

УДК 539.3:534.1

ОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНОЙ ПРИ УДАРЕ ПО НОРМАЛИ

АПТУКОВ В. Н., ПЕТРУХИН Г. И., ПОЗДЕЕВ А. А.

Постановка задачи поиска механических характеристик неоднородной пластины, сформулированной в терминах теории оптимального управления, впервые была выполнена в работе [1]¹, где с использованием принципа максимума Понтрягина получена оптимальная структура пластины минимальной толщины при заданном погонном весе. Значительно больший интерес представляет задача поиска оптимального распределения механических характеристик неоднородной пластины минимального погонного веса. В публикуемой работе получены критерии оптимальной структуры таких пластин при ударе твердого тела различной формы.

1. Описание процесса динамического внедрения жесткого осесимметричного тела в пластину при средних скоростях удара может основываться на эмпирической зависимости удельного сопротивления внедрению p от параметров удара [2, 3]:

$$p = H_d + k\rho v^2 \quad (1.1)$$

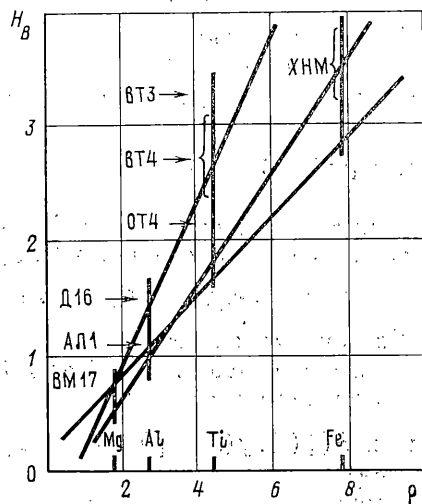
где H_d , ρ — динамическая твердость и плотность материала преграды, k — коэффициент формы головной части ударника, v — текущая скорость ударника.

В случае произвольного распределения плотности $\rho(x)$ и динамической твердости $H_d(x)$ по толщине уравнение движения ударника массы M имеет вид [4]:

$$\frac{1}{2} M \frac{d(v^2)}{dL} = -2\pi \int_0^L \left\{ H_d(x) + \frac{[r'(\xi)]^2}{1+[r'(\xi)]^2} \rho(x) v^2(L) \right\} r(\xi) r'(\xi) d\xi \quad (1.2)$$

где L — текущая глубина внедрения ударника, $r(\xi)$ — уравнение образующей осесимметричного ударника, $\xi = L - x$ — координата, отсчитываемая от конца ударника.

Для большинства макрогомогенных конструкционных материалов наблюдается прямая корреляция между плотностью и твердостью. На фиг. 1 вертикальными линиями показаны интервалы изменения твердости по



Фиг. 1

¹ Аптуков В. Н. Взаимодействие ударника с преградой как игровая ситуация. — В кн.: Аннот. докл. 5-го Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике. Алма-Ата: Наука, 1981, с. 29.

Бринеллю H_B (ГПа) для различных сплавов на основе магния, алюминия, титана и сталей и указаны конкретные марки сплавов [4]. По оси абсцисс отложены соответствующие значения плотности ρ ($10^{-3} \times \text{кг/м}^3$). Аппроксимируя эту связь линейной (наклонные линии на фиг. 1):

$$H_d(x) = A\rho(x) + B, \quad A = (H_2 - H_1)/(\rho_2 - \rho_1) \quad (1.3)$$

$$B = (H_1\rho_2 - H_2\rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$$

$$(\rho_1 \leq \rho(x) \leq \rho_2) \quad (H_1(\rho_1) \leq H_d(x) \leq H_2(\rho_2))$$

преобразуем уравнение (1.2) к виду

$$\frac{1}{2} M \frac{d(v^2)}{dL} = -2\pi \int_0^L \left\{ B + \rho(x) \left[A + \frac{[r'(\xi)]^2}{1 + [r'(\xi)]^2} v^2(L) \right] \right\} r(\xi) r'(\xi) d\xi \quad (1.4)$$

Критерием качества управляющей функции $\rho(x)$ является погонный вес пластины

$$I = \min \left\{ \int_0^{L_k} \rho(x) dx \right\} \quad (1.5)$$

где L_k — нефиксированная конечная глубина внедрения, при которой $v=0$.

2. В случае ударного внедрения цилиндра с плоским торцом уравнение (1.4) значительно упрощается. Сформулируем задачу в терминах теории оптимального управления ($y^1 = v^2$ — фазовая координата, $t=L$ — аналог времени, S — площадь поперечного сечения цилиндра):

$$dy^1/dt = -E[\rho(A+y^1) + B], \quad E = 2M/S \quad (2.1)$$

Итак, имеем автономную задачу (2.1) с закрепленным левым концом траектории $y^1|_{t=0} = v_0^2$ и свободным правым концом $y^1|_{t=t_k} = 0$ (t_k — нефиксированное время окончания процесса). Управление $\rho(t)$ с ограниче-

ниями $\rho_1 \leq \rho(t) \leq \rho_2$ ищется из условия минимума функционала $\int_0^{t_k} \rho(\tau) d\tau$

Гамильтониан системы (2.1): $h = \psi_0 \rho - \psi_1 E[\rho(A+y^1) + B]$.

Сопряженные переменные ψ_0, ψ_1 задаются уравнениями

$$d\psi_0/dt = -\partial h/\partial y^0 = 0, \quad d\psi_1/dt = -\partial h/\partial y^1 = E\rho\psi_1 \quad (2.2)$$

Для оптимальности процесса $(\rho_0(t), y_0(t))$ необходимо существование таких нетривиальных константы $\psi_0 \leq 0$ и функции $\psi_1(t)$, чтобы выполнялось условие максимума [5]:

$$\max_{\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2} h(\psi(t), y(t), t, \rho) = h(\psi(t), y(t), t, \rho_0(t)), \quad \psi = \{\psi_0, \psi_1\}, \quad y = \{y^0, y^1\}$$

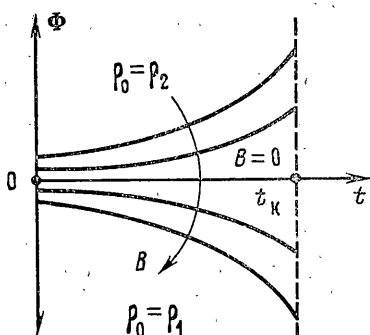
и условие трансверсальности

$$h(\psi(t_k), y(t_k), t_k, \rho_0(t_k)) = 0 \quad (2.4)$$

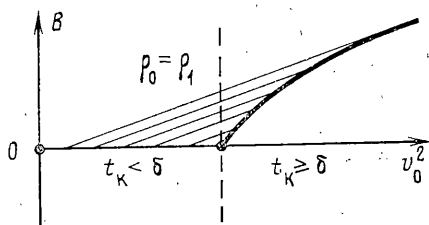
Последнее условие с учетом выражения для h и зависимости $\psi_1 = C_1 \exp(E \int \rho d\tau)$ ($0 \leq \tau \leq t$) (см. уравнение (2.2)) дает связь между постоянными ψ_0 и C_1 :

$$\psi_0 \rho_k - C_1 E(B + A\rho_k) \exp\left(E \int_0^{t_k} \rho_0 d\tau\right) = 0, \quad \rho_k = \rho_0(t_k)$$

Представим функцию h (поделенную на положительную постоянную — ψ_0 , случай $\psi_0 = 0$ исключается, так как при этом $C_1 = 0$, $\psi_1 = 0$ и на-



Фиг. 2.



Фиг. 3.

рушаются необходимые условия принципа максимума) в виде

$$h = \rho_0 \Phi + B \Phi_2, \quad \Phi = -1 + \rho_k \frac{A + y^1}{B + A \rho_k} \exp \left(-E \int_0^{t_k} \rho_0 d\tau \right) \quad (2.5)$$

Поскольку h зависит от ρ_0 линейно, оптимальное управление достигается на границах области допустимых управлений

$$\rho_0 = \rho_2 \text{ при } \Phi > 0, \quad \rho_0 = \rho_1 \text{ при } \Phi < 0 \quad (2.6)$$

Выясним условия, определяющие знак функции $\Phi(t)$ на сегменте $[0, t_k]$. С учетом второго уравнения системы (2.1) нетрудно показать, что

$$d\Phi/dt \sim -B \quad (2.7)$$

Знак функции Φ в конечный момент времени также определяется знаком постоянной B (см. (2.5)):

$$\Phi(t_k) = -B/(B + A\rho_k) \quad (2.8)$$

Из анализа (2.7) и (2.8) следует, что существует такой интервал $(t_*, t_k]$, внутри которого оптимальное управление постоянно $\rho_0 = \text{const } \forall t \in (t_*, t_k]$.

Для определения точки переключения управления t_* (точка, в которой $\Phi(t_*) = 0$) рассмотрим значение $\Phi(t)$ при $t = 0$:

$$\Phi_0 = -1 + \frac{\rho_k(A + v_0^2)}{B + A\rho_k} \exp \left(-E \int_0^{t_k} \rho_0 d\tau \right) \quad (2.9)$$

Будем искать условия существования постоянного оптимального управления $\rho_0 = \rho_k = \text{const}$, при котором $t_* \notin [0, t_k]$. Преобразуем (2.9) с помощью общего решения уравнения движения при $t = t_k, y^1 = 0$:

$$\Phi_0 = -B/[B + \rho_k(A + v_0^2)]$$

Поведение функции $\Phi(t)$ (см. фиг. 2) исключает существование точки переключения на отрезке $[0, t_k]$. Таким образом, в области $B > 0$ оптимальной является однородная легкая пластина $\rho_0 = \rho_1, H_{d0} = H_1$, а в области $B < 0$ — однородная тяжелая пластина $\rho_0 = \rho_2, H_{d0} = H_2, (H_{d0} = B + A\rho_0)$.

3. В случае ударного внедрения конуса уравнение движения (1.4) преобразуется к виду (α — угол полураствора конуса):

$$\frac{d(v^2)}{dL} = -E \left\{ B \frac{L^2}{2} + (A + kv^2) \int_0^L \rho(x) (L - x) dx \right\}$$

$$E = (4\pi/M) \text{tg}^2 \alpha, \quad k = \sin^2 \alpha$$

Непосредственное применение принципа максимума невозможно, так как правая часть уравнения движения (уравнения для фазовой координаты) содержит в явной форме функционал (1.5), т. е. содержит дополнительную фазовую координату y^0 . При этом сопряженная переменная ψ_0 уже не будет постоянной $d\psi_0/dt = -\partial h/\partial y^0 \neq 0$.

Чтобы обойти это затруднение, введем дополнительные фазовые координаты y^2, y^3 так, что основная система уравнений запишется в виде

$$\frac{dy^1}{dt} = -E \left[B \frac{t^2}{2} + (A + ky^1)y^2 \right], \quad \frac{dy^2}{dt} = y^3, \quad \frac{dy^3}{dt} = \rho \quad (3.1)$$

В начальный момент времени вектор фазовых координат закреплён $t=0$: $y^1=v_0^2$, $y^2=y^3=0$. Конечное значение вектора y_k принадлежит гладкому двумерному многообразию S_k евклидова пространства размерности $n=3$:

$$S_k: F_k(y_k^1, y_k^2, y_k^3) = y_k^1 = 0 \quad (3.2)$$

Из условия трансверсальности [5] для вектора сопряженных переменных $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ (условие ортогональности ψ к касательной плоскости многообразия S_k), следует

$$t=t_k: \quad \psi_2=0, \quad \psi_3=0 \quad (3.3)$$

Принцип максимума [5] формулируется теперь в виде соотношений (2.3), (3.3), условия, аналогичного равенству (2.4), и ограничения $\psi_0 \leq 0 - \text{const.}$

Гамильтониан системы имеет вид

$$h = (\psi_0 + \psi_3)\rho - \psi_1 E \left[B \frac{t^2}{2} + (A + ky^1)y^2 \right] + \psi_2 y^3 \quad (3.4)$$

Сопряженные переменные определяются дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} d\psi_1/dt &= Eky^2\psi_1, \\ d\psi_2/dt &= E(A + ky^1)\psi_1, \quad d\psi_3/dt = -\psi_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Интегрирование уравнений (3.5) совместно с условиями (2.4) и (3.3) даёт связь между константами ψ_0, C_1, C_2, C_3 .

Гамильтониан h представляет собой линейную функцию от ρ (см. (3.4)) с угловым коэффициентом $\Phi = \psi_0 + \psi_3$. Из соотношения (3.3) вытекает, что $\Phi(t_k) = \psi_0 < 0$. Следовательно, существует интервал $(t_*, t_k]$, в котором оптимальное управление $\rho_0 = \rho_1$, т. е. тыльный слой пластины всегда выполнен из более легкого и менее прочного материала. Из анализа полной производной $d\Phi/dt$ с учетом связей между постоянными ψ_0, C_1, C_2 следует, что функция Φ является монотонно убывающей, достигающей отрицательной величины ψ_0 при $t=t_k$. Если $\Phi|_{t=0} < 0$, то оптимальной является однородная легкая пластина, в противном случае Φ будет менять знак при $t=t_* \in (0, t_k)$, что соответствует двухслойной пластине с лицевым твердым слоем.

Выявим условия, когда $\Phi|_{t=0} \leq 0$, при этом $\rho_0 = \rho_k = \rho_1$. Используя общее решение уравнения движения для преобразования выражения $\Phi|_{t=0}$, получим

$$\Phi_0 = \frac{C_1 E}{\rho_k} B \int_0^{t_k} \tau \exp\left(Ek\rho_1 \frac{\tau^3}{6}\right) d\tau$$

Из связи между постоянными ψ_0, C_1 следует $C_1 < 0$, поэтому условие $\Phi|_{t=0} \leq 0$ выполняется при $B \geq 0$. Таким образом, при $B \geq 0$ оптимальной является однородная легкая пластина $\rho_0 = \rho_1$ (как и в случае удара цилинд-

ром), при $B < 0$ оптимальная пластина состоит из двух слоев (лицевой слой наиболее твердый $H_{a0} = H_2$, $\rho_0 = \rho_2$, тыльный слой $H_{a0} = H_1$, $\rho_0 = \rho_1$). При любых обстоятельствах вблизи тыльной поверхности должен располагаться легкий и мягкий материал ρ_1 , H_1 .

4. Рассмотрим динамическое внедрение в неоднородную пластину цилиндрического тела с конической головкой высотой δ . Система дифференциальных уравнений, описывающих поведение фазовых координат, разбивается в этом случае на две части:

$$\frac{dH}{dt} = \begin{cases} -E \left[\frac{1}{2} B t^2 + (A + k y^4) y^2 \right] & \text{при } t < \delta \\ -E \left[\frac{1}{2} B \delta^2 + (A + k y^4) y^2 \right] & \text{при } t \geq \delta \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\frac{dy^2}{dt} = \begin{cases} y^3 & \text{при } t < \delta \\ y^3 - \delta \rho(t - \delta) & \text{при } t \geq \delta \end{cases} \quad \frac{d\rho}{dt} = \begin{cases} \rho(t) & \text{при } t < \delta \\ \rho(t) - \rho(t - \delta) \dots & \text{при } t \geq \delta \end{cases}$$

Начальное и конечное положение вектора фазовых координат совпадает с соответствующим положением в предыдущей задаче. Несмотря на то что гамильтониан системы (4.1) имеет различный вид:

$$h = (\psi_0 + \psi_3) \rho(t) - \psi_1 E \left[\frac{1}{2} B t^2 + (A + k y^4) y^2 \right] + \dots - \psi_2 y^3 \quad \text{при } t < \delta \quad (4.2)$$

и

$$h = (\psi_0 + \psi_3) \rho(t) - (\delta \psi_2 - \psi_3) \rho(t - \delta) + \psi_2 y^3 - \psi_1 E \left[\frac{1}{2} B \delta^2 + (A + k y^4) y^2 \right] \quad \text{при } t \geq \delta$$

сопряженные переменные при $\forall t \in [0, t_k]$ определяются выражениями (3.5). В этой задаче предполагается, что начальное значение скорости v_0^2 таково, что заведомо выполняется условие $t_k > \delta$.

Как и ранее, справедлива определенная связь между постоянными ψ_0 , C_1 , C_2 , C_3 , а также соотношения $h|_{t=t_k} = \psi_0 \rho_k$ (откуда следует $\rho_k = \rho_1$):

$$\left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=0} = -C_2 < 0, \quad \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{t=t_k} = 0$$

Выявим условия, когда функция $\Phi|_{t=0} \leq 0$, при этом $\rho_0 = \rho_k = \rho_1$.

Анализ общего решения уравнений движения на первом и втором этапах позволяет заключить, что для выполнения неравенства $\Phi_0 \leq 0$ необходимо

$$B \geq \frac{(H_1 + k \rho_1 v_0^2) (t_k^2 - \delta^2)}{2F} > 0, \quad H_1 = B + A \rho_1 > 0 \quad (4.3)$$

$$F = \int_0^\delta \tau \exp\left(E k \rho_1 \frac{\tau^3}{6}\right) d\tau + \dots + \exp\left(-E k \rho_1 \frac{\delta^3}{3}\right) \int_0^{t_k} \tau \exp\left(E k \rho_1 \delta^2 \frac{\tau}{2}\right) d\tau$$

Если $B < 0$, то условие (4.3) заведомо нарушается и, следовательно, оптимальной становится двухслойная пластина с лицевым твердым слоем $\rho_0 = \rho_2$. Более того, двухслойная пластина будет оставаться оптимальной и для некоторых положительных значений B , не удовлетворяющих неравенству (4.3). Производя оценку правой части этого неравенства, найдем $(H_1 + k \rho_1 v_0^2) (t_k^2 - \delta^2) / (2F) \sim t_k$.

Время окончания процесса при $\rho = \text{const}$:

$$t_k = {}^2/3 \delta + (2/E k \rho_1 \delta^2) \ln(1 + v_0^2 k \rho_1 / H_1)$$

Таким образом, с ростом начальной скорости внедрения v_0 время окончания процесса t_k возрастает пропорционально $\ln v_0^2$, что определяет соот-

ветствующий рост нижней границы области параметра B , на которой справедливо условие $\rho_0 = \rho_1 - \text{const}$.

Объединяя результаты настоящего и предыдущего пунктов, получим области значений параметра B , определяющие структуру оптимальной пластины с учетом начальной скорости внедрения (см. фиг. 3). Нижней, незаптрихованной области фиг. 3 соответствует оптимальное управление $\rho_0 = \rho_2$ при $t \leq t_*$, $\rho_0 = \rho_1$ при $t > t_*$ ($0 < t_* < t_k$).

В заключение рассмотрим физический смысл параметра B , от значения которого (прежде всего от его знака) зависит оптимальная структура пластины. Выражение для B из (1.3) можно представить в виде

$$B = \rho_1 \rho_2 (H_1/\rho_1 - H_2/\rho_2) / (\rho_2 - \rho_1)$$

Так как $\rho_2 - \rho_1 > 0$, то знак определяется выражением, стоящим в круглых скобках. Величина H_d/ρ представляет собой динамическую твердость материала пластины, приходящуюся на единицу массы (удельная твердость), и является характеристикой качества материала в смысле, соответствующем данной постановке задачи. Условие $B > 0$ говорит о более высоком качестве материала с характеристиками ρ_1 , H_1 , среди всех материалов с качеством $H_d(\rho)/\rho$, $\forall \rho \in [\rho_1, \rho_2]$. Обратно, неравенство $B < 0$ дает максимальное качество материалу со свойствами ρ_2 , H_2 . При $B = 0$ $H_d(\rho)/\rho = A - \text{const}$, т. е. все материалы обладают одинаковым качеством — удельной динамической твердостью.

Исследование задач в пп. 3, 4 позволяет сделать вывод, что оптимальная пластина может объединять материалы с различным качеством, и это приводит к наилучшему результату для всего процесса в целом. Показано, что форма твердого тела оказывает существенное влияние на оптимальную структуру пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аптуков В. Н., Поздеев А. А. Некоторые минимаксные задачи технологии и прочности конструкций. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1982, № 1, с. 47–55.
2. Витман Ф. Ф., Степанов В. А. Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара 10^2 – 10^3 м/с. — В кн.: Некоторые проблемы прочности твердого тела. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1959, с. 207–221.
3. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях. / Под ред. Златина Н. А. и Мишина Г. И. М.: Наука, 1974. 344 с.
4. Бельский Е. И., Дмитриевич А. М., Ложечников Е. Б. Новые материалы в технике. Минск: Беларусь, 1971. 271 с.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. М., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

Пермь

Поступила в редакцию
27.II.1984