

УДК 533.6.013.42

ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ТРУБОПРОВОДА

ЗЕФИРОВ В. Н., КОЛЕСОВ В. В., МИЛОСЛАВСКИЙ А. И.

Задача неустойчивости решений уравнения малых колебаний прямолинейного трубопровода, несущего установившийся поток несжимаемой жидкости, сводится к исследованию расположения спектра собственных частот трубопровода в комплексной плоскости. Общие свойства спектра изучаются методами функционального анализа, его поведение — в зависимости от параметров задачи, области дивергенции и флаттера — исследуется численно.

1. Уравнение малых колебаний $u=u(x, t)$ горизонтальной вязкоупругой трубы, находящейся в вязкой внешней среде и несущей установившийся поток несжимаемой жидкости, в безразмерных переменных имеет вид [1]:

$$\alpha \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\beta v \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + k \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$x = \frac{s}{l}, \quad \alpha = \left[\frac{EI}{m+m_T} \right]^{1/2} \frac{\nu}{l^2}, \quad v = \left[\frac{m}{EI} \right]^{1/2} Ul$$

$$\beta = [m/(m+m_T)]^{1/2}, \quad k = cl^2 [EI(m+m_T)]^{-1/2}$$

где t — безразмерное время; координата s отсчитывается вдоль оси трубы, m , m_T — погонная масса жидкости и трубы, U — скорость жидкости, l — длина трубы, EI — изгибная жесткость сечения трубы, ν — коэффициент внутреннего трения (материал Фойхта), c — коэффициент внешнего трения.

Рассматривается случай, когда давление жидкости и осевое растягивающее усилие равны нулю.

Предположим, что труба закреплена шарнирно:

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = \partial^2 u / \partial x^2|_{x=0} = \partial^2 u / \partial x^2|_{x=1} = 0. \quad (1.2)$$

В случае $\alpha=k=0$ уравнения (1.1), (1.2) впервые выведены и исследованы в [2], где найдено критическое значение параметра скорости $v_*=\pi$. В [3] на основе метода Ляпунова доказано, что при $0 \leq v < \pi$ трубопровод устойчив, а при $v=\pi n$ ($n=1, 2, \dots$) неустойчив в случае $\alpha=k=0$, так что найденное в [2] критическое значение оказалось точным. Спектральная задача, отвечающая уравнениям (1.1), (1.2), исследовалась в [4, 4, 5] численными методами и для закритических значений v при некоторых значениях α , β , k . В [6, 7] сведения о собственных частотах получены методами функционального анализа.

В публикуемой работе методами [6, 7] в сочетании с методами теории возмущений линейных операторов [8] и асимптотическими методами дифференциальных уравнений¹ показано, что при наличии сил трения ($\alpha+k>0$) нулевое решение задачи (1.1), (1.2) устойчиво при $0 \leq v < v_*=\pi$.

¹ См. Милославский А. И. Неустойчивость прямолинейного трубопровода при большой скорости жидкости, протекающей через него. Харьков, 1981. — 21 с. Деп. в ВИНТИ 11.11.81; № 5184-81.

а при $v > v_*$ неустойчиво; количество неустойчивых частот при $v > \pi$ равно $[v/\pi]$ — целой части дроби v/π . В отсутствие сил трения ($\alpha = k = 0$) показано, что устойчивость по Ляпунову нулевого решения задачи (1.1), (1.2) равносильна тому, что спектр частот чисто мнимый и простой, при $v > \pi$ число неустойчивых частот не превосходит $[v/\pi]$ и зависит от β (различаются случаи $\beta < \beta_* = 3^{-1/2}$ и $\beta > \beta_*$), в случае $\pi(2n-1) < v < 2\pi n$ ($n=1, 2, \dots$) число вещественных частот нечетно; отсюда следует, что для $\pi < v < 2\pi$ спектр неустойчивости состоит из единственного положительного числа. Для собственных частот получены асимптотические формулы при больших v и при малых β .

Поведение первых пяти собственных значений в зависимости от v ($0 \leq v \leq 6\pi$) исследовано численно по алгоритму [9] для нескольких фиксированных значений остальных параметров. Особый интерес вызывают точки слияния и распадаения собственных частот, так как они определяют границы дивергенции и флаттера. Обнаружено, что в отсутствие сил трения при $\beta < \beta_*$ слияние и распадение траекторий частот происходит только на вещественной оси, при $\beta > \beta_*$ флаттер образуется только с мнимой осью, при этом возникает единственный критический интервал устойчивости. В случае $\alpha + k > 0$ этот интервал исчезает, флаттер образуется лишь с вещественной осью.

2. Введем в рассмотрение гильбертово пространство $H = L_2[0, 1]$ и операторы A_+ , A_1 , B_0 , действующие в нем: $A_+ u = u^{IV}$ для $u \in D(A_+)$ — области определения оператора A_+ :

$$D(A_+) = \{y | y \in W_2^4[0, 1], y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0\}$$

$$A_1 u = u'', \quad B_0 u = u', \quad u \in D(A_+)$$

Оператор A_+ самосопряжен, положителен, обратный к нему оператор A_+^{-1} вполне непрерывен. Спектр $\sigma(A_+)$ оператора A_+ состоит из чисел $\{(\pi n)^4\}_{n=1}^\infty$, нормированные собственные функции $e_n(x) = 2^{1/4} \sin \pi n x$ ($n=1, 2, \dots$). Оператор A_1 симметричен и может быть представлен в виде $A_1 = -A_+^{1/2}$. Оператор B_0 кососимметричен $(B_0 x, y) = -(x, B_0 y)$ ($x, y \in D(A_+)$) и подчинен оператору $A_+^{1/4}$ (т. е. оператор $B_0 A_+^{-1/4}$ ограничен), как следует из одной теоремы в [10].

Используя введенные обозначения, запишем задачу (1.1), (1.2) как обыкновенное уравнение второго порядка в пространстве H (I — единичный оператор):

$$u'' + (\alpha A_+ + 2\beta v B_0 + kI)u' + Au = 0, \quad A = A_+ + v^2 A_1 \quad (2.1)$$

Под устойчивостью (экспоненциальной устойчивостью) нулевого решения уравнения (2.1) понимается неравенство

$$\|u(t)\|^2 \leq C[(u^*(0), u^*(0)) + (A_+ u(0), u(0))] \quad (t \geq 0)$$

$$(\|u(t)\|^2 \leq C_\varepsilon e^{-\varepsilon t}[(u^*(0), u^*(0)) + (A_+ u(0), u(0))], t \geq 0)$$

с положительными постоянными $C(\varepsilon, C_\varepsilon)$, независимыми от $t, u(0), u^*(0)$.

Под нормой $\|\cdot\|$ понимается энергетическая норма

$$\|u(t)\|^2 = (u', u') + (A_+ u, u) \quad (2.2)$$

Обычную норму $x, x \in H$ обозначим $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Рассмотрим уравнение более общего вида в пространстве H :

$$u'' + (R + B)u' + Au = 0 \quad (2.3)$$

Относительно операторов в уравнении (2.3) предположим следующее: оператор A самосопряжен², $|A| \geq aI, a > 0$; оператор R самосопряжен,

² Если $A = \int \lambda dE_\lambda$ — спектральное разложение оператора A , то $|A| = \int |\lambda| dE_\lambda$. Под неравенством $T \geq S$ понимается неравенство $(Tx, x) \geq (Sx, x), x \in D(T) \subset D(S)$.

$|A| \geq \gamma R$, $R \geq rI$, $\gamma > 0$, $r \geq 0$, оператор B подчинен оператору $|A|^{1/2}$ и кососимметричен.

Под решением $u(t)$ уравнения (2.3) понимается дважды дифференцируемая функция $u(t) \in D(A)$, такая, что функция $|A|^{1/2}u(t)$ дифференцируема. Оператор A является оператором потенциальной энергии системы, оператор R — оператором сил трения, оператор B — оператором гироскопических сил. Обобщением на бесконечномерный случай известных теорем Томсона — Тэта — Четаева [11] является

Теорема 1. Предположим, что для любых $u_0 \in D(A)$, $u_1 \in D(|A|^{1/2})$ существует и единственно решение $u(t)$ уравнения (2.3), такое, что $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$. Тогда: если $A > 0$, то решения уравнения (2.3) устойчивы; если $A > 0$, $r > 0$, то решения уравнения (2.3) экспоненциально устойчивы; если существует вектор $x_0 \in H$, такой, что $(Ax_0, x_0) < 0$, $r > 0$, то решение $u=0$ уравнения (2.3) неустойчиво.

Устойчивость (неустойчивость) нулевого решения уравнения (2.3) понимается в норме

$$\|u\|_0^2 = (u', u') + (|A|u, u) \quad (2.4)$$

Доказательство. Докажем третье утверждение теоремы 1, остальные утверждения доказываются аналогично. Рассмотрим функцию (функцию Ляпунова) $V(u) = -(u', u') - (Au, u) - \varepsilon (Ju, u')$, где J — ограниченный оператор в H , такой, что $J^* = J$, $\|J\| = 1$, $JA = |A|$.

Используя уравнение (2.3), вычислим производную

$$\begin{aligned} dV/dt = & 2(Ru', u') + 2\operatorname{Re}(Bu', u') - \varepsilon (Ju', u') + \\ & + \varepsilon (Ju, Bu') + \varepsilon (Ju, Ru') + \varepsilon (Ju, Au) \end{aligned}$$

Из свойств операторов в (2.3) вытекают неравенства

$$dV/dt \geq \gamma_1 \|u\|_0^2, \quad V(u) \leq \gamma_2 \|u\|_0^2 \quad (2.5)$$

с некоторыми положительными постоянными $\gamma_i = \gamma_i(\varepsilon)$ ($i=1, 2$; ε достаточно мало). Неравенства (2.5) и рассуждения, применяемые при доказательстве второй теоремы Ляпунова о неустойчивости [11], позволяют закончить доказательство теоремы.

Применим теорему 1 к уравнениям (1.1), (1.2). Согласно [12], в случае $\alpha > 0$ для любых $u_0 \in D(A)$, $u_1 \in H$ существует единственное решение $u(t)$ уравнений (1.1), (1.2), такое, что $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$. В случае $\alpha = 0$ существование и единственность решения уравнений (1.1), (1.2), такого, что $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$ для любых $u_0 \in D(A)$, $u_1 \in D(|A|^{1/2})$, следует из результатов [13]. Покажем, что при $v \neq \pi n$ ($n=1, 2, \dots$) существуют постоянные $\gamma > 0$, $a > 0$, такие, что $|A| \geq aI$, $|A| \geq \gamma R$. Так как $Ae_n = [(\pi n)^4 - (\pi n v)^2]e_n$, $Re_n = [\alpha(\pi n)^4 + k]e_n$ ($n=1, 2, \dots$), то нужное неравенство следует из существования таких $\gamma > 0$, $a > 0$, что

$$\begin{aligned} |(\pi n)^4 - (\pi n v)^2| & \geq \gamma [\alpha(\pi n)^4 + k], \quad |(\pi n)^4 - (\pi n v)^2| \geq a \\ (v \neq \pi n, n=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

При $0 \leq v < \pi$ оператор A положителен, при $v > \pi$ у оператора A существует $[v/\pi]$ отрицательных собственных значений. В теореме 1 речь идет об устойчивости в норме (2.4). В силу неравенства $c_1|A| \leq A \leq c_2|A|$, $0 < c_1 < c_2$ ($v \neq \pi n$, $n=1, 2, \dots$) устойчивость по норме (2.4) эквивалентна устойчивости по норме (2.2). Поэтому при $\alpha + k > 0$ и $0 \leq v < \pi$ решения уравнений (1.1), (1.2) экспоненциально устойчивы, при $\alpha + k > 0$, $v > \pi$ решение $u=0$ неустойчиво по норме (2.2).

Аналогично рассматривается случай жесткого защемления трубы: $u|_{x=0} = u|_{x=1} = du/dx|_{x=0} = du/dx|_{x=1} = 0$. В этом случае при $\alpha + k > 0$, $0 \leq v < 2\pi$ решения уравнения экспоненциально устойчивы, при $\alpha + k > 0$, $v > 2\pi$ решение $u=0$ неустойчиво в энергетической норме. Полученные результаты показывают, что при наличии сил трения ($\alpha + k > 0$) гироскопические силы не влияют на критическое значение параметра v .

Обобщая теорему из [14] на бесконечномерный случай, можно доказать, что при $\alpha+k>0$, $v\neq\pi n$ ($n=1, 2, \dots$) спектр операторного пучка

$$N(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda(\alpha A_+ + 2\beta v B_0 + kI) + A \quad (2.6)$$

не пересекается с мнимой осью, при $v>\pi$ в полуплоскости $\{\lambda | \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ находится в точности $[v/\pi]$ собственных значений пучка (2.6).

3. Исследуем поведение собственных частот и вопрос об устойчивости трубопровода при $\alpha=k=0$. Полагая в уравнении

$$u'' + Bu' + Au = 0 \quad (B = 2\beta v B_0), \quad t > 0, \quad u = e^{\lambda t} x, \quad x \in H \quad (3.1)$$

придем к спектральной задаче для квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$:

$$L(\lambda)x = (\lambda^2 I + \lambda B + A)x = 0 \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) рассматривается при следующих предположениях: оператор A имеет вид $A = A_+ + A_1$, где оператор A_+ самосопряжен, положителен, обратный к нему оператор A_+^{-1} вполне непрерывен. Симметрический оператор A_1 подчинен оператору $A_+^{1/2}$ в том смысле, что $A_1 = D A_+^{1/2}$, где D — ограниченный оператор; оператор B кососимметричен и подчинен оператору $A_+^{1/2}$.

Теорема 2. Спектр $\sigma(L)$ пучка $L(\lambda)$ состоит из изолированных точек конечной алгебраической кратности.

Эти точки либо лежат на мнимой оси, либо заключены в круге $|\lambda| \leq 0,5\|D\|$.

Спектр пучка $L(\lambda)$ симметричен относительно мнимой оси. Пусть $\{\lambda_j\}$ — собственные числа пучка $L(\lambda)$, среди которых нет попарно симметричных относительно мнимой оси. Обозначим через $\rho(\lambda)$ алгебраическую кратность не чисто мнимого собственного числа λ . Если λ — чисто мнимое собственное число, то через $\rho(\lambda)$ обозначим $\rho(\lambda) = \sum [d_i/2]$, где $d_1, d_2, \dots, d_r$ — число непростых элементарных делителей, отвечающих числу λ . Тогда имеет место неравенство

$$\rho(\lambda_1) + \rho(\lambda_2) + \dots \leq \kappa \quad (3.3)$$

где κ — число неположительных собственных чисел оператора A , считанных с учетом их кратности.

Система собственных и присоединенных векторов пучка образует базис Рисса [15] в пространстве $H \oplus H$, снабженном метрикой (2.2).

Доказательство. Первое утверждение теоремы выводится из леммы работы [15, с. 325], аналогичное предложение сформулировано в [17].

Для доказательства второго утверждения рассмотрим квадратичную форму

$$(L(\lambda)x, x) = \lambda^2(x, x) + \lambda(Bx, x) + (Ax, x) \quad (3.4)$$

Полагая $\lambda = re^{i\theta}$ и отделяя вещественную часть в равенстве $\lambda^{-1}(L(\lambda)x, x) = 0$, получим соотношение

$$[(Ax, x) + r^2(x, x)] \cos \theta = 0 \quad (3.5)$$

Из соотношения (3.5) вытекает, что либо $\theta = \pm\pi/2$, либо

$$0 = (Ax, x) + r^2(x, x) = (A_+x, x) + (DA_+^{1/2}x, x) + r^2(x, x) \quad (3.6)$$

Равенство (3.6) приводит к оценке

$$2r|A_+^{1/2}x| \cdot |x| \leq (A_+x, x) + r^2(x, x) = -(DA_+^{1/2}x, x) \leq \|D\| \cdot |A_+^{1/2}x| \cdot |x|$$

из которой следует второе утверждение теоремы.

При доказательстве третьего утверждения теоремы делаем замену $y = \lambda x$ и перепишем уравнение (3.2) в виде линейного уравнения в прост-

пространстве $H \oplus H$:

$$Sz = \lambda z, \quad S = \begin{pmatrix} -B & -A \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Введем в пространстве $H \oplus D(A)$ индефинитную метрику $\langle, \rangle$, полагая для $z_i = x_i + y_i$, где $y_i \in H$, $x_i \in D(A)$ ($i=1, 2$):

$$\langle z_1, z_2 \rangle = (y_1, y_2) + (Ax_1, x_2) \quad (3.8)$$

Метрика (3.8) невырождена, если оператор A обратим. Если у оператора A имеется ненулевое ядро, то следует перейти к пучку $L(\lambda + ia) = L(ia) + \lambda(B + iaI) + \lambda^2 I$. Можно выбрать малое вещественное число a так, чтобы оператор $L(ia)$ был обратим (число κ_a его отрицательных собственных чисел не превосходит κ). Замыкая $H \oplus D(A)$ по метрике (3.8), получим пространство Л. С. Понтрягина Π_κ . Непосредственно проверяется симметричность оператора iS с областью определения $D(iS) = D(A) \oplus D(A)$ в пространстве Π_κ . Симметрия спектра оператора S относительно мнимой оси и неравенство (3.3) следуют из известных результатов Л. С. Понтрягина [16] (см. также [18]).

Последнее утверждение теоремы 2 доказывается с помощью теоремы [19] о базисности Рисса корневых векторов вполне непрерывного самосопряженного в Π_κ оператора.

Определение. Пучок $L(\lambda)$ называется устойчивым, если все его собственные числа чисто мнимые, их алгебраическая кратность равна единице, т. е. алгебраическая кратность собственных чисел оператора S равна единице.

Теорема 3. Устойчивость решений уравнения (3.1) эквивалентна устойчивости пучка $L(\lambda)$.

Доказательство. Из неустойчивости пучка нетрудно вывести неустойчивость нулевого решения уравнения (3.1). Докажем обратное утверждение. Если $L(\lambda)$ устойчив, то оператор

$$S' = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A_+^{-1/2} \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A_+^{-1/2} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

имеет чисто мнимый алгебраически простой спектр. В силу теоремы 2 его собственные векторы образуют базис Рисса в пространстве $H \oplus H$, поэтому оператор S' представим в виде $S' = QTQ^{-1}$, где Q — ограниченный обратимый оператор, а оператор T кососопряжен. Тогда решения уравнения $w' = S'w$ устойчивы в $H \oplus H$, что в силу равенства (3.9) означает устойчивость решений уравнения (3.1) в энергетической норме (2.2). Теорема 3 доказана.

Достаточные условия неустойчивости пучка $L(\lambda)$ даются теоремой 4, которая обобщает на бесконечномерный случай соответствующую теорему Томсона — Тэта [11].

Теорема 4. Предположим, что выполняются следующие условия: оператор A самосопряжен, полуограничен снизу, оператор A^{-1} существует, $A^{-1} \in \sigma_p$ (определение идеала σ_p вполне непрерывных операторов см. в [15]); оператор B представим в виде $B = G(A + \gamma I)^\alpha$, где $0 \leq \alpha < 0,5$, G — ограниченный оператор, постоянная γ выбрана так, что оператор $A + \gamma I$ положителен; комплексное гильбертово пространство H является комплексификацией некоторого вещественного гильбертова пространства, операторы A и B вещественны.

Тогда пучок $L(\lambda)$ имеет четное (нечетное) число положительных собственных чисел с учетом их алгебраической кратности, если оператор A имеет четное (нечетное) число отрицательных собственных чисел с учетом их кратности.

Доказательство несколько более слабого утверждения приведено в [6]. Применим теоремы 2–4 к уравнениям

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\beta v \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.10)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = \partial^2 u / \partial x^2|_{x=0} = \partial^2 u / \partial x^2|_{x=1} = 0$$

Согласно теореме 3, для исследования устойчивости по Ляпунову решений уравнений (3.10) следует положить $u = e^{\lambda t} y(x)$, $\lambda = \xi + i\eta$ в уравнениях (3.10) и изучать расположение спектра задачи

$$y^{IV} + v^2 y'' + 2\beta v \lambda y' + \lambda^2 y = 0 \quad (3.11)$$

$$y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0$$

На основании теоремы 2 спектр уравнений (3.11) состоит из изолированных точек $\{\lambda_j\}$ конечной алгебраической кратности, симметричен относительно мнимой оси и в силу вещественности операторов A и B относительно вещественной оси. При $\pi n < v < \pi(n+1)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) выполняется неравенство

$$\rho(\lambda_1) + \rho(\lambda_2) + \dots \leq n \quad (3.12)$$

если $\xi_i = \operatorname{Re} \lambda_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots$). В частности, число собственных чисел, лежащих в открытой правой полуплоскости, не превосходит n . Не чисто мнимые собственные числа лежат в круге с центром в $\lambda=0$ и радиуса $0,5v^2$. Полученные результаты позволяют при численном исследовании спектра задачи (3.11) ограничиваться четвертью круга $\{\lambda | \lambda = \xi + i\eta, \xi \geq 0, \eta \geq 0, \xi^2 + \eta^2 \leq 0,25v^4\}$ и утверждать, что если при $\pi n < v < \pi(n+1)$ в полуплоскости $\{\lambda | \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ найдено n собственных чисел задачи (3.11), то ими исчерпывается спектр неустойчивости.

Спектр уравнений (3.11) содержит четное (нечетное) число положительных собственных чисел с учетом их алгебраической кратности в зависимости от четности n . В частности, при $\pi(2n-1) < v < 2\pi n$ ($n=1, 2, \dots$) существует хотя бы одно положительное собственное число в спектре задачи (3.11), а при $\pi < v < 2\pi$, как следует из неравенства (3.12), в точности одно положительное собственное число, что означает для трубопровода режим дивергенции.

4. При малых β можно получить приближенные формулы для точек спектра задачи (3.11), используя ряды теории возмущений линейных операторов [8].

Теорема 5. В предположениях для уравнения (3.2) и третьего для теоремы 4 рассмотрим пучок $L_\beta(\lambda) = \lambda^2 I + 2\beta \lambda B + A$ с малым положительным параметром β .

1. Пусть $-\lambda_0^2$ ($\lambda_0 \neq 0$) — простое собственное число оператора A : $Ae_0 + \lambda_0^2 e_0 = 0$. Тогда при достаточно малых β уравнение $L_\beta(\lambda)e = 0$ имеет собственный вектор $e = e(\beta)$ и собственное значение $\lambda = \lambda(\beta)$, являющиеся аналитическими функциями β^2 . В частности

$$\lambda(\beta) = \lambda_0 [1 - 2\beta^2 ((A + \lambda_0^2 I)^{-1} B e_0, B e_0) + O(\beta^4)] \quad (4.1)$$

(так как $(B e_0, e_0) = 0$, то вектор $(A + \lambda_0^2 I)^{-1} B e_0$ определен).

2. Пусть $-\lambda_0^2$ ($\lambda_0 \neq 0$) — двукратное собственное число оператора A :

$$Au + \lambda_0^2 u = 0, \quad Av + \lambda_0^2 v = 0, \quad |u| = |v| = 1, \quad (u, v) = 0$$

Тогда при достаточно малых β уравнение $L_\beta(\lambda)e = 0$ имеет пару собственных векторов и пару собственных чисел $\lambda^\pm(\beta)$, являющихся аналитическими функциями β . В частности

$$\lambda^\pm(\beta) = \lambda_0 \pm i\beta (Bu, v) + O(\beta^2) \quad (4.2)$$

Из формулы (4.2) вытекает, что при малых β уравнения (3.11) имеют пару комплексно-сопряженных собственных чисел

$$\lambda^\pm(\beta) = \pi m n \pm i\beta \frac{2\pi m n v [1 - (-1)^{m+n}]}{m^2 - n^2} + O(\beta^2) \quad (4.3)$$

если для некоторого v , $\pi N < v < \pi(N+1)$ ($N=1, 2, \dots$) найдется единственная пара натуральных чисел m, n ($n \leq N, m \leq N$), такая, что $v^2 = \pi^2(m^2 + n^2)$. Более громоздкая формула для собственных чисел задачи (3.11), вытекающая из формулы (4.1), здесь не дается.

Из приведенных результатов о спектре задачи (3.11) нельзя сделать вывод о неустойчивости нулевого решения уравнений при всех достаточно больших v . Ответ на этот вопрос дает

Теорема 6. Пусть N — натуральное число ($N > 2$), δ' — малое положительное число, $0 < \beta' < 1$. Существует такое $v' = v(N, \delta', \beta')$, что для $v > v'$, $|v - \pi n| > \delta'$ ($n=1, 2, \dots$) спектр задачи (3.12) содержит вещественные точки $\{\lambda_n\}_{|n|=1}^N$, для которых справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_n = \pi n v / \sqrt{1 - \beta^2} + O(v^{-1}) \quad (4.4)$$

Формула (4.4) сохраняется в случае, когда $\beta \neq \beta_*$, $v \neq \pi n + \delta$, $|\delta| < \delta'$, $v > v'$, δ и $1 - 3\beta^2$ разного знака. Если δ и $1 - 3\beta^2$ одного знака, в спектре задачи (3.11) можно указать не менее $2(N-2)$ вещественных точек $\{\lambda_n\}$, для которых выполняется формула (4.4) при $|n|=1, \dots, p-1, p+2, \dots, N$, где p может принимать значения $p=1, 2, \dots, N-1$.

При $\beta \neq \beta_*$ и достаточно больших v в спектре задачи (3.11) всегда присутствуют положительные собственные числа, что влечет неустойчивость нулевого решения уравнений (3.10).

Существует такое β_0 , $0 < \beta_0 \leq \beta_*$, что при $v > \pi$, $0 \leq \beta < \beta_0$ нулевое решение уравнений (3.10) неустойчиво.

При $v = \pi n$ ($n=1, 2, \dots$) в спектре задачи (3.11) имеется собственное число $\lambda = 0$, которому отвечает собственная функция $e_n = 2^{1/2} \sin(\pi n x)$. Полагая

$$\begin{aligned} v = \pi n \pm \delta^2 (\delta > 0) \quad y^\pm(\delta) = e_n + \delta y_1^\pm + \\ + \delta^2 y_2^\pm + \dots, \quad \lambda^\pm(\delta) = \delta \lambda_1^\pm + \delta^2 \lambda_2^\pm + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

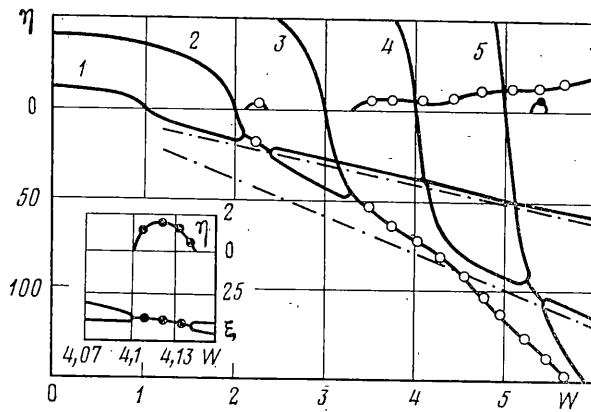
в уравнении (3.11), получим

$$\begin{aligned} \lambda_1^- = i\lambda_1^+, \quad \lambda_1^\pm = \pm \pi n \sqrt{2\pi n / (1 - 3\beta^2)} \quad (n \text{ четное}) \\ \lambda_1^\pm = \pi n \sqrt{2\pi n / (1 - 3\beta^2 + 32(\pi n)^{-2})} \quad (n \text{ нечетное}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

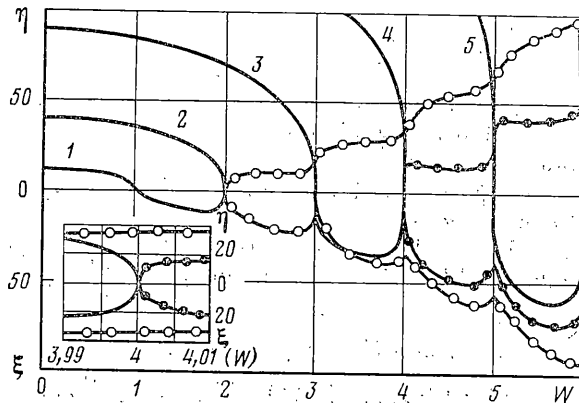
Ряды (4.5) сходятся при малых δ . Формула (4.6) показывает, что при четном n , $0 \leq \beta < \beta_*$, $v \rightarrow \pi n - 0$ уравнение (3.11) имеет пару чисто мнимых собственных значений, сливающихся в нуле при $v = \pi n$. С ростом v эти собственные числа выходят из нуля и движутся по вещественной оси в разные стороны. При $\beta > \beta_*$, $v \rightarrow \pi n - 0$ два вещественных собственных числа сливаются в нуле, с ростом v попадают на мнимую ось.

Покажем, что при $v = 2\pi + \delta^2$ (δ мало) решения уравнений (3.10) устойчивы, если $\beta > \beta_*$. Этот эффект, свойственный гироскопическим системам и названный Томсоном временной стабилизацией, численно обнаружен при некоторых β в [4, 5] (из теоремы 1 следует, что стабилизация, вызванная гироскопическими силами, разрушается при включении сил трения ($\alpha + k > 0$)).

При $\pi < v < 2\pi$ не чисто мнимый спектр задачи (3.11) состоит из двух вещественных чисел, сливающихся в нуле при $v = 2\pi$. С возрастанием v эти числа выходят из нуля и движутся по мнимой оси. С помощью неравенства (3.12) можно установить, что при $v = 2\pi$ задача (3.11) имеет единственную присоединенную функцию, отвечающую нулевому собственному числу. Непосредственные вычисления показывают, что при $v = 2\pi$ каждому собственному числу уравнений (3.11) отвечает единственная собственная функция. Значит, при малых $\delta > 0$ и $\beta > \beta_*$ спектр задачи (3.11) чисто мнимый и алгебраически простой. Из теоремы 3 вытекает, что в этом случае решения уравнений устойчивы.



Фиг. 1



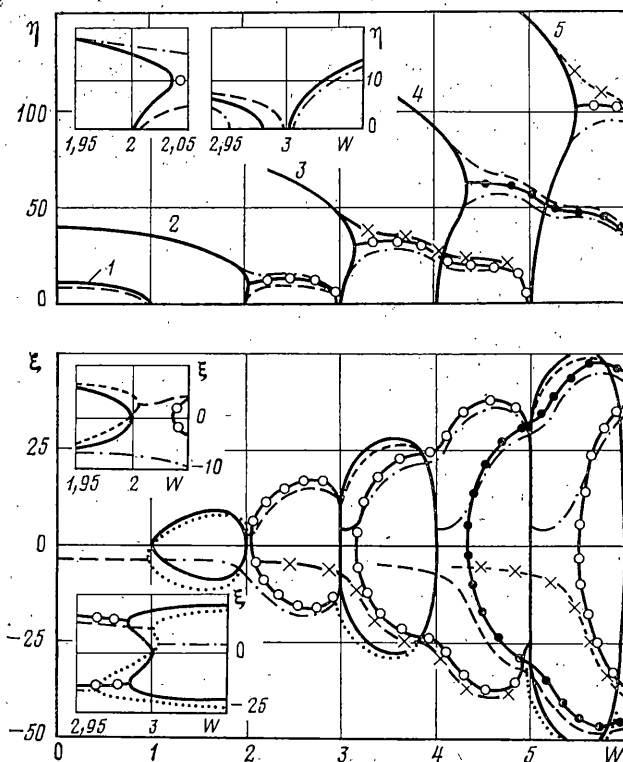
Фиг. 2

5. Результаты вычислений первых пяти собственных чисел λ для значений $\beta = [m/(m+m_T)]^{1/2}$, $\beta=0,1$; $3^{-1/2}$; $0,9$ в зависимости от параметра $w=v/\pi$ ($0 \leq w \leq 6$) приведены на фиг. 1–3. В силу симметрии спектра при $\alpha=k=0$ (фиг. 1, 2) рассматриваются лишь собственные значения, лежащие в первой четверти плоскости ($\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$). Чисто мнимые λ ($\xi=0$, $\eta>0$) отвечают режиму свободных колебаний, вещественные λ ($\xi>0$, $\eta=0$) соответствуют дивергенции, комплексные λ ($\xi>0$, $\eta>0$) — флаттеру. Области флаттера выделены на фигурах кружком и точкой.

На фиг. 1 первое собственное число λ_1 положительно, если $1 < w < 2,12$. Положительность λ_1 при $1 < w < 2$, $0 \leq \beta < 1$ доказана в конце п. 3. При $w=2,12$ корни λ_1 и λ_2 сливаются, возникает флаттер, при $w=2,38$ числа λ_1 и λ_2 вновь становятся вещественными. Второй флаттер возникает при слиянии частот λ_2 и λ_3 ($w=3,34$). На интервале $(3,34; 6)$ корни λ_2 и λ_3 комплексны, их вещественные части быстро растут с ростом w . При $4 < w < 5$ число λ_1 вещественно, за исключением интервала флаттера $(4,1; 4,14)$, выделенного на фиг. 1. При $w=5,30$ число λ_4 сливается с λ_5 , возникает флаттер, который заканчивается при $w=5,50$. Асимптотическая формула (4.3) дает хорошее совпадение с расчетными значениями частот флаттера для $\beta=0,1$. При $\beta \rightarrow 0$ интервалы флаттеров неограниченно сужаются, что затрудняет их численный поиск. В этом случае формула (4.3) помогает найти ряд значений w , для которых флаттер наверняка есть ($w=5^{1/2}$, $13^{1/2}$, $17^{1/2}$, ...).

В случае $\beta=\beta_*=3^{-1/2}$ (фиг. 2) слияние и распадение корней происходит в нуле, причем для $w=2, 4, 6, \dots$ сливаются четыре корня, что может быть выведено аналитически аналогично формулам (4.5), (4.6).

Поведение собственных частот при $\beta=0,9$ изображено на фиг. 3. Кроме случая $\alpha=k=0$ представивший случай $\alpha=0$, $k=8$. С введением демпфирования симметрия спектра относительно мнимой оси исчезает, поэтому поведение корней рассматривается в полуплоскости $\{\lambda | \lambda = \xi + i\eta, \eta \geq 0\}$. В случае $k=8$ области чисто вещественных корней изображены пунктирной линией, области комплексных корней — прерывистыми линиями. Для $\alpha=k=0$ на интервале $(2; 2,03)$ наблюдается возврат к устойчивости: все частоты чисто мнимые (для $w=2+\delta^2$, где δ мало, это доказано в конце п. 4). При $w>2,03$ возврата к устойчивости нет. Флаттеры образуются с мнимой оси при



Фиг. 3

$w = n + \delta_n$ ($0 < \delta_n < 1$), где δ_n растет с увеличением n . Частоты колебаний, возникающих при этом, растут: $\eta_2 = 11$, $\eta_3 = 31$, $\eta_4 = 62$. С введением внешнего трения верхняя часть графика $\xi = \xi(w)$ смещается по отношению к графику ($k=0$) вправо, а нижняя — влево; при этом, как показано в конце п. 2, чисто мнимых корней нет, число неустойчивых частот равно $[w]$, закритический интервал устойчивости исчезает. Слияние и распадение траекторий корней в окрестности целых w происходит, как на вынесенных фрагментах (фиг. 3).

Значение параметра β качественно влияет на поведение собственных частот $\lambda = \lambda(w)$. С ростом β увеличивается частота флаттера, но уменьшается амплитуда. При $\beta < \beta_*$ преобладает флаттер, при $\beta > \beta_*$ на «нечетных» интервалах (1; 2), (3; 4), (5; 6) преобладает дивергенция, на «четных» (2; 3), (4; 5) — флаттер. При малых β положительные частоты с ростом w быстро стремятся к своим асимптотическим значениям (4.4). В случае $\beta < \beta_*$ корень λ_n проходит при $w=n$ через нуль и становится вещественным (см. (4.5); (4.6)). Если $\beta > \beta_*$ при $w=n$, через нуль проходит λ_k ($k < n$), при $n < w < n + \delta_n$ корень λ_k чисто мнимый, при $w = n + \delta_n$ — сливается с λ_n , флаттер обрывается с мнимой оси. Введение демпфирования приводит к тому, что при любом β флаттер образуется с вещественной оси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Païdussis M. P., Issid N. T. Dynamic stability of pipes conveying fluid.— J. Sound and Vibr., 1974, v. 33, No.3, p. 267—294.
2. Феодосьев В. И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости.— Инж. сб., 1951, т. 10, с. 169—170.
3. Мовчан А. А. Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 4, с. 760—762.
4. Доценко П. Д. Некоторые результаты исследования собственных колебаний прямолинейных трубопроводов с жидкостью.— Прикл. механика, 1979, т. 15, № 1, с. 69—75.
5. Доценко П. Д., Зефирова В. Н. Собственные колебания трубопровода с промежуточной упругодемпфирующей опорой.— Самолетостроение. Техника воздушного флота: Сб. статей. Харьков: Вища школа, 1978, вып. 44, с. 66—71.
6. Милославский А. И. О неустойчивости прямолинейных трубопроводов.— Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку: Сб. статей. Харьков: Изд-е Харьк. авиац. ин-та, 1980, вып. 2, с. 38—47.

7. Милославский А. И. Спектральные свойства одного класса квадратичных операторных пучков. — Функциональный анализ и его приложения, 1981, т. 15, вып. 2, с. 81–82.
8. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
9. Зефирова В. Н., Старов А. М. Об исследовании рассеяния энергии при колебании трубопроводов. — Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку: Сб. статей. Харьков: Изд-е Харьк. авиац. ин-та, 1980, вып. 2, с. 62–68.
10. Крейн С. Г. Об одной интерполяционной теореме в теории операторов. — Докл. АН СССР, 1960, т. 130, № 3, с. 491–494.
11. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
12. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
13. Якубов С. Я. Равномерно корректная задача Коши для абстрактных гиперболических уравнений. — Изв. вузов. Математика, 1970, № 12, с. 108–113.
14. Zajac E. E. The Kelvin – Tait – Chetaev Theorem and Extensions – J. Astronaut. Sci., 1964, v. 11, No. 2, p. 46–49.
15. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.
16. Понтрягин Л. С. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1944, т. 8, № 6, с. 243–280.
17. Якубов С. Я. О двукратной полноте собственных и присоединенных элементов квадратичного операторного пучка. — Функциональный анализ и его приложения, 1973, т. 7, вып. 1, с. 92–94.
18. Иохвидов И. С., Крейн М. Г. Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. I. — Тр. Моск. матем. о-ва, 1956, т. 5, с. 369–432.
19. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Критерий полноты и базисности корневых векторов вполне непрерывного J-самосопряженного оператора в пространстве Понтрягина P_n . — Матем. исследования: Сб. статей. Кишинев: Изд-во АН МолдССР, 1971, вып. 1, с. 158–161.

Харьков, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
25.II.1983

УДК 539.375

К ВОПРОСУ О ХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ТОНКИМ ВЫРЕЗОМ ПРИ ДВУХОСНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

ЗОРИН И. С.

Изучение возможностей математического представления трещины в линейной механике разрушения и особенно в задачах, связанных с определением теоретической прочности хрупких материалов, представляет в настоящее время несомненный интерес. Основоположник современной теории А. А. Гриффитс в качестве модели рассматривает тонкий эллипс [1]. При другом подходе [2] трещина трактуется как математический разрез и используется локальная характеристика концевой зоны — коэффициент интенсивности напряжений. В [3, 4] дополнительно привлекаются предположения о действии сил сцепления, обеспечивающих конечность напряжений в вершинах разреза. Вместе с тем отмечается, [5, 6] некоторое несоответствие результатов расчета предельных нагрузок по различным моделям.

Представляется естественным рассматривать трещину в упругом теле как тонкий гладкий вырез, граница которого в окрестности кромок обладает значительной кривизной [7]. В публикуемой работе изучается двухосное напряженное состояние плоскости с таким дефектом, когда отношение приложенных на бесконечности нагрузок имеет порядок $\varepsilon > 0$ относительного поперечного размера выреза (фиг. 1). Отскиваются первые члены равномерной по параметру ε асимптотики точного решения, при этом существенно, что в качестве одной из предельных задач выступает задача теории упругости для плоскости с разрезом, к берегам которого приложена нагрузка, определяемая геометрией выреза. Изучаются асимптотические свойства поля напряжений; при решении задачи о разрушении применяется критерий [8], предложенный В. В. Новожиловым.

1. Пусть $G_\varepsilon = \{(x, y): x \in [-a, a], \varepsilon f_-(x) \leq y \leq \varepsilon f_+(x)\}$, причем $f_+(x) > f_-(x)$ при $x \in (-a, a)$ и $f_+(x) = f_-(x)$ при $x = \pm a$. Предположим, что функции $f_\pm(x)$ и их первые производные удовлетворяют условию Гельдера всюду на $[-a, a]$, исключая, может быть, окрестности концов отрезка. Здесь $\varepsilon = \max |y|/a$ ($(x, y) \in \partial G_\varepsilon$) — малый параметр задачи. Введем еще множество $\Omega_\varepsilon = R^2 \setminus G_\varepsilon$.

Рассмотрим систему уравнений теории упругости в напряжениях и поставим соответствующие краевые условия: