

УДК 539.3:534.1

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД
В ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ
ИЗОТРОПНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

ДЕНИСОВ В. Н., ЖИНЖЕР Н. И.

Асимптотический метод [1] нашел широкое применение для исследования спектров малых собственных колебаний и устойчивости при потенциальных внешних силах упругих пластин [2, 3], оболочек [4-7] и конструкций [8], а также в задачах динамики при широкополосных внешних воздействиях [9, 10]. Применение метода к упрощенным уравнениям нелинейных колебаний упругих изотропных пластин сделано в [11]. В публикуемой статье асимптотический метод применяется к уравнениям Кармана нелинейных колебаний изотропных прямоугольных пластин. Результаты вычислений по асимптотическому методу показывают хорошее совпадение с имеющимися в литературе [2, 13] данными даже для низших частот. Дается сопоставление с результатами [11, 14], полученными для упрощенных уравнений.

1. Рассмотрим прямоугольную в плане со сторонами a_1 и a_2 тонкую упругую изотропную пластину, являющуюся, например, частью обшивки и связанную по контуру с подкрепляющей конструкцией. Отнесем ее срединную плоскость к декартовой системе координат Ox_1x_2 и собственные нелинейные колебания будем описывать уравнениями Кармана

$$D\Delta\Delta w - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta \chi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \quad (1.2)$$

Здесь $w(x_1, x_2, t)$ — прогиб, $\chi(x_1, x_2, t)$ — функция усилий в срединной плоскости, E — модуль упругости, h — толщина, D — цилиндрическая жесткость, ρ — плотность материала пластины, Δ — оператор Лапласа. Система уравнений (1.1) и (1.2) должна быть дополнена соответствующими граничными условиями на контуре пластины с учетом его деформации. При этом для функции усилий в срединной плоскости $\chi(x_1, x_2, t)$ будем формулировать граничные условия «в среднем». Дополнительно предположим, что точки пластины могут смещаться вдоль контура, и поэтому тангенциальные сдвигающие усилия на кромках пластины равны нулю.

В соответствии с асимптотическим методом [1] ищем порождающее решение во внутренней области пластины в виде

$$w_0(x_1, x_2, t) = f(t) \sin k_1(x_1 - \xi_1) \sin k_2(x_2 - \xi_2) \quad (1.3)$$

$$\chi_0(x_1, x_2, t) = \frac{Eh}{32} f^2(t) \left[\frac{k_2^2}{k_1^2} \cos 2k_1(x_1 - \xi_1) + \right. \\ \left. + \frac{k_1^2}{k_2^2} \cos 2k_2(x_2 - \xi_2) \right] + f^2(t) \left(\frac{1}{2} N_{11}^0 x_2^2 + \frac{1}{2} N_{22}^0 x_1^2 \right) \quad (1.4)$$

Здесь k_1, k_2 и ξ_1, ξ_2 — неизвестные волновые числа и фазы, $f(t)$ — неизвестная функция времени, N_{11}^0 и N_{22}^0 — постоянные, которые можно определить из тангенциальных граничных условий. Заметим, что порождающее решение (1.3), (1.4) точно удовлетворяет уравнению (1.2)

Система уравнений (1.1) и (1.2) вытекает из вариационного принципа Гамильтона — Остроградского

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} L(w, \chi) dx_1 dx_2 dt = 0 \quad (1.5)$$

$$L = \frac{1}{2} \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - \frac{D}{2} \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} + \frac{1}{2} \frac{1}{Eh} \left\{ (\Delta \chi)^2 - 2(1+\nu) \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right] \quad (1.6)$$

Будем предполагать, что порождающему решению (1.3) для формы прогиба соответствует большое число полуволн $\lambda_1 = \pi/k_1$, $\lambda_2 = \pi/k_2$ в обоих направлениях. Узловые линии формы прогиба разбивают область, занятую пластиной, на достаточно большое число прямоугольных ячеек площадью $\lambda_1 \lambda_2$. Для произвольной ячейки во внутренней области вычислим осредненную плотность лагранжиана

$$\langle L(f) \rangle = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \int_0^{\lambda_1} \int_0^{\lambda_2} L(w_0, \chi_0) d\eta_1 d\eta_2, \quad \eta_1 = x_1 - \xi_1, \quad \eta_2 = x_2 - \xi_2 \quad (1.7)$$

С учетом выражений (1.3) и (1.4) из (1.7) находим ($f' \equiv df/dt$):

$$\langle L \rangle = \frac{1}{8} \rho h f'^2 - \frac{1}{8} D (k_1^2 + k_2^2)^2 f^2 - \left\{ \frac{1}{256} (k_1^4 + k_2^4) / (Eh) + \frac{1}{8} (k_1^2 N_{11}^0 + k_2^2 N_{22}^0) - \frac{1}{2} [(N_{11}^0 + N_{22}^0)^2 - 2(1+\nu) N_{11}^0 N_{22}^0] \right\} f^4 / (Eh) \quad (1.8)$$

Неизвестную функцию $f(t)$ найдем из вариационного принципа

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \langle L(f) \rangle dt = 0 \quad (1.9)$$

который приводит к уравнению

$$\frac{\rho h}{D} f'' + (k_1^2 + k_2^2)^2 f + \frac{3(1-\nu^2)}{4h^2} \left[k_1^4 + k_2^4 + \frac{32}{Eh} (k_1^2 N_{11}^0 + k_2^2 N_{22}^0) + 4(1+\nu) \left(\frac{8}{Eh} \right)^2 N_{11}^0 N_{22}^0 - 2 \left(\frac{8}{Eh} \right)^2 (N_{11}^0 + N_{22}^0)^2 \right] f^3 = 0 \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) интегрируется в эллиптических функциях Якоби. Положим в (1.10) $f(t) = f_0 \operatorname{sn}(pt, k)$, $p = 2K\omega/\pi$, где k — модуль эллиптической функции, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, ω — собственная частота нелинейных колебаний. В результате подстановки получим тождество по t , если

$$\omega^2 = \frac{D}{\rho h} \left(\frac{\pi}{2K} \right)^2 \left\{ (k_1^2 + k_2^2)^2 + \frac{3(1-\nu^2)}{4} \left(\frac{f_0}{h} \right)^2 \left[k_1^4 + k_2^4 + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{32}{Eh} (k_1^2 N_{11}^0 + k_2^2 N_{22}^0) + 4 \left(\frac{8}{Eh} \right)^2 (1+\nu) N_{11}^0 N_{22}^0 - 2 \left(\frac{8}{Eh} \right)^2 (N_{11}^0 + N_{22}^0)^2 \right\} \quad (1.11)$$

$$k^2 = \frac{3}{8} \frac{(1-\nu^2)}{p^2 \rho h} \left[k_1^4 + k_2^4 + \frac{32}{Eh} (k_1^2 N_{11}^0 + k_2^2 N_{22}^0) + 4 \left(\frac{8}{Eh} \right)^2 (1+\nu) N_{11}^0 N_{22}^0 - 2 \left(\frac{8}{Eh} \right)^2 (N_{11}^0 + N_{22}^0)^2 \right] \quad (1.12)$$

При $f_0/h \ll 1$ имеем $k \rightarrow 0$, $K(k) \rightarrow \pi/2$ и формула (1.11) переходит в асимптотическую формулу для собственных частот малых колебаний пластин.

Для определения постоянных N_{11}^0 и N_{22}^0 вычислим во внутренней области пластины, где справедливо порождающее решение (1.3), (1.4), следующие величины:

$$\langle N_{11} \rangle = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \int_0^{\lambda_1} \int_0^{\lambda_2} \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial x_2^2} d\eta_1 d\eta_2 = N_{11}^0 f_0^2 \operatorname{cn}^2(pt, k), \quad (1.13)$$

$$\langle N_{22} \rangle = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \int_0^{\lambda_1} \int_0^{\lambda_2} \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial x_1^2} d\eta_1 d\eta_2 = N_{22}^0 f_0^2 \operatorname{cn}^2(pt, k) \quad (1.14)$$

$$\langle e_{11} \rangle = -(\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \int_0^{\lambda_1} \int_0^{\lambda_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} d\eta_1 d\eta_2, \quad \langle e_{22} \rangle = -(\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \int_0^{\lambda_1} \int_0^{\lambda_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} d\eta_1 d\eta_2$$

где $u_\alpha(x_1, x_2, t)$ — тангенциальное перемещение точек срединной плоскости в направлении оси x_α . Величина $\langle e_{\alpha\alpha} \rangle$ имеет смысл осредненного относительного сближения в направлении оси x_α двух соседних узловых линий формы прогиба.

Воспользовавшись кинематическими соотношениями нелинейной теории пластин $\epsilon_{11} = \partial u_1 / \partial x_1 + 1/2 (\partial w / \partial x_1)^2$, $\epsilon_{22} = \partial u_2 / \partial x_2 + 1/2 (\partial w / \partial x_2)^2$ и законом Гука, выразим $\partial u_1 / \partial x_1$ и $\partial u_2 / \partial x_2$ через функции порождающего решения w_0 и χ_0 . После подстановки выражений для них в (1.14) получаем

$$\langle e_{11} \rangle = (-N_{11}^0 + \nu N_{22}^0 + 1/8 E h k_1^2) f_0^2 \operatorname{cn}(pt, k) \quad (1.15)$$

$$\langle e_{22} \rangle = (\nu N_{11}^0 - N_{22}^0 + 1/8 E h k_2^2) f_0^2 \operatorname{cn}(pt, k)$$

Обозначим через β_α коэффициент податливости подкрепляющей конструкции по отношению к сближению кромок в направлении оси x_α .

Тогда можно записать $\langle e_{11} \rangle a_1 / \beta_1 = \langle N_{11} \rangle$, $\langle e_{22} \rangle a_2 / \beta_2 = \langle N_{22} \rangle$. После подстановки сюда выражений (1.13) и (1.15) получаем два уравнения, из которых находим ($\gamma_1 = \beta_1 / a_1$, $\gamma_2 = \beta_2 / a_2$):

$$N_{11}^0 = \frac{Eh}{8} \frac{(1+\gamma_2)k_1^2 + \nu k_2^2}{(1+\gamma_1)(1+\gamma_2) - \nu^2}, \quad N_{22}^0 = \frac{Eh}{8} \frac{(1+\gamma_1)k_2^2 + \nu k_1^2}{(1+\gamma_1)(1+\gamma_2) - \nu^2} \quad (1.16)$$

Если кромки $x_\alpha = 0$ и $x_\alpha = a_\alpha$ не могут иметь взаимных сближений, то $\gamma_\alpha = 0$; если же подкрепляющая конструкция не препятствует их взаимному сближению, то $\gamma_\alpha \rightarrow \infty$.

Итак, на данном этапе неопределенными параметрами порождающего решения w_0 , χ_0 остаются волновые числа k_1 , k_2 и фазы ξ_1 , ξ_2 , а асимптотическая формула для частоты (1.11) с учетом выражений (1.16) содержит только неизвестные волновые числа. При этом функция χ_0 удовлетворяет в среднем граничным условиям. Параметр f_0 имеет смысл начальной амплитуды прогиба.

2. Если на кромках пластины заданы условия шарнирного опирания для прогиба, то порождающее решение (1.3) удовлетворяет граничным условиям, если $\xi_1 = \xi_2 = 0$ и $k_1 = m_1 \pi / a_1$, $k_2 = m_2 \pi / a_2$ ($m_1, m_2 = 1, 2, \dots$). Другим типам граничных условий решение (1.3) не удовлетворяет, а волновые числа и фазы остаются неизвестными. В соответствии с основной идеей асимптотического метода [1] порождающее решение в окрестности кромок следует скорректировать решениями типа динамического краевого эффекта. При этом должны быть удовлетворены граничные условия, а при удалении во внутрь области скорректированное решение должно стремиться к порождающему.

Рассмотрим кромку $x_1 = 0$, и пусть на ней заданы для прогиба, например, условия защемления $w = \partial w / \partial x_1 = 0$ ($x_1 = 0$). В полуплоскости $x_1 > 0$ будем искать решение уравнения (1.1) в виде

$$w(x_1 | 0; x_2, t) = W(x_1 | 0) \sin k_2 (x_2 - \xi_2) f_0 \operatorname{cn}(pt, k) \quad (2.1)$$

где ω и k имеют выражения (1.11) и (1.12). Неизвестную функцию W будем определять из вариационного уравнения

$$\delta \int_0^\infty \langle L_1(W) \rangle dx_1 = 0, \quad \langle L_1 \rangle = (\lambda_2 T)^{-1} \int_0^T \int_0^{T \lambda_2} L(w, \chi_0) d\eta_2 dt \quad (2.2)$$

где $T = 2\pi/\omega$ — период собственных колебаний, а w определяется формулой (2.1). В результате приходим к уравнению

$$W^{IV} - b_1 W'' - [b_2 - b_3 \cos 2k_1 (x_1 - \xi_1)] W = 0 \quad (2.3)$$

$$b_1 = 2k_2^2 + 3/4 (1 - \nu^2) A_2(k) (f_0^2/h) (k^2 + 2N_1)$$

$$b_2 = (\rho h/D) p^2 A_1(k) - k_2^4 - 3/2 (1 - \nu^2) A_2(k) k_2^2 N_2$$

$$b_3 = \frac{3}{2} (1 - \nu^2) \left(\frac{f_0}{h}\right)^2 A_2(k) k_2^4, \quad N_1 = \left(\frac{Eh}{8}\right)^{-1} N_{11}^0, \quad N_2 = \left(\frac{Eh}{8}\right)^{-1} N_{22}^0$$

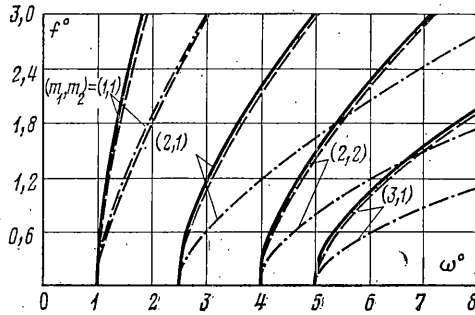
$$A_1(k) = \frac{2}{3} \frac{k^2 E(k)}{E(k) - (1 - k^2) K(k)} - \frac{1}{3},$$

$$A_2(k) = \frac{(4k^2 - 2) E(k) + (3k^4 - 5k^2 + 2) K(k)}{3k_2 [E(k) - (1 - k^2) K(k)]}$$

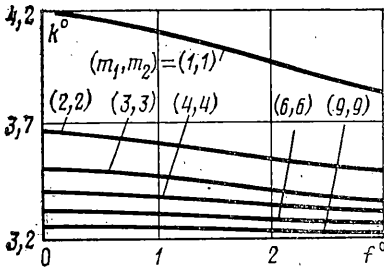
где $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. При $f_0/h \rightarrow 0$ уравнение (2.3) совпадает с уравнением для динамических краевых эффектов малых колебаний пластин. Решение уравнения (2.3) ищем в виде $W = \sum C_m \exp[r + i2mk_1(x_1 - \xi_1)]$ (m изменяется от $-\infty$ до ∞). После подстановки в (2.3) получаем бесконечную линейную систему однородных уравнений относительно коэффициентов C_m . Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к уравнению

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots 0 & 0 & -1/2 b_3 & (r + i2k_1)^4 - & -1/2 b_3 \dots \\ & & & -b_1(r + i2k_1)^2 - b_2 & \\ \dots 0 & -1/2 b_3 & \boxed{r^4 - b_1 r^2 - b_2} & -1/2 b_3 & 0 \dots \\ \dots -1/2 b_3 & (r - i2k_1)^4 - & -1/2 b_3 & 0 & 0 \dots \\ & -b_1(r - i2k_1)^2 - b_2 & & & \end{vmatrix} = 0 \quad (2.4)$$

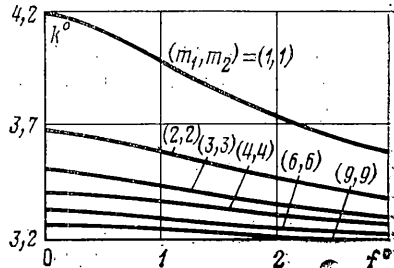
Ограничившись нулевым приближением, приравняем нулю центральный элемент определителя $r^4 - b_1 r^2 - b_2 = 0$. Это уравнение имеет два чисто мнимых корня, которые связаны с порождающим решением (1.3), и два



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

вещественных корней, один из которых всегда отрицателен

$$r = - \left\{ k_2^2 + \frac{3(1-\nu^2)}{4} \left(\frac{f_0}{h} \right)^2 (k_1^2 + 2N_1) A_2 + \left[\frac{3(1-\nu^2)}{4} k_2^2 \left(\frac{f_0}{h} \right)^2 (k_1^2 + 2N_1) A_2 + \frac{9(1-\nu^2)^2}{64} \left(\frac{f_0}{h} \right)^4 (k_1^2 + 2N_1)^2 A_2^2 + \frac{\rho h}{D} p^2 A_1 - \frac{3(1-\nu^2)}{2} \left(\frac{f_0}{h} \right)^2 k_2^2 N_2 A_2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (2.5)$$

Таким образом, скорректированное решение (2.6)

$$w(x_1|0; x_2, t) = [\sin k_1(x_1 - \xi_1) + C_0 \exp(-|r|x_1)] \sin k_2(x_2 - \xi_2) f_0 \operatorname{cn}(pt, k)$$

обладает достаточным числом параметров, чтобы удовлетворить граничным условиям, и совпадает с порождающим решением при $x_1 \rightarrow \infty$. Динамический краевой эффект при нелинейных колебаниях пластин не выражается.

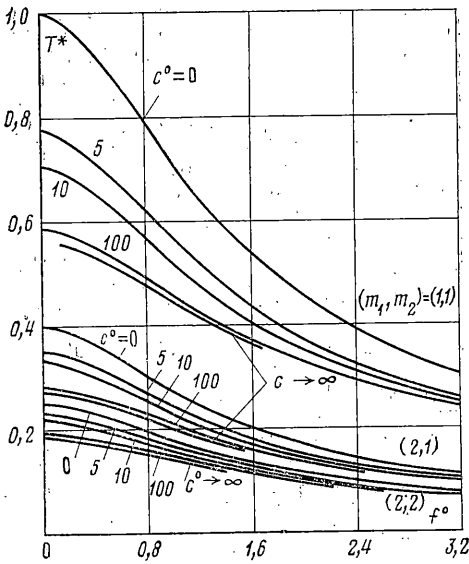
Удовлетворяя граничным условиям, получаем два уравнения, из которых находим

$$\operatorname{tg} k_1 \xi_1 = k_1 / |r| = F_{11}(k_1, k_2, f_0/h), \quad C_0 = k_1 / \sqrt{k_1^2 + r^2} \quad (2.7)$$

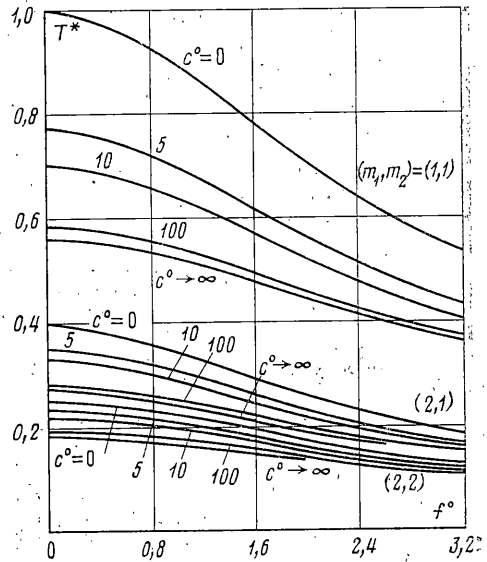
Если защемленной является кромка $x_2 = 0$, то соответствующее решение $w(x_1, x_2|0; t)$ получается из (2.6) путем круговой замены индексов у переменных и у волновых чисел. Выражения для $\operatorname{tg} k_2 \xi_2 = F_{21}(k_1, k_2, f_0/h)$ и C_0 получаем из (2.7) заменой индексов у волновых чисел. Таким же способом можно найти тангенс фазовой постоянной F_{11} для других типов однородных граничных условий на кромке $x_1 = 0$ и составить таблицу подобно случаю малых колебаний.

Решение в окрестности противоположной кромки $x_1 = a_1$ строится аналогично

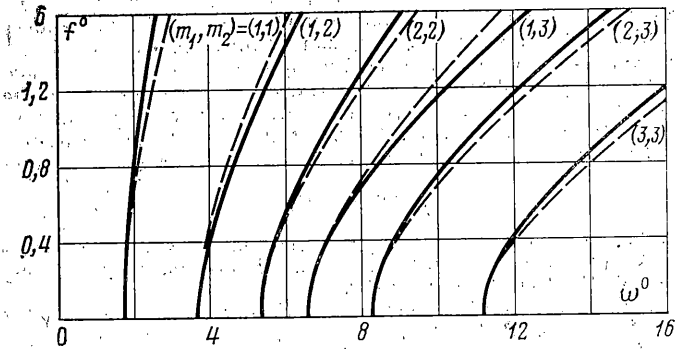
$$w(x_1|a_1; x_2, t) = \{\sin k_1(x_1 - \xi_1 - a_1) + C_0 \exp[|r|(x_1 - a_1)]\} \sin k_2(x_2 - \xi_2) f_0 \operatorname{cn}(pt, k) \quad (2.8)$$



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Если кромка $x_1=a_1$ закреплена, то $F_{12}(k_1, k_2, f_0/h) = F_{11}(k_1, k_2, f_0/h)$ и выражение для C_0 совпадает с (2.7). Поэтому достаточно вычислить $\operatorname{tg} k_1 \xi_1$ и C_0 для всех типов граничных условий только для кромки $x_1=0$.

Уравнение для отыскания неизвестных волновых чисел k_1 и k_2 получается, как и для линейных задач, в результате процедуры стыковки. Решения, построенные у противоположных кромок, должны совпадать во внутренней области с точностью до динамических краевых эффектов. Это приводит к уравнениям стыковки

$$k_1 a_1 = \operatorname{arctg} F_{11} + \operatorname{arctg} F_{12} + m_1 \pi \quad k_2 a_2 = \operatorname{arctg} F_{21} + \operatorname{arctg} F_{22} + m_2 \pi \quad (2.9)$$

где m_1 и m_2 — целые положительные числа. Стыковка производных любого порядка от решения приводит к тем же уравнениям (2.9).

3. Для всяких наборов целых чисел m_1, m_2 метод итерации для системы (2.9) быстро сходится при любых значениях f_0/h . На фигурах приведены зависимости безразмерной частоты $\omega^0 = \omega/\omega_0$ от безразмерной амплитуды $f^0 = f_0/h$, где $\omega_0^2 = 4\pi^2 D / (a_1^4 \rho h)$.

Сплошными и штрихпунктирными линиями на фиг. 1 обозначены результаты вычислений по формуле (1.11) для случаев свободно смещающихся и несмещающихся кромок в случае квадратной шарнирно опертой пластины. Видно, что податливость контура в тангенциальной плоскости существенно влияет на высшие частоты уже при $f^0=1$. Для сравнения на фиг. 1 нанесены штриховыми линиями результаты [12, 13], полученные методом Бубнова — Галеркина. Различие с асимптотическими результатами даже для низших частот составляет доли процента.

Если пластина закреплена по контуру, то, как и в линейном случае, числа m_1 и m_2 в уравнениях (2.9) соответствуют номерам собственных частот. Однако волновые числа зависят от амплитуды. На фиг. 2, 3 приведены зависимости величины $k^0 = k_1 a_1 / m_1$ от f^0 для форм колебаний с одинаковым числом полуволн в обоих направлениях ($m_1 = m_2$) заземленной по контуру квадратной пластины ($a_1 = a_2 = a$): фиг. 2 соответствует несмещающимся кромкам, фиг. 3 — случаю свободно смещающихся кромок. Видно, что с увеличением номера частоты или амплитуды волновые числа приближаются к волновым числам шарнирно опертой пластины. Однако на характере зависимости от амплитуды волновых чисел сильно сказывается податливость контура в тангенциальной плоскости.

На фиг. 4, 5 показаны зависимости приведенного безразмерного периода колебаний $T^* = 1/\omega^0$ от безразмерной амплитуды при различных значениях безразмерного коэффициента упругого заземления $c^0 = ca/D$ для квадратной пластины: фиг. 4 соответствует случаю несмещающихся кромок, фиг. 5 — случаю свободно смещающихся кромок.

В [11] асимптотический метод применялся к упрощенным уравнениям нелинейных колебаний пластин

$$\Delta \Delta w - \frac{12}{h^2} N(w) \Delta w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

$$N(w) = \frac{1}{2a_1 a_2} \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2$$

Результаты, полученные по асимптотическому методу, хорошо согласуются с численными результатами [14], полученными для тех же уравнений вариационным методом. На фиг. 6 для квадратной заземленной пластины штриховыми линиями показаны результаты [11], а результаты, полученные по формуле (1.11) для уравнений Кармана, — сплошными линиями. Видно, что существенное различие наблюдается для частот, которым соответствуют формы колебаний с неодинаковыми длинами полуволн вдоль координатных осей. Кроме того, учет податливости контура изменяет частоты (см. фиг. 1). По этим причинам использование уравнений (3.1) в задачах динамики пластин может привести к неверным количественным результатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Асимптотический метод исследования задач о собственных значениях для прямоугольных областей. — В кн.: Проблемы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 60–72.
2. King W. W., Lin C.-C. Applications of Bolotin's method to vibrations of plates. — AIAA Journal, 1974, v. 12, No. 3, p. 399–401.
3. Vijaykumar K., Ramiaach G. K. Analysis of vibration of clamped square plates by the Rayleigh — Ritz method with asymptotic solution from a modified Bolotin method. — J. Sound and Vibrat., 1978, v. 56, No. 1, p. 127–135.
4. Бендич Н. Н., Корнев В. М. О плотности собственных значений в задачах устойчивости тонких упругих оболочек. — ПММ, 1971, т. 35, вып. 2, с. 364–368.
5. Москаленко В. Н. О спектрах частот собственных колебаний оболочек вращения. — ПММ, 1972, т. 36, вып. 2, с. 301–305.
6. Жинжер Н. И. Динамические краевые эффекты в ортотропных упругих оболочках. — ПММ, 1975, т. 39, вып. 4, с. 752–755.
7. Хроматов В. Е. Свойства спектров собственных колебаний пологих трехслойных оболочек. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 2, с. 130–137.
8. Ueng C. E. S., Nickels R. C. Jr. Dynamic response of a structural panel by Bolotin's method. — Internat. J. Solids and Structures, 1978, v. 14, No. 7, p. 571–578.
9. Пальмов В. А. Тонкие оболочки под действием широкополосной случайной нагрузки. — ПММ, 1965, т. 29, вып. 4, с. 763–770.
10. Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.
11. Андрианов И. В., Маневич Л. И., Холод Е. П. О нелинейных колебаниях прямоугольных пластин. — Строит. механ. и расчет сооружений, 1979, № 5, с. 48–51.
12. Кильдибеков И. Г. Собственные нелинейные колебания круговой цилиндрической оболочки. — В кн.: Теория пластин и оболочек: Тр. Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1973, с. 488–491.
13. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
14. Волос Н. П., Король И. Ю. О нелинейных колебаниях прямоугольных пластин с различными краевыми условиями. — Прикл. механика, 1976, т. 12, № 7, с. 101–106.

Москва

Поступила в редакцию
1.XI.1982