МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1985

УДК 539.3:534.1

О ПРЕЦЕССИИ СОБСТВЕННОЙ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЕЕ ВРАЩЕНИИ

ЖУРАВЛЕВ В. Ф., ПОПОВ А. Л.

Получено аналитическое выражение наблюдавшегося в эксперименте эффекта инертности упругих волн при колебаниях медленно вращающейся полусферической оболочки. Эффект выделен путем построения частного решения специального вида системы дифференциальных уравнений свободных колебаний оболочки с учетом инерционных сил Кориолиса и переносных сил инерции, вызванных вращением колеблющейся оболочки. Центробежные силы инерции, пропорциональные квадрату малой угловой скорости вращения, не учитываются.

В работе [1] сообщается об испытании прототипа резонансного датчика вращения, чувствительным элементом которого является колеблющаяся тонкая упругая полусферическая оболочка, жестко соединенная в вершине с некоторым основанием (фиг. 1, *а*). В оболочке наводилась резонансная частота колебаний, соответствующая собственной форме с двумя волнами по окружности (фиг. 1, *б*) (цифрами *1* и *2* обозначены оси колебаний). При вращении основания в плоскости, параллельной экватору оболочки, отмечалось, что оси колебаний следовали за основанием с примерно 30%-ным рассогласованием, т. е. при повороте основания на 90° они поворачивались на угол около 63° (фиг. 1, *в*). Такое рассогласование наблюдалось при любой (малой по сравнению с собственной круговой частотой колебаний полусферы) угловой скорости вращения оболочки.

Выводу и качественному анализу уравнений свободных колебаний вращающейся с постоянной угловой скоростью оболочки вращения посвящены работы [2—4], в которых даны оценки влияния вращения на частоты и формы колебаний оболочки. Для оболочки нулевой кривизны получены также некоторые количественные результаты.

1. Рассмотрим колебания упругой полусферической оболочки со свободным краем, вращающейся с переменной во времени угловой скоростью вокруг оси симметрии оболочки. Для описания колебаний оболочки используем разрешающую систему уравнений В. В. Новожилова [5], заменив в ней проекции внешних усилий соответствующими инерционными силами Даламбера, Кориолиса и силами переносного движения. Задавая направления компонент u, v, w вектора перемещений оболочки и угловой скорости вращения ω, как на фиг. 1, *а*, получим следующую систему уравнений:

$$L_1U=\mu[U^{\cdot\cdot}+(2+\nu)w^{\cdot\cdot}+2\omega f_1^{\cdot}+\omega^{\cdot} f_1] \tag{1}$$

$$L_1V=2\mu(1-\nu)^{-1}[V^{\cdot\cdot}+2\omega f_2^{\cdot}+\omega^{\cdot}(f_2+2R\cos\theta)]$$

$$L_2w=c^2(1-\nu^2)^{-1}\{(1+\nu)U-\mu[w^{\cdot\cdot}+(2\omega v^{\cdot}-\omega^{\cdot}v)\sin\theta]\}$$

$$U=\sin^{-1}\theta[(u\sin\theta)_{,\theta}+v']-(1+\nu)w,\quad V=\sin^{-1}\theta[(v\sin\theta)_{,\theta}-u']$$

$$f_1=V\cos\theta-w',\ f_2=(u-w_{,\theta})\sin\theta-[U+(3+\nu)w]\cos\theta$$

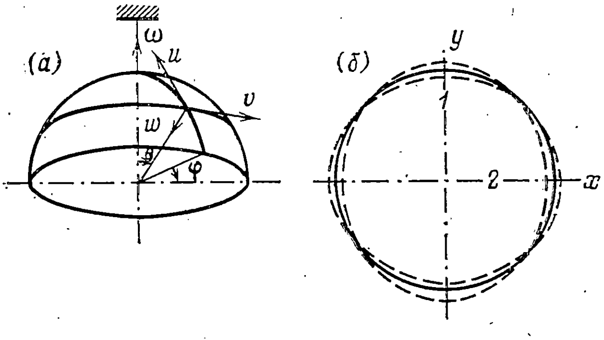
$$c^2=3(1-\nu^2)R^2h^{-2},\quad \mu=(1-\nu^2)R^2\rho E^{-1}$$

$$L_1=2+\Delta,\quad L_2=\Delta^2+2\Delta+c^2,\quad f_{,\theta}=\partial f/\partial\theta$$

$$\Delta=\partial^2/\partial\theta^2+\operatorname{ctg}\theta\,\partial/\partial\theta+(1/\sin^2\theta)\,\partial^2/\partial\varphi^2$$

Здесь, U, V — вспомогательные функции, θ, φ — соответственно, углы широты и долготы, E, ν, ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки, h, R — полутолщина и радиус оболочки; точками обозначено дифференцирование по времени, штрихами — по φ.

Анализ этой системы проведем сначала для постоянной угловой скорости вращения оболочки ($\dot{\omega}=0$). Допустим, что невращающаяся оболочка колеблется по собственной форме с m узловыми меридианами; при этом, положение осей колебаний, проходящих через точки поверхности



оболочки с максимальными амплитудами колебаний, может быть зафиксировано как исходное. Если при вращении оболочки оси колебаний отстают от исходного положения, то это означает появление бегущей по окружности оболочки волны с некоторой относительной скоростью $-\Omega_m/m$. Для определения этой величины представим разложение решений системы (1) по главным формам колебаний в специальном виде с зависимостью от времени и окружной координаты, аналогичной случаю вращающегося кольца [6]:

$$X=\sum_{m\,n} X_{mn}(\theta)\begin{matrix}\cos(\Omega_m t+m\varphi)\cos\lambda_n t, & \{u, w, U\}\\ \sin(\Omega_m t+m\varphi)\cos\lambda_n t, & \{v, V\}\end{matrix} \qquad (2)$$

с неизвестными величинами $X_{mn}(\theta)$, Ω_m, λ_n $(m, n=0, 1, \ldots)$. Заметим, что аналогия между колебаниями экватора свободной полусферы и нерастяжимого кругового кольца следует из работ многих авторов [7], начиная с Рэлея, в которых отмечается пренебрежимо малый вклад в энергию колебаний оболочки от деформаций растяжения срединной поверхности при небольшом волнообразовании по параллели и меридиану оболочки.

Подстановка разложений (2) в (1) и приравнивание нулю коэффициентов при одинаковых комбинациях тригонометрических функций приводит к образованию двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуд колебаний, первая из которых содержит обе неизвестные частоты Ω, λ (индексы m, n везде ниже опускаем)

$$\begin{gathered}L_1U=\mu\{2\omega\Omega(V\cos\theta+mw)-(\Omega^2+\lambda^2)[U+(2+\nu)w]\}\\ L_1V=2\mu(1-\nu)^{-1}\{2\omega\Omega[(w_{,\theta}-u)\sin\theta+(U+(3+\nu)w)\cos\theta]-(\Omega^2+\lambda^2)V\}\\ L_2w=\frac{c^2}{1-\nu^2}\{(1+\nu)U+\mu[(\Omega^2+\lambda^2)w-4\omega\Omega v\sin\theta]\}\end{gathered} \qquad (3)$$

а вторая — только Ω:

$$\begin{gathered}\Omega[U+(2+\nu)w]=\omega(V\cos\theta+mw) \qquad (4)\\ \Omega V=\omega\{[U+(3+\nu)w]\cos\theta-(u-w_{,\theta})\sin\theta\}\\ U=\sin^{-1}\theta[(u\sin\theta)_{,\theta}+mv]-(1+\nu)w\\ V=\sin^{-1}\theta[(v\sin\theta)_{,\theta}-mu], \quad \Omega w=\omega v\sin\theta\end{gathered}$$

При определенной связи между Ω и ω эти системы должны выполняться на всей поверхности оболочки, включая ее край $\theta=\theta_0=\pi/2$.

Так как порядок производных в уравнениях (4) не выше, чем в граничных условиях, то связь между Ω и ω можно найти путем алгебраического выражения значений неизвестных функций и их производных на краю. В данном случае при помощи граничного условия — равенства нулю растягивающего усилия на свободном краю оболочки — получаем связь

$$U=(1-\nu)v', \quad \theta=\theta_0 \tag{5}$$

которая позволяет найти Ω из условия существования нетривиального решения системы двух однородных уравнений $\Omega w-\omega v=0$, $\theta=\theta_0$, $[(2+\nu)\Omega-\omega m]w+(1-\nu)\Omega m v=0$.

Это условие сводится к квадратному уравнению $\Omega^2+(2+\nu)(1-\nu)^{-1}\times m^{-1}\omega\Omega-(1-\nu)^{-1}\omega^2=0$, единственный положительный корень которого дает искомую угловую скорость

$$\Omega=\frac{\omega}{2m(1-\nu)}[((2+\nu)^2+4m^2(1-\nu))^{1/2}-(2+\nu)] \tag{6}$$

Для скорости вращения осей колебаний в абсолютном пространстве получаем формулу

$$\omega_1=\omega-\Omega/m \tag{7}$$

Подставляя в эту формулу $m=2$ и $\nu=0{,}17$ (материал оболочки — плавленный кварц [1]), имеем $\omega_1=0{,}688\omega$, что соответствует повороту осей колебаний на 61,9° при повороте оболочки на 90°.

Формулы (6), (7) показывают слабую зависимость угловой скорости от ω_1 от материала оболочки. Так, для стальной оболочки ($\nu=0{,}3$) $\omega_1=0{,}686\omega$. Из (6), (7) также видно, что отношение ω_1/ω не зависит от ω, т. е. угол отставания осей колебаний от их исходного положения, совмещенного с определенными точками экватора оболочки, не меняется при любом изменении скорости вращения основания в пределах $\omega\ll\lambda$, что позволяет использовать вращающуюся вибрирующую оболочку в качестве интегратора угла поворота.

При известном Ω с учетом соотношений (4) система уравнений (3) распадается на две подсистемы для изгибно-плоскостных и крутильных колебаний (выпишем здесь только первую из них):

$$L_1U=\mu\{(\Omega^2-\lambda^2)[U+(2+\nu)w]+4\Omega\omega m w\}$$

$$L_2w=c^2(1-\nu^2)^{-1}[(1+\nu)U-\mu(3\Omega^2-\lambda^2)w]$$

Эта система приводится к одному разрешающему уравнению

$$\sum_0^3 a_k\Delta^k w=0, \quad a_3=1, \quad a_2=4+\mu(\lambda^2-\Omega^2)$$

$$a_1=2a_2+\varkappa\eta^{-1}-4, \quad \varkappa=(1-\nu)[1-R^2E^{-1}\rho(\lambda^2-3\Omega^2)]$$

$$a_0\eta=2\varkappa+\mu[(\lambda^2-\Omega^2)(2+\nu+\varkappa)-4\omega\Omega m], \quad \eta=h^2/3(1+\nu)R^2$$

которое при $\omega^2\ll\lambda^2$ по существу совпадает с разрешающим уравнением относительно функции прогиба для невращающейся оболочки [8].

Таким образом, медленное вращение колеблющейся оболочки не оказывает влияния на ее спектральные характеристики, создавая в то же время заметный гироскопический эффект.

Рассмотрим теперь общий случай, когда $\omega(t)$ — произвольная заданная функция времени. Выпишем систему (1) для края оболочки

$$L_1U=\mu[U^{\cdot\cdot}+(2+\nu)w^{\cdot\cdot}-2\omega w^{\cdot\prime}-\omega^{\cdot}w']\tag{8}$$

$$L_1V=2\mu(1-\nu)^{-1}[V^{\cdot\cdot}+2\omega(u^{\cdot}-w_{,\theta}^{\cdot})-\omega^{\cdot}w_{,\theta}]$$

$$L_2w=c^2(1-\nu^2)^{-1}[(1-\nu)U-\mu(u^{\cdot\cdot}+2\omega v^{\cdot}+\omega^{\cdot}v)]$$

Используя соотношение (5), исключим перемещение v из третьего уравнения (8)

$$L_2w'=\frac{c^2}{1-\nu^2}\left[(1-\nu)U'-\mu\left(w^{\cdot\cdot}+\frac{2\omega U^{\cdot}+\omega^{\cdot}U}{1-\nu}\right)\right] \qquad (9)$$

Как и в случае вращения с постоянной угловой скоростью, из первого уравнения (8) и уравнения (9) образуется независимая подсистема двух уравнений относительно $w(\theta_0,\varphi,t)$ и $U(\theta_0,\varphi,t)$. Совершим в ней замену угловой переменной

$$\psi=\varphi+\gamma(t) \qquad (10)$$

с новой неизвестной функцией времени $\gamma(t)$.

Используя обозначение $U(\theta_0,\varphi,t)\equiv U_0(\theta_0,\psi,t)$, найдем $U^{\cdot}=U_0^{\cdot}+\gamma^{\cdot}U_0'$, $U^{\cdot\cdot}=U_0^{\cdot\cdot}2\gamma^{\cdot}U_0^{\cdot\prime}+\gamma^{\cdot\cdot}U_0'+\gamma^{\cdot 2}U_0''$ (штрихом обозначено дифференцирование по ψ).

Выполняя в правых частях уравнений (8), (9) относительно w и U дифференцирование по указанному правилу, получим (опуская индекс 0):

$$L_1U=\mu[U^{\cdot\cdot}+2\gamma^{\cdot}U^{\cdot\prime}+\gamma^{\cdot\cdot}U'+\gamma^{\cdot 2}U''+(2+\nu)(w^{\cdot\cdot}+$$

$$+2\gamma^{\cdot}w^{\cdot\prime}+\gamma^{\cdot\cdot}w'+\gamma^{\cdot 2}w'')-2\omega(w^{\cdot\prime}+\gamma^{\cdot}w'')-\omega^{\cdot}w']$$

$$L_2w'=c^2(1-\nu^2)^{-1}\{(1-\nu)U'-\mu[w^{\cdot\cdot\prime}+2\gamma^{\cdot}w^{\cdot\prime\prime}+\gamma^{\cdot\cdot}w''+$$

$$+\gamma^{\cdot 2}w'''+(1-\nu)^{-1}(2\omega(U^{\cdot}+\gamma^{\cdot}U')+\omega^{\cdot}U)]\} \qquad (11)$$

Подберем функцию $\gamma(t)$ так, чтобы уравнения (11) допускали решение в виде стоячей волны

$$w(\theta_0,\psi,t)=\cos m\psi f(t) \qquad (12)$$

Если такую функцию можно подобрать, то это означает, что стоячая волна относительно оболочки прецессирует со скоростью $\gamma^{\cdot}(t)$, поскольку замена (10) характеризует переход во вращающуюся систему координат.

Для выполнения условия (12) необходимо, чтобы неизвестные функции w, U в правых частях (11) имели одинаковый суммарный порядок производных по t и ψ, т. е. функция $\gamma(t)$ должна быть подобрана из условия обращения в нуль следующих членов:

$$\gamma^{\cdot\cdot}[U'+(2+\nu)w']-\omega^{\cdot}w'=0, \quad \gamma^{\cdot\cdot}w''+(1-\nu)^{-1}\omega^{\cdot}U=0$$

Эти два уравнения сводятся к одному: $(1-\nu)\gamma^{\cdot\cdot 2}w''-\omega^{\cdot}[(2+\nu)\gamma^{\cdot\cdot}-\omega^{\cdot}]w=0$.

Поскольку функция w 2π-периодична по ψ, то для тождественного выполнения этого равенства необходимо и достаточно

$$(1-\nu)m^2\gamma^{\cdot\cdot 2}+\omega^{\cdot}[(2+\nu)\gamma^{\cdot\cdot}-\omega^{\cdot}]=0$$

откуда находим

$$\gamma(t)=\frac{-1}{2(1-\nu)m^2}\left[2+\nu\mp\sqrt{(2+\nu)^2+4(1-\nu)m^2}\right]\int_0^t\omega(t)\,dt$$

Видим, что и в случае переменной скорости вращения оболочки коэффициент пропорциональности, стоящий перед интегралом, не является функцией угловой скорости и зависит только от изменяемости напряженно-деформированного состояния и в меньшей степени — от физических параметров упругости оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Scott W. B.* Delco makes low-cost gyro prototype.— Aviat. Week, 1982, v. 16, No. 25, p. 64—72.
2. *Смирнов А. Л.* Колебания вращающихся оболочек вращения.— Прикладная механика: Сб. статей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981, вып. 5, с. 176—186.
3. *Смирнов А. Л.* Интегралы уравнений колебаний вращающихся оболочек вращения.— Вестн. ЛГУ, 1981, № 13, вып. 3, с. 114—117.
4. *Смирнов А. Л., Товстик П. Е.* Качественное исследование динамики вращающихся оболочек вращения.— В кн.: Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982, с. 280—290.
5. *Новожилов В. В.* Расчет напряжений в тонкой сферической оболочке при произвольной нагрузке.— Докл. АН СССР, 1940, т. 27, № 6, с. 537—540.
6. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 5, с. 17—23.
7. *Гонткевич В. С.* Собственные колебания пластинок и оболочек: Справочник. Киев: Наук. думка, 1964. 288 с.
8. *Лужин О. В.* К вопросу о свободных колебаниях тонкой сферической оболочки.— Строит. механ. и расчет сооруж., 1961, № 3, с. 32—37.

Москва

Поступила в редакцию
18.V.1984