

УДК 539.374

## КОСОЙ УДАР ПО ПЛАСТИНЕ ИЗ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

ЗВЯГИН А. В., САГОМОНЯН А. Я.

Ударное взаимодействие твердого тела с деформируемой пластиной в общей постановке сводится к трехмерной нестационарной контактной задаче динамики упругопластических сред. Решение таких задач на ЭВМ требует больших затрат оперативной памяти и времени и практически стоит на пределе возможностей современной вычислительной техники. Поэтому наряду с созданием программ решения подобного рода задач в общей постановке усилия исследователей направлены на создание методов, позволяющих получить приближенные решения аналитически или численно на ЭВМ при существенном уменьшении затрат времени и оперативной памяти. Естественным требованием к такого рода приближенным решениям должна быть возможность оценки точности полученных результатов или совпадение их с результатами эксперимента с заданной точностью.

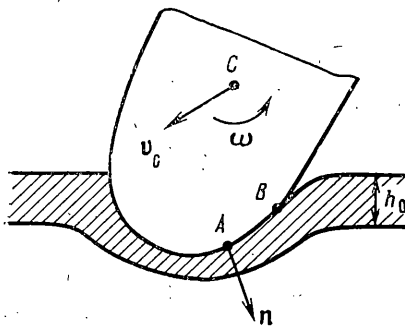
Целью исследования, приведенного в публикуемой статье, является создание, за счет определенных допущений, приближенной методики, расчета на ЭВМ ударного взаимодействия твердого тела с деформируемой пластиной. Литература, посвященная приближенным методам решения задач нестационарного взаимодействия твердых деформируемых тел, обширна. Количество работ, посвященных этой проблеме, увеличивается с каждым годом, что объясняется ее большой практической актуальностью [1–5].

**1. Постановка задачи. Основные предположения.** Процесс удара твердым телом по деформируемой пластине показан на фиг. 1, где  $h_0$  — начальная толщина пластины,  $C$  — положение центра тяжести жесткого тела,  $v_C$  — скорость центра тяжести,  $\omega$  — угловая скорость вращения тела,  $n$  — внешняя нормаль к поверхности тела в точке  $A$ ,  $B$  — точка (возможного) отрыва пластины от твердого тела. Пластина считается тонкой, так что возникающими при ударе волновыми процессами в пластине можно пренебречь. Материал пластины считается идеально пластической несжимаемой средой, подчиненной условию Мизеса [6, 7].

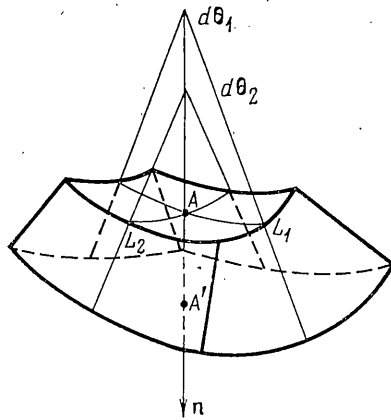
Введем следующие основные предположения: скорость каждой материальной точки преграды в данный момент времени направлена по нормали  $n$ , если точка  $A$  является точкой поверхности контакта тела и пластины (фиг. 1), и равна нулю, если соответствующая точка  $A$  не принадлежит к поверхности контакта; поверхность твердого тела выпуклая, гладкая.

Из первого предположения следует, что пластические деформации в данный момент времени возникают только в окрестности контакта. Покажем, что если в данный момент времени считать кинематику тела известной, то можно найти распределение деления по поверхности контакта и описать деформацию преграды.

Рассмотрим задачу определения давления в окрестности произвольной точки  $A$  поверхности контакта тела и преграды в рамках сделанных предположений. Для этого выделим бесконечно малый элемент поверхности контакта с центром в точке  $A$  и прилегающую к нему часть преграды, показанную на фиг. 2:  $A$  — выбранная точка поверхности контакта,  $n$  — нормаль к поверхности в точке  $A$ ,  $AL_1$ ,  $AL_2$  — отрезки линий главных кри-



Фиг. 1



Фиг. 2

визи поверхности,  $A'$  — пересечение нормали со свободной поверхностью пластины. Пусть  $R_1, R_2$  — радиусы главных кривизн в точке  $A$ . Из фиг. 2 нетрудно установить, что  $2|AL_1| = R_1 d\theta_1$ ,  $2|AL_2| = R_2 d\theta_2$ .

Введем локальную эйлерову систему координат с началом в точке  $A$ , две координатные линии которой совпадают с линиями главных кривизн, а третья направлена вдоль нормали  $n$  (обозначим ее  $r$ ). Согласно первому предположению, в данный момент времени  $t=t_0$  во введенной системе координат отлична от нуля только составляющая скорости вдоль нормали  $v_r = v_n$ . Отсюда следует, что тензор напряжений имеет только нормальные составляющие. Запишем уравнение движения сплошной среды в выбранной системе координат

$$\rho \left( \frac{\partial v_n}{\partial t} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial r} \right) = \frac{\partial \sigma_n}{\partial r} + \frac{\sigma_n - \sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_n - \sigma_2}{r_2} \quad (1.1)$$

где  $\rho$  — плотность материала пластины,  $r_1 = R_1 + r$ ,  $r_2 = R_2 + r$  — радиусы кривизн соответствующих координатных линий на поверхности контакта в окрестности точки  $A$ ,  $\sigma_1, \sigma_2$  — напряжения, действующие на площадках с нормальными, касательными соответствующим линиям главных кривизн,  $\sigma_n$  — напряжение, действующее по нормали к поверхности тела.

Отличные от нуля компоненты тензора скоростей деформаций соответственно равны

$$\epsilon_1 = v_n/r_1, \quad \epsilon_2 = v_n/r_2, \quad \epsilon_n = \partial v_n/\partial r \quad (1.2)$$

Условие несжимаемости материала пластины записывается в виде

$$v_n/r_1 + v_n/r_2 + \partial v_n/\partial r = 0 \quad (1.3)$$

Кроме того, компоненты дивергента тензора напряжений  $S_1, S_2, S_n$  удовлетворяют условию текучести Мизеса

$$(S_n - S_1)^2 + (S_n - S_2)^2 + (S_1 - S_2)^2 = 12\tau^2 \quad (1.4)$$

и связаны с компонентами тензора скоростей деформаций (1.2) ассоциированным законом течения

$$v_n/r_1 = \lambda S_1, \quad v_n/r_2 = \lambda S_2, \quad \partial v_n/\partial r = \lambda S_n \quad (1.5)$$

где  $\tau$  — предел текучести при сдвиге,  $\lambda > 0$ .

Уравнение неразрывности (3) можно проинтегрировать по координате  $r$ . В результате получим

$$v_n(r, t) = C(t)/(r_1 r_2) \quad (1.6)$$

Пусть  $v_0(t)$  — нормальная составляющая скорости поверхности тела при  $t \geq t_0$ . Из граничного условия на контактной поверхности тела и пластины, используя зависимость (1.6), определяется функция времени  $C(t)$ . Окончательное распределение скорости в пластине будет следующим:

$$v_n(r, t) = \left[ R_1 + \int_{t_0}^t v_0(\tau) d\tau \right] \left[ R_2 + \int_{t_0}^t v_0(\tau) d\tau \right] \frac{v_0(t)}{(R_1+r)(R_2+r)} \quad (1.7)$$

Для определения напряжений воспользуемся уравнениями (1.5) и условием равенства нулю первого инварианта девиатора тензора напряжений. Это приведет к соотношениям  $S_1 = S_2 r_1 / r_2$ ,  $S_n = -(S_1 + S_2)$ . Эти соотношения и условие Мизеса (1.4) определяют компоненты девиатора напряжений

$$S_1 = \frac{\sqrt{2} \tau r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}}, \quad S_2 = \frac{\sqrt{2} \tau r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}}, \quad S_n = -(S_1 + S_2) \quad (1.8)$$

Знаки в равенствах (1.8) выбраны с учетом выражений (1.5), в которых ( $\lambda > 0$ ,  $v_n > 0$ ) найденные значения скорости  $v_n$  и компоненты девиатора напряжений  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_n$  позволяют проинтегрировать уравнение движения (1.1) по  $r$ . Для этого необходимо подставить выражения (1.7), (1.8) в уравнение (1.1) и проинтегрировать при  $t = t_0$  от  $r = 0$  до  $r = h$ , где  $h$  — толщина деформированной пластины (расстояние до тыльной свободной поверхности). Учитывая, что  $-\sigma_n(0, t)$  есть давление на поверхность жесткого тела в точке контакта, найдем его значение в двух возможных случаях:

$$P_A(t_0) = 2\sqrt{6} \tau \ln \left( 1 + \frac{h}{R} \right) + \rho \left[ 2v_0^2(t_0) + R \frac{dv_0}{dt} \right] \frac{h}{R+h} - \rho v_0^2(t_0) \frac{h(h+2R)(h^2+2Rh+2R^2)}{2(R+h)^2}, \quad R_1 = R_2 = R \quad (1.9)$$

$$P_A(t_0) = 2\sqrt{2} \tau \left\{ \sqrt{3} \ln \frac{2\sqrt{3} \chi + 3(R_1+h) + 3(R_2+h)}{2\sqrt{3} \sqrt{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2} + 3(R_1+R_2)} + \text{sign}(R_1 - R_2) \ln \left| \frac{[2\chi - (R_1+h) - 2(R_2+h)](R_2+h)}{[2\chi + 2(R_1+h) + (R_2+h)](R_1+h)} \right| + \text{sign}(R_1 - R_2) \ln \left| \frac{R_1(2\sqrt{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2} + 2R_1 + R_2)}{R_2(2\sqrt{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2} - R_1 - 2R_2)} \right| \right\} + \rho \left[ (R_1 + R_2) v_0^2(t_0) + R_1 R_2 \frac{dv_0}{dt} \right] \frac{1}{R_1 - R_2} \ln \frac{R_1(R_2+h)}{R_2(R_1+h)} - \rho v_0^2(t_0) \frac{h(h+R_1+R_2)[h^2 + (R_1+R_2)h + 2R_1 R_2]}{2(R_1+h)^2(R_2+h)^2}, \quad (R_1 \neq R_2) \quad (1.10)$$

$$\chi = [(R_1+h)^2 + (R_1+h)(R_2+h) + (R_2+h)^2]^{1/2}$$

Формулы (1.9) или (1.10) полностью определяют давление для любого момента времени  $t = t_0$ , если известны нормальные составляющие скорости и ускорения в рассматриваемой точке поверхности жесткого тела и толщина преграды  $h$  — расстояние по нормали от точки до тыльной свободной поверхности пластины.

Описать деформацию преграды в окрестности точки  $A$  можно определив смещение  $u$  и лицевой поверхности преграды и изменение ее толщины.

Поскольку распределение скоростей известно, смещение и новая толщина пластины вычисляются по формулам ( $\Delta t = t - t_0$ ):

$$u(t) \cong v_0(t_0) \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t^2 dv_0/dt \quad (1.11)$$

$$h(t) \cong h(t_0) - \frac{h(t_0)[h(t_0) + R_1 + R_2]}{[R_1 + h(t_0)][R_2 + h(t_0)]} \left[ v_0(t_0) \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{dv_0}{dt} \right] + \frac{(R_1 + R_2)v_0^2(t_0)\Delta t^2}{2[R_1 + h(t_0)][R_2 + h(t_0)]} \quad (1.12)$$

Формулы (1.9)–(1.12) позволяют определить давление в точках контактной поверхности и деформации пластины. Если в процессе взаимодействия толщина пластины остается конечной, то процесс взаимодействия может завершиться рикошетом жесткого тела от поверхности преграды.

## 2. Численное моделирование взаимодействия тела с деформируемой преградой.

На основе результатов, полученных в п. 1, можно предложить следующую методику расчета взаимодействия тела с пластиной. Зададимся некоторым шагом по времени  $\Delta t$ . Пусть в момент  $t = t_0$  известны положение, скорость, ускорение любой точки твердого тела, а также геометрия преграды. Определим положение тела и деформацию преграды в момент времени  $t = t_0 + \Delta t$ . Контактными будем считать те точки поверхности, для которых выполнены условия: точка находится в контакте с преградой или восстанавливает контакт в некоторый момент времени  $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$ ; проекция скорости точки тела на внешнюю нормаль к поверхности положительна.

Проникающее тело считается абсолютно жестким, поэтому в точках контакта кривизна поверхности мишени совпадает с кривизной поверхности тела.

На первом этапе расчета определим распределение давления на поверхности контакта, пользуясь формулами (1.9) или (1.10), в зависимости от значений  $R_1, R_2$ . По полученному распределению давления находим новое ускорение тела и его положение в момент  $t_0 + \Delta t$ .

На втором этапе расчетов определяем геометрию преграды, пользуясь формулами (1.11), (1.12). Формализация данной схемы для расчетов на ЭВМ происходит следующим образом. Поверхность жесткого тела разбивается на элементарные площадки, в центре которых находятся расчетные точки. Геометрия преграды описывается положением двух поверхностей: лицевой и тыльной. Для каждой расчетной точки тела определены расстояние по нормали до лицевой поверхности и толщины преграды.

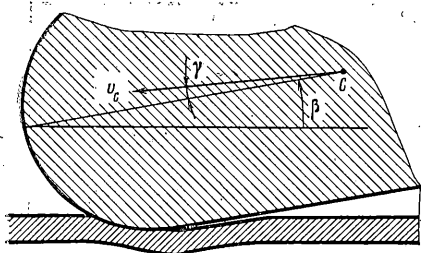
Расчетная точка лицевой поверхности преграды смещается в направлении нормали на величину  $u(t)$  из выражения (1.11), расчетная точка тыльной поверхности определяется новой толщиной преграды из (1.12). Если контакта нет, то расчетные точки поверхности остаются на месте. Вычислив таким образом новые координаты расчетных точек поверхностей и определив с помощью действующих на тело силы и момента новое положение тела, можно для каждой точки тела определить новое расстояние до лицевой поверхности и новую толщину. Этими действиями завершается расчетный этап, поскольку на новом шаге по времени задача сводится к исходной. Устойчивость счета определяется разбиением тела и выбором шага по времени. Критерием устойчивости при расчетах служит проверка совпадения с заданной точностью траекторий движения тела при уменьшении временного шага.

Ниже приводятся результаты некоторых расчетов по изложенной схеме. В качестве жесткого тела рассмотрена полусфера, гладко стыкованная с цилиндром. При расчетах использовались следующие численные значения параметров:  $h_0 = 0,04$  м; предел текучести при сдвиге  $\tau = 4,6 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>; скорость тела в начале взаимодействия 500 м/с;  $R = 0,2$  м; масса тела 300 кг; момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести, 30 кг·м<sup>2</sup>; расстояние от передней части тела до центра тяжести 0,5 м.

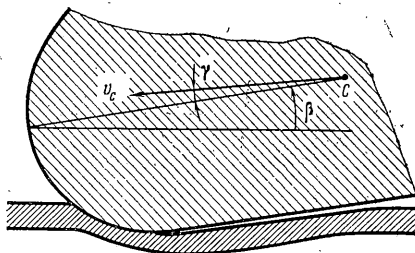
В качестве примеров приведены два крайних случая соударения, отличающихся начальным углом встречи тела и пластины. Пусть  $\beta$  — угол между осью тела и плоскостью пластины. На фиг. 3–6 представлены результаты расчетов для  $\beta = 10^\circ$ , а на фиг. 7 — для  $\beta = 90^\circ$ . Рисунки на фигурах соответствуют меридиональному сечению тела в плоскости движения и изображены в масштабе 1:4.

Значения характерных параметров на фиг. 3–6 равны

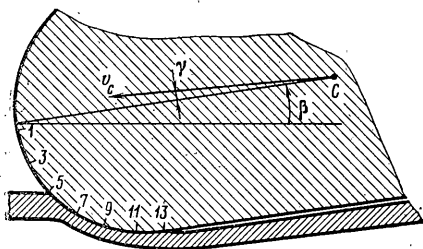
$t$ (с)	$v_c$ (м/с)	$\omega$ (1/с)	$\beta$	$\gamma$
$2,85 \cdot 10^{-4}$	499	11	$80,1^\circ$	$4,0^\circ$
$5,82 \cdot 10^{-4}$	495	36	$80,5^\circ$	$4,3^\circ$
$8,78 \cdot 10^{-4}$	491	68	$81,3^\circ$	$3,5^\circ$
$13,20 \cdot 10^{-4}$	485	102	$83,5^\circ$	$2,5^\circ$



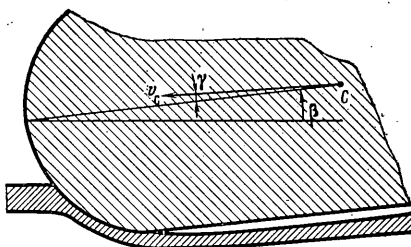
Фиг. 3



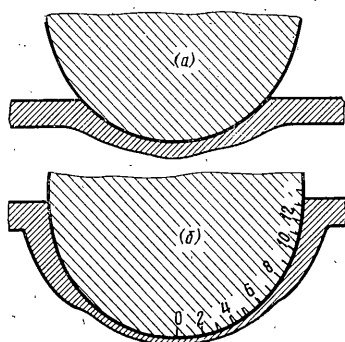
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

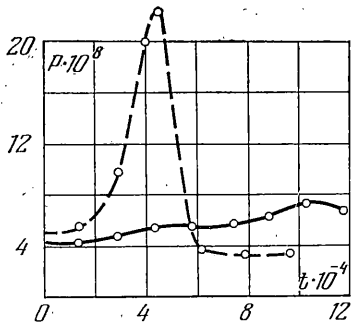


Фиг. 7

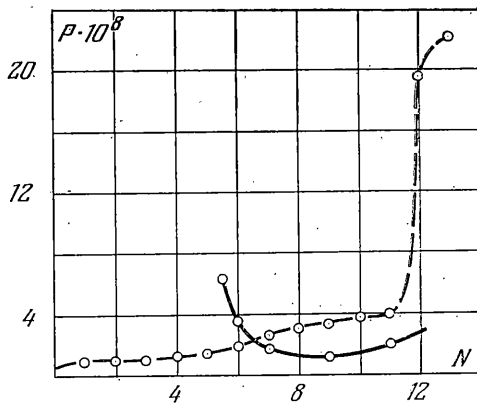
Как показывают расчеты, при наклонном проникании угловая скорость  $\omega$  возрастает во все рассмотренное время движения, общий поворот тела за это время составил  $4^\circ$ . Скорость центра тяжести  $v_c$  уменьшилась с 500 до 485 (м/с), при этом в основном уменьшилась составляющая скорости, перпендикулярная плоскости пластины. Рассмотренный случай соответствует рикошету.

Нормальное проникание интересно с точки зрения сопоставления с наклонным по характеру возникающих в пластине деформаций (фиг. 7, а соответствует  $t = 1,37 \cdot 10^{-4}$ ,  $v_c = 494$ , фиг. 7, б —  $t = 4,50 \cdot 10^{-4}$ ,  $v_c = 453$ ). Для иллюстрации величины и распределения давления по поверхности тела построены следующие графики. На фиг. 8 приведена зависимость от времени максимального распределенного давления по поверхности. Сплошная линия соответствует наклонному прониканию, пунктирная — нормальному. Отметим, что максимальное давление на приведенных графиках соответствует различным точкам поверхности тела.

Для выяснения того, каким точкам тела соответствует максимум давления, на фиг. 9 показано распределение давления по поверхности тела в фиксированный момент времени. Сплошная линия соответствует наклонному прониканию в момент времени  $t = 8,78 \cdot 10^{-4}$  (фиг. 5), пунктирная линия — нормальному прониканию  $t = 4,50 \cdot 10^{-4}$  (фиг. 7, б). По оси абсцисс отложены номера точек поверхности тела, показанные на фиг. 5, 7. Отметим, что для других моментов времени характер



Фиг. 8



Фиг. 9

распределения давления по поверхности, приведенной на фиг. 9, сохраняется, т. е. максимальное давление при наклонном проникании (фиг. 4–6) действует на левой границе контактной области. Для нормального проникания максимум давления также соответствует границе области контакта.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Backman M. E., Goldsmith W. The mechanics of penetration of projectiles into targets.— Intern. J. Engng. Sci., 1978, v. 16, No. 1, p. 1–99.
2. Багшиян Ф. А. К вязкопластическому течению при ударе цилиндра по пластине.— ПММ, 1948, т. 12, вып. 1, с. 47–52.
3. Recht R. F., Ipson T. W. Ballistic Perforation Dynamics.— Trans. ASME. Ser. E. J. App. Mech., 1963, v. 30, No. 3, p. 384–390.
4. Сагомонян А. Я. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
5. Сагомонян А. Я. К задаче пробивания преграды цилиндрическим бойком.— Вестн. МГУ. Механика, математика, 1977, № 5, с. 111–120.
6. Ильюшин А. А. Пластичность. М.—Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 376 с.
7. Ключников В. Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 207 с.

Москва

Поступила в редакцию  
11.XI.1983