + H_y / T_y - \kappa_y (\psi^* - \omega_0 \varphi) = U_y \\ H_z^* + H_z / T_z - \kappa_z \vartheta^* &= U_z \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь  $H_x, H_y$  — составляющие вектора кинетического момента вспомогательных исполнительных органов в каналах крена и рыскания,  $H_z, H_{z_0}$  — соответственно его переменная и постоянная составляющие в канале тангажа,  $U_x, U_y, U_z$  — моменты на осях вспомогательных исполнительных органов.

Для схемы 1  $\kappa_y = \kappa_z = 0$ , а  $T_x, T_y, T_z$  — постоянные времени электродвигателей-маховиков.

Для схемы 2 (фиг. 2, б):

$$\begin{aligned} 1/T_y = 1/T_z &= (\omega_0 H \cos \varepsilon_0 + k_0) / h, \quad \kappa_y = 2H^2 \cos^2 \varepsilon_0 / h \\ \kappa_z &= 2H^2 \sin^2 \varepsilon_0 / h, \quad H_{z_0} = -2H \cos \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь  $H$  — модуль кинетического момента каждого ротора гиродемпфера,  $h$  — коэффициент демпфирования по оси прецессии,  $\varepsilon_0$  — угол между вектором кинетического момента ротора и отрицательным направлением оси тангажа при идеальной ориентации корпуса аппарата в орбитальной системе координат,  $k_0$  — жесткости пружин демпферов. Гиродемпферы предполагаются идеальными.

Возложение основных функций по управлению (управление корпусом аппарата) на управляемый гравитационный стабилизатор приводит к следующим законам управления вспомогательными исполнительными органами ( $k_{\alpha}, k_{\alpha'}, k_{\beta}, k_{\beta'}, k_x, k_x', k_z$  — постоянные коэффициенты):

$$\begin{aligned} U_x &= k_{\beta} \beta + k_{\beta}' \beta^* + (T_x^{-1} - k_x) H_x - (\omega_0 + k_x') H_y \\ U_z &= k_{\alpha} \alpha + k_{\alpha}' \alpha^* + (T_z^{-1} - k_z) H_z \end{aligned} \quad (4.4)$$

Как следует из (2.5), (3.3), (4.1), (4.2) и (4.4), уравнения движения стабилизатора с исполнительными органами распадаются на две независимые подсистемы: подсистему канала тангажа и подсистему каналов крена и рыскания с характеристическими уравнениями соответственно

$$\begin{aligned} a_2^{\circ} p^3 + a_3^{\circ} p^2 + a_4^{\circ} p + a_5^{\circ} &= 0, \quad b_2^{\circ} p^4 + b_3^{\circ} p^3 + b_4^{\circ} p^2 + b_5^{\circ} p + b_6^{\circ} = 0 \\ a_2^{\circ} &= b_2^{\circ} = 1, \quad a_3^{\circ} = k_x + k_{\alpha}' / A_{15}, \quad a_4^{\circ} = 3\omega_0^2 + k_{\alpha} / A_{15} \\ a_5^{\circ} &= 3\omega_0^2 k_z, \quad b_3^{\circ} = k_x + k_{\beta}' / A_{15}, \quad b_4^{\circ} = 5\omega_0^2 + \omega_0 k_x' + k_{\beta} / A_{15} \\ b_5^{\circ} &= \omega_0^2 (4k_x + k_{\beta}' / A_{15}), \quad b_6^{\circ} = \omega_0^2 [k_{\beta} / A_{15} + 4\omega_0 (\omega_0 + k_x')] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Изменяя коэффициенты законов управления, можно дать любые наперед заданные значения коэффициентам характеристических уравнений (4.5), сообщив тем самым системе требуемые динамические характери-

стики. При оптимизации системы из большого количества критериев оптимальности [6] выбрано биномиальное распределение корней уравнений (4.5). Пусть уравнения (4.5) имеют все равные отрицательные действительные корни с модулем  $\eta$ . Тогда из выражений для коэффициентов уравнений (4.5) и работы [6] можно записать

$$k_{\alpha} = 3\omega_0^2(\eta^{*2} - 1)A_{15}, \quad k_{\alpha}' = \omega_0\eta^*(3 - 1/3\eta^{*2})A_{15}, \quad k_z = 1/3\omega_0\eta^{*3} \quad (4.6)$$

$$k_{\beta} = 1/3\omega_0^2A_{15}(24\eta^{*2} - 16 - \eta^{*4}), \quad k_{\beta}' = 1/3\omega_0\eta^*A_{15}(4 - \eta^{*2})$$

$$k_x = 1/3\omega_0\eta^*(\eta^{*2} - 1), \quad k_x' = 1/3\omega_0[\eta^{*2}(\eta^{*2} - 6) + 4], \quad \eta^* = \eta\omega_0^{-1}$$

Полагая, что частота упругих колебаний  $\Omega$  удовлетворяет соотношениям

$$\Omega^2 = GA_{44}(A_{44}A_{77} - A_{46}^2)^{-1} \gg \omega_0^2, \quad G_1 \geq G \geq G_1/F \quad (4.7)$$

характеристическим уравнениям движения гравитационного стабилизатора в каналах тангажа и крена с учетом его упругости, записанным на основании уравнений с 4-го по 7-е (2.1) и уравнений (2.4), (3.3), (4.1), (4.2), (4.4) и коэффициентов уравнений (4.5), можно придать вид

$$\sum_{i=0}^5 p^i a_{5-i} = 0, \quad \sum_{i=0}^6 p^i b_{6-i} = 0, \quad a_0 = b_0 = A_{44}A_{77} - A_{46}^2 \quad (4.8)$$

$$a_1 = a_0 k_z + A_{44} d_1 k_{\alpha}', \quad a_2 = A_{44}(G + d_1 k_{\alpha})$$

$$b_1 = b_0 k_x + A_{44} d_1 k_{\beta}', \quad b_2 = A_{44}[G + d_1 k_{\beta} + (\omega_0 + k_x') b_0 / A_{44}]$$

$$d_1 = A_{77}/A_{15}, \quad a_i = GA_{44} a_i^0, \quad b_i = GA_{44} b_i^0 \quad (i=3, 4, 5, 6)$$

На основании (4.6) можно записать

$$a_1 = \eta[3A_{44}A_{77} - 1/3A_{46}^2(\eta/\omega_0)^2] \quad (4.9)$$

$$b_1 = 1/3\eta[3A_{44}A_{77} - A_{46}^2(\eta/\omega_0)^2 + A_{46}^2]$$

Необходимым условием устойчивости движения является положительность коэффициентов уравнений (4.8). Соотношения (4.9) позволяют записать следующие необходимые условия устойчивости для канала тангажа и крена соответственно:

$$\eta_0 < 3\omega_0(A_{44}A_{77}A_{46}^{-2})^{1/2}, \quad \eta_0 < \omega_0(3A_{44}A_{77}A_{46}^{-2} + 1)^{1/2} \quad (4.10)$$

Как следует из (2.1), величина  $A_{44}A_{77}A_{46}^{-2}$  близка к единице. При этом необходимые условия устойчивости (4.10) принимают вид

$$\eta_0 \leq 3\omega_0, \quad \eta_0 \leq 2\omega_0 \quad (4.11)$$

В противном случае система теряет устойчивость на частоте упругих колебаний. Еще более жесткими оказываются ограничения при выборе какого-либо другого распределения корней, отличного от биномиального. Необходимость иметь некоторый запас устойчивости уменьшает степень устойчивости в канале тангажа до  $2\omega_0$ , в канале крена — до  $\omega_0$ .

Учитывая неравенства (4.7) и ограничиваясь значениями  $\eta$  не выше  $10\omega_0$ , каждое из характеристических уравнений (4.8) приближенно можно разбить на два уравнения, так, что корни, относящиеся к упругим колебаниям, находятся из характеристических уравнений

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0, \quad b_0 p^2 + b_1 p + b_2 = 0 \quad (4.12)$$

а корни, соответствующие либрационным колебаниям, — из уравнений  $a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0$ ,  $b_2 p^4 + b_3 p^3 + b_4 p^2 + b_5 p + b_6 = 0$ .

При нарушении соотношений (4.10) действительные части корней уравнений (4.12) растут настолько быстро, что не представляется возмож-

ным существенно увеличить области устойчивости (4.10) путем установки каких-либо пассивных демпферов упругих колебаний [2].

Поскольку полученные результаты не зависят от  $\kappa_y, \kappa_z$ , то они в равной степени распространяются как на схему 1, так и на схему 2.

5. Для схемы 3 (фиг. 2, е) управляющие моменты вспомогательных органов представляются в виде

$$M_x = M_x' + (\dot{\psi} - \omega_0 \varphi) H - \delta \omega_0 H \quad (5.1)$$

$$M_y = M_y' - \delta \dot{H} - (\dot{\varphi} + \omega_0 \psi) H, \quad M_z = M_z'$$

а систему уравнений (2.1) необходимо дополнить уравнением движения силового гироскопа

$$\delta \ddot{I} + \delta \dot{h} + \delta \omega_0 H - (\dot{\psi} - \omega_0 \varphi) H = U \quad (5.2)$$

Здесь  $H$  и  $h$  имеют тот же смысл, что и в схеме 2,  $I$  — момент инерции рамки силового гироскопа,  $\delta$  — угол ее поворота,  $U$  — момент на оси рамки силового гироскопа.

Возложение основных функций по управлению на гравитационный стабилизатор приводит к следующим законам управления исполнительных органов:

$$U = h/H [M_y' - \Phi_y - (\dot{\varphi} + \omega_0 \psi) H] + \delta \omega_0 H - (\dot{\psi} - \omega_0 \varphi) H \quad (5.3)$$

$$M_x' = k_\beta \beta + k_\beta' \beta', \quad M_y' = -k_\delta \delta - k_\delta' \delta', \quad M_z' = k_\alpha \alpha + k_\alpha' \alpha'$$

где  $k$  с соответствующими индексами — постоянные коэффициенты.

Как следует из (2.5), (3.3), (5.1)–(5.3), уравнения движения силового гироскопа и гравитационного стабилизатора с абсолютно твердой прямой штангой распадаются на три независимых уравнения: уравнения движения стабилизатора в каналах тангажа и крена и уравнение движения гироскопа, которые имеют следующие характеристические уравнения:

$$A_{15} p^2 + k_\alpha' p + (3\omega_0^2 A_{15} + k_\alpha) = 0 \quad (5.4)$$

$$A_{15} p^2 + k_\beta' p + (4\omega_0^2 A_{15} + k_\beta) = 0, \quad I p^2 + (h + k_\delta') p + k_\delta = 0$$

Теоретически корни уравнений (5.4) могут быть заданы произвольными. На практике эти корни будут ограниченными из-за необходимости уменьшения параметров вспомогательных исполнительных органов.

Пусть для системы выбраны равные действительные корни  $-\eta$ , для которых

$$k_\alpha' = k_\beta' = 2\eta A_{15}, \quad k_\alpha = (\eta^2 - 3\omega_0^2) A_{15}, \quad k_\beta = (\eta^2 - 4\omega_0^2) A_{15} \quad (5.5)$$

Тогда после установления ориентации корпуса движение гравитационного стабилизатора в канале тангажа опишется уравнением

$$\alpha = \alpha_0 (1 + \eta t) \exp(-\eta t) \quad (5.6)$$

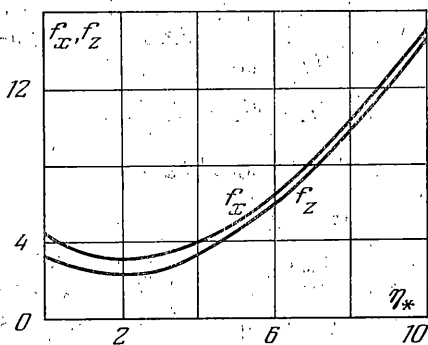
( $\alpha_0$  — начальное условие), а управляющий момент с учетом (5.3), (5.5), (5.6) — уравнением  $M_z' = \alpha_0 A_{15} [\eta^2 - 3\omega_0^2 - (\eta^2 + 3\omega_0^2) \eta t] \exp(-\eta t)$  с максимальным при  $t = 2\eta (\eta^2 + 3\omega_0^2)^{-1}$  по модулю значением

$$M_{z0}' = |\alpha_0| \omega_0^2 A_{15} f_z, \quad f_z = (\eta^*{}^2 + 3) \exp[-2\eta^*{}^2 (\eta^*{}^2 + 3)^{-1}], \quad \eta^* = \eta \omega_0^{-1} \quad (5.7)$$

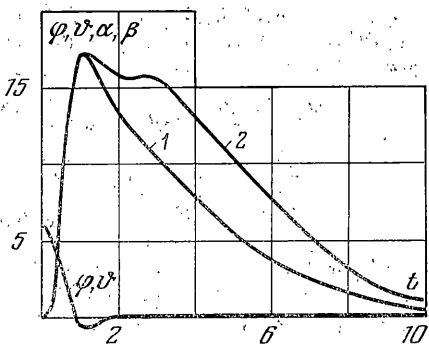
Аналогично для канала крена при  $t = 2\eta (\eta^2 + 4\omega_0^2)^{-1}$

$$M_{x0}' = |\beta_0| \omega_0^2 A_{15} f_x, \quad f_x = (\eta^*{}^2 + 4) \exp[-2\eta^*{}^2 (\eta^*{}^2 + 4)^{-1}] \quad (5.8)$$

На фиг. 3 представлены зависимости  $f_x, f_z$  от  $\eta^*$ . Для практически важных случаев ( $\eta < 8\omega_0$ ) максимальный управляющий момент соизмерим с максимальным гравитационным моментом, действующим на гравитационный стабилизатор. Поэтому вспомогательные исполнительные органы ка-



Фиг. 3



Фиг. 4

налов тангажа и крена будут иметь малые габаритные, массовые и энергетические показатели.

Пусть движение управляемого гравитационного стабилизатора с учетом упругости описывается системой уравнений, включающей с 4-го по 7-е уравнения системы (2.1), (2.4), (3.3), (5.1)–(5.3), и соотношениями (4.7). Для этой системы характеристические уравнения в каналах тангажа и крена имеют вид

$$\begin{aligned}
 & p^4(A_{77} - A_{46}^2 A_{44}^{-1}) + p^3 k_{\alpha}' d_1 + p^2(G + k_{\alpha} d_1) + \\
 & + p k_{\alpha}' G A_{15}^{-1} + G(3\omega_0^2 + k_{\alpha} A_{15}^{-1}) = 0, \quad p^4(A_{77} - A_{46}^2 A_{44}^{-1}) + \\
 & + p^3 k_{\beta}' d_1 + p^2(G + k_{\beta} d_1) + p k_{\beta}' G A_{15}^{-1} + G(4\omega_0^2 + k_{\beta} A_{15}^{-1}) = 0
 \end{aligned} \quad (5.9)$$

При  $(k_{\alpha}, k_{\alpha}', k_{\beta}, k_{\beta}') > 0$  необходимые условия устойчивости выполняются. Критерий Гурвица показывает, что эти же условия при выполнении неравенств (4.7) являются достаточными.

Таким образом, схема 3, в отличие от схем 1 и 2, не имеет ограничений на область устойчивости движения при учете упругости гравитационного стабилизатора.

Как и для схем 1 и 2, каждое характеристическое уравнение (5.9) можно разбить на два характеристических уравнения, так, что корни, относящиеся к упругим колебаниям, находятся из характеристических уравнений

$$p^2(A_{77} - A_{46}^2 A_{44}^{-1}) + p k_{\alpha}' A_{77} A_{15}^{-1} + (G + k_{\alpha} A_{77} A_{15}^{-1}) = 0 \quad (5.10)$$

$$p^2(A_{77} - A_{46}^2 A_{44}^{-1}) + p k_{\beta}' A_{77} A_{15}^{-1} + (G + k_{\beta} A_{77} A_{15}^{-1}) = 0$$

а корни, соответствующие либрационным колебаниям, — из уравнений

$$p^2(1 + k_{\alpha} A_{77} A_{15}^{-1} G^{-1}) + p k_{\alpha}' A_{15}^{-1} + (3\omega_0^2 + k_{\alpha} A_{15}^{-1}) = 0 \quad (5.11)$$

$$p^2(1 + k_{\beta} A_{77} A_{15}^{-1} G^{-1}) + p k_{\beta}' A_{15}^{-1} + (4\omega_0^2 + k_{\beta} A_{15}^{-1}) = 0$$

Как показывает сравнение корней, подсчитанных по уравнениям (5.9), с одной стороны, и по уравнениям (5.10), (5.11), с другой, при  $\Omega > 40\omega_0$ ,  $\eta < 8\omega_0$  имеет место хорошее совпадение. Указанная декомпозиция позволяет выбирать параметры системы полностью аналитически.

Подстановка соотношений (5.5) в выражение для корней уравнений (5.10) показывает, что степень устойчивости упругих колебаний  $\lambda$  имеет максимум  $\lambda^{\circ}$ :  $\lambda^{\circ} \approx A_{44} A_{46}^{-1} \sqrt{G A_{77} (A_{44} A_{77} - A_{46}^2)^{-1}}$  при  $\eta = \eta^{\circ} \approx A_{46}^{-1} \times \sqrt{G A_{77}^{-1} (A_{44} A_{77} - A_{46}^2)}$ .

При дальнейшем увеличении  $\eta$  величина  $\lambda$  стремится к нулю. Поэтому на практике приходится ограничиваться случаями  $\eta < 10\omega_0$ , при которых  $\lambda > 10\omega_0$ .



6. В соответствии с [5] для малых отклонений корпуса аппарата от орбитальной системы координат управляющие моменты в схеме 4, создаваемые электромагнитами (фиг. 2, з), определяются выражениями

$$\begin{aligned} M_x' &= M_x'' - B_{x0} P_n, & M_y' &= M_y'' - B_{y0} P_n, & M_z' &= M_z'' - B_{z0} P_n \\ M_x'' &= k_\beta \beta + k_\beta' \beta', & M_y'' &= -k_\delta \delta - k_\delta' \delta', & M_z'' &= k_\alpha \alpha + k_\alpha' \alpha' \\ P_n &= B^{-2} (M_x'' B_{x0} + M_y'' B_{y0} + M_z'' B_{z0}) \end{aligned} \quad (6.1)$$

в которых  $M_x''$ ,  $M_y''$ ,  $M_z''$  имеют смысл желаемых управляющих моментов, а  $B_{x0} = B_0 \sin i \cos(\omega_0 t + u)$ ,  $B_{y0} = -2B_0 \sin i \sin(\omega_0 t + u)$ ,  $B_{z0} = B_0 \cos i$ ,  $B^2 = B_{x0}^2 + B_{y0}^2 + B_{z0}^2$ ;  $B_{x0}$ ,  $B_{y0}$ ,  $B_{z0}$  — проекции вектора геомагнитной индукции на оси орбитальной системы координат,  $B_0$  — модуль вектора геомагнитной индукции над геомагнитным экватором,  $u$  — начальное значение аргумента широты,  $i$  — угол наклона плоскости орбиты к плоскости экватора (предполагается, что магнитная ось Земли совпадает с ее осью вращения).

Таким образом, реальные управляющие моменты электромагнитов равны желаемым управляющим моментам за вычетом паразитных моментов. В частности, на магнитополярной орбите ( $i = 1/2\pi$ )  $M_z' = M_z''$ , на магнитоэкваториальной орбите ( $i = 0$ ) ( $M_x' = M_x''$ )  $M_y' = M_y''$ . Эти тождества указывают на схожесть динамических характеристик схем 3 и 4. Поэтому выводы, сделанные по схеме 3, в основном остаются справедливыми и для схемы 4.

7. На фиг. 4 представлены результаты интегрирования системы уравнений (2.1), (2.2), (3.3), (5.1)–(5.3), соответствующие реактивным вспомогательным исполнительным органам (схема 3). Законы управления были выбраны таким образом, что при  $\omega_0 = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$  степень устойчивости движения корпуса космического аппарата составляет  $0,05 \text{ с}^{-1}$ , а гравитационного стабилизатора —  $5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ . Кривая 1 иллюстрирует движение стабилизатора в каналах тангажа и крена. (Углы даны в градусах, время — в сотнях секунд.) Отмечено эффективное демпфирование упругих колебаний (на фигуре не показаны из-за высокой частоты).

На этой же фигуре представлены результаты интегрирования системы (2.1), (2.2), (3.3), (5.1)–(5.3), (6.1), соответствующей электромагнитным исполнительным органам (схема 4), при  $i = 1/2\pi$ . В этом случае движение корпуса по всем осям и гравитационного стабилизатора в канале тангажа полностью соответствует движению в схеме 3. Движение гравитационного стабилизатора в канале крена дано кривой 2. Отличие от предыдущей схемы обусловлено перекрестной связью между каналами крена и рыскания за счет членов  $B_{x0} P_n$ ,  $B_{y0} P_n$  в (6.1).

Теоретический анализ, а также результаты моделирования свидетельствуют, что для изогнутой штанги разомкнутого профиля сечения в переходных режимах пользоваться линейной моделью моментов упругости штанги управляемого гравитационного стабилизатора (2.3) нельзя из-за возникновения больших крутильных колебаний. В этом случае необходимо пользоваться моделью (2.2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Высоточные системы управления ориентацией длительно существующих ИСЗ. (Обзор). — *Вопр. ракетн. техники*, 1972, № 7, с. 46–64.
2. Стабилизация искусственных спутников. /Под ред. В. А. Сарычева. М.: Мир, 1974, 229 с.
3. Hooker W. W., Leliakov I. P., Lyons M. G., Marquies L. Reaction-boom attitude control systems. — *AIAA Paper*, 1969, № 69–834, 12 p.
4. Льюис Дж. А., Зайак Е. Е. Двухгироскопная гравитационно-градиентная система управления положением спутника. — В кн.: *Проблемы ориентации искусственных спутников Земли*. М.: Наука, 1966, с. 201–282.
5. Мак-Илвейн Р. Дж. Изменение кинетического момента спутника при помощи магнитного поля Земли. — В кн.: *Проблемы ориентации искусственных спутников Земли*. М.: Наука, 1966, с. 295–323.
6. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976. 184 с.

Запорожье

Поступила в редакцию  
1.III.1983