

УДК 531.55:521.2

О ДВИЖЕНИИ СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС ПОД ДЕЙСТВИЕМ МОМЕНТОВ СИЛ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

ЛЕЩЕНКО Д. Д., ШАМАЕВ А. С.

Исследованию движения спутника относительно центра масс под действием моментов сил различной природы (гравитационных, магнитных, светового давления и др.) посвящено много работ (см. [1-4] и приведенную в этих работах библиографию). При этом оценка величины моментов возмущающих сил [1] показывает, что на высотах, больших 35 000-40 000 км над поверхностью Земли, на космические аппараты наибольшее влияние оказывают моменты сил светового давления. При помощи метода усреднения исследуется вызванное моментами сил светового давления движение относительно центра масс космического аппарата с трехосным эллипсоидом инерции в случае, когда аппарат представляет собой тело вращения.

1. Рассмотрим движение космического аппарата относительно центра масс под действием моментов сил светового давления.

Введем три правых декартовых системы координат, начало координат совместим с центром инерции спутника [1, 2]. Система координат $OXYZ$ движется поступательно по орбите вместе со спутником; ось Y параллельна нормали к плоскости орбиты, ось Z — направлению радиус-вектора орбиты в ее перигее, ось X — направлению вектора скорости центра масс спутника в перигее. Положение вектора кинетического момента L в системе координат $OXYZ$ определим углами ρ и σ , как показано на фиг. 1, а.

Для построения системы координат OL_1L_2L , связанной с вектором L , в плоскости OYL проведем ось L_1 , перпендикулярную к вектору L и составляющую тупой угол с осью Y . Ось L_2 дополняет оси L_1 и L до правой системы координат.

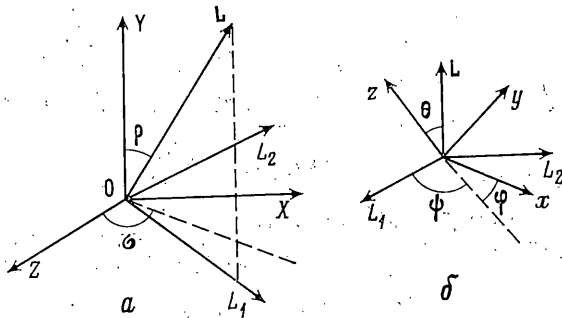
Оси связанной системы координат $Oxyz$ совместим с главными центральными осями инерции спутника.

Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей L , L_1 , L_2 определим углами Эйлера φ , ψ , θ (фиг. 1, б).

При этом направляющие косинусы осей Ox , Oy , Oz относительно системы OL_1L_2L выражаются через углы Эйлера φ , ψ , θ по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \psi \sin \varphi, & \alpha_{12} &= -\cos \psi \sin \varphi - \cos \theta \sin \psi \cos \varphi \\ \alpha_{13} &= \sin \theta \sin \psi, & \alpha_{21} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \theta \cos \psi \sin \varphi \\ \alpha_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \psi \cos \varphi, & \alpha_{23} &= -\sin \theta \cos \psi \\ \alpha_{31} &= \sin \theta \sin \varphi, & \alpha_{32} &= \sin \theta \cos \varphi, & \alpha_{33} &= \cos \theta \end{aligned} \quad (1.1)$$

Будем считать, что аппарат движется по эллиптической орбите вокруг Солнца, пренебрежем моментами всех сил, кроме сил светового давления. Допустим, что поверхность аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии k направлен по оси Oz . Как



Фиг. 1

показано в [1, 3], в этом случае для момента сил светового давления M , действующего на спутник, имеет место формула

$$M = (a_c(\epsilon_s) R_0^2 / R^2) e_r \times k \quad (1.2)$$

В случае полного поглощения

$$a_c(\epsilon_s) \frac{R_0^2}{R^2} = p_c S(\epsilon_s) z_0'(\epsilon_s), \quad p_c = \frac{E_0}{c} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \quad (1.3)$$

В (1.2) и (1.3) e_r — единичный вектор по направлению радиус-вектора орбиты, ϵ_s — угол между направлениями e_r и k , так что $|e_r \times k| = \sin \epsilon_s$. R — текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника, R_0 — фиксированное значение R , например, в начальный момент времени, $a_c(\epsilon_s)$ — коэффициент момента сил светового давления, S — площадь «тени» на плоскости, нормальной к потоку, z_0' — расстояние от центра масс до центра давления, c — скорость света, E_0 — величина потока энергии светового давления на расстоянии R от центра Солнца. Если R_0 — радиус орбиты Земли, тогда $E_0 = 1200 \text{ ккал} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{ч}$, $p_c = E_0/c = 4,72 \cdot 10^{-6} \text{ ч} \cdot \text{м}^{-2}$.

Следуя [1], считаем, что $a_c = a_c(\cos \epsilon_s)$, аппроксимируем a_c полиномами по степеням $\cos \epsilon_s$.

Моменты сил светового давления имеют силовую функцию, зависящую только от положения оси симметрии тела в пространстве [1]. Разложим функцию $a_c(\cos \epsilon_s)$ в ряд Тейлора

$$a_c = a_{0c} + a_{1c} \cos \epsilon_s + \dots \quad (1.4)$$

Далее рассмотрим только первые два члена разложения.

Уравнения возмущенного движения спутника при наличии силовой функции в переменных $L, \rho, \sigma, \varphi, \psi, \theta$ имеют вид [2, 4]:

$$\begin{aligned} \sigma' &= \frac{1}{L \sin \rho} \frac{\partial U}{\partial \rho}, & \rho' &= -\frac{1}{L \sin \rho} \frac{\partial U}{\partial \sigma} + \frac{\text{ctg} \rho}{L} \frac{\partial U}{\partial \psi} \\ L' &= \frac{\partial U}{\partial \psi}, & \theta' &= L \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) - \frac{1}{L \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \\ &+ \frac{\text{ctg} \theta}{L} \frac{\partial U}{\partial \psi}, & \varphi' &= L \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \\ &+ \frac{1}{L \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta}, & \psi' &= L \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{1}{L} \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \text{ctg} \rho + \frac{\partial U}{\partial \theta} \text{ctg} \theta \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

В некоторых случаях удобно вместо угла θ использовать в качестве переменной кинетическую энергию

$$T = \frac{1}{2} L^2 \left[(\sin^2 \varphi / A + \cos^2 \varphi / B) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta / C \right] \quad (1.6)$$

производная которой имеет вид

$$T = \frac{2T}{L} M_3 + L \sin \theta \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} - \frac{1}{C} \right) (M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi) + \sin \varphi \cos \varphi (1/A - 1/B) (M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi) \right] \quad (1.7)$$

Силовая функция U зависит от времени t через истинную аномалию $v(t)$ и от направляющих косинусов $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ оси Oz относительно системы координат $OXYZ$:

$$U = U(v(t), \alpha_3, \beta_3, \gamma_3) \quad (1.8)$$

Проекция вектора момента сил M на оси системы координат $OXYZ$ имеют вид [1]:

$$M_x = \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} \beta_3 - \frac{\partial U}{\partial \beta_3} \gamma_3, \quad M_y = \frac{\partial U}{\partial \alpha_3} \gamma_3 - \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} \alpha_3, \quad M_z = \frac{\partial U}{\partial \beta_3} \alpha_3 - \frac{\partial U}{\partial \alpha_3} \beta_3 \quad (1.9)$$

а проекции на оси OLL_1L_2 выражаются через M_x, M_y, M_z по формулам

$$\begin{aligned} M_1 &= (M_x \sin \sigma + M_z \cos \sigma) \cos \rho - M_y \sin \rho \\ M_2 &= M_x \cos \sigma - M_z \sin \sigma \\ M_3 &= (M_x \sin \sigma + M_z \cos \sigma) \sin \rho + M_y \cos \rho \end{aligned} \quad (1.10)$$

К системе уравнений (1.5) необходимо присоединить уравнение, описывающее изменение истинной аномалии со временем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\omega_0}{(1-e^2)^{3/2}} (1+e \cos v)^2, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \left[\frac{\mu(1-e^2)^3}{P^3} \right]^{1/2} \quad (1.11)$$

ω_0 — средняя угловая скорость движения центра масс по эллиптической орбите, N_0 — период обращения спутника, e и P — эксцентриситет и фокальный параметр орбиты, μ — произведение постоянной всемирного тяготения на массу Солнца.

Момент сил (1.2) соответствует силовой функции $U(\cos \varepsilon_s) = -R_0^2 / R^2 \int a_c(\cos \varepsilon_s) d(\cos \varepsilon_s)$.

Рассмотрим два случая: $a_c(\cos \varepsilon_s) = a_{0c}$ и $a_c(\cos \varepsilon_s) = a_{1c} \cos \varepsilon_s$, которые соответствуют первым двум членам разложения функции $a_c(\cos \varepsilon_s)$ в ряд Тейлора (1.4).

Силовые функции в этих случаях имеют вид $U(\cos \varepsilon_s) = -R_0^2 / R^2 a_{0c} \cos \varepsilon_s$ и $U(\cos \varepsilon_s) = -R_0^2 / R^2 a_{1c} \cos^2 \varepsilon_s$, соответственно, причем $\cos \varepsilon_s = \gamma_3 \cos v + \alpha_3 \sin v$.

Заметим, что первый случай соответствует, например, спутнику сферической формы со смещенным относительно центра сферы центром масс.

Введем в систему уравнений (1.5), (1.11) малые параметры. Предположим, что $\omega_0 \sim \varepsilon$, а также $a_{0c} \sim \varepsilon \ll 1$ или $a_{1c} \sim \varepsilon$, в зависимости от того, какой из случаев рассматривается. Исследуем решение системы (1.5), (1.11) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$. Для решения задачи применим метод усреднения [5, 6]. Погрешность усредненного решения для медленных переменных составляет величину порядка ε на интервале времени, за который тело совершит $\sim \varepsilon^{-1}$ оборотов. Усреднение по движению Эйлера — Пуансо проводим по методике работ [2, 4] для нерезонансных случаев.

2. Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon=0$), когда момент сил светового давления (1.2) равен нулю. В этом случае вращение спутника является движением Эйлера — Пуансо. Величины σ, ρ, L, T, v обращаются в постоянные, а θ, φ, ψ — некоторые функции времени. Медленными переменными в возмущенном движении будут σ, ρ, L, T, v , а быстрыми — углы Эйлера θ, φ, ψ .

Проведем усреднение первых трех уравнений системы (1.5) и (1.7) вдоль траектории невозмущенного движения. Согласно [2], усреднение

выполняется сначала по переменной ψ , а затем по θ и φ , связанным соотношением (1.6). Оно производится по замкнутым траекториям вектора кинетического момента в движении Эйлера — Пуансо. Усреднение правых частей первых трех уравнений (1.5) по ψ приводит к уравнениям

$$\sigma = \frac{1}{L \sin \rho} \frac{\partial \langle U \rangle_{\psi}}{\partial \rho}, \quad \rho' = -\frac{1}{L \sin \rho} \frac{\partial \langle U \rangle_{\psi}}{\partial \sigma}, \quad L' = 0, \quad \langle U \rangle_{\psi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U d\psi \quad (2.1)$$

Усредним правую часть уравнения (1.7) по углу ψ . В первом случае на основании формул (1.9), (1.10) имеем

$$M_1 = -R_0^2 R^{-2} a_{0c} [\alpha_3 \sin \rho \cos \nu + \beta_3 \sin(\sigma - \nu) \cos \rho - \gamma_3 \sin \rho \sin \nu] \\ M_2 = -R_0^2 R^{-2} a_{0c} \beta_3 \cos(\sigma - \nu) \quad (2.2)$$

$$M_3 = -R_0^2 R^{-2} a_{0c} [-\alpha_3 \cos \rho \cos \nu + \beta_3 \sin(\sigma - \nu) \sin \rho + \gamma_3 \cos \rho \sin \nu]$$

Используя выражения направляющих косинусов α_3 , β_3 , γ_3 оси Oz относительно системы координат $OXYZ$ [1]:

$$\alpha_3 = \sin \psi \sin \theta \cos \rho \sin \sigma - \cos \psi \sin \theta \cos \sigma + \cos \theta \sin \rho \sin \sigma \quad (2.3)$$

$$\beta_3 = -\sin \psi \sin \theta \sin \rho + \cos \theta \cos \rho$$

$$\gamma_3 = -\sin \psi \sin \theta \cos \rho \cos \sigma + \cos \psi \sin \theta \sin \sigma + \cos \theta \sin \rho \cos \sigma$$

из формул (2.2) при помощи элементарных преобразований получим

$$\langle M_3 \rangle_{\psi} = 0, \quad \langle M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi \rangle_{\psi} = 0$$

$$\langle M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi \rangle_{\psi} = R_0^2 R^{-2} a_{0c} \sin \theta \sin \rho \cos(\sigma - \nu)$$

Отсюда следует, что после усреднения по ψ уравнение (1.7) принимает вид

$$T' = \frac{R_0^2}{R^2} a_{0c} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) L \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \sin \rho \cos(\sigma - \nu) \quad (2.4)$$

Проектирование вектора L на оси связанной системы координат дает

$$L_x = L \sin \theta \sin \varphi, \quad L_y = L \sin \theta \cos \varphi, \quad L_z = L \cos \theta \quad (2.5)$$

В результате получим

$$T' = \frac{R_0^2}{R^2} a_{0c} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \frac{L_x L_y}{L} \sin \rho \cos(\sigma - \nu) \quad (2.6)$$

Усредним теперь правую часть уравнения (1.7) по ψ для второго случая. Из формулы для момента оси светового давления (1.2) с учетом совпадения оси Oz и оси симметрии спутника следует

$$M = a_{1c} R_0^2 R^{-2} (-\gamma_3 \beta_3 O_x + \alpha_3 \gamma_3 O_y) \quad (2.7)$$

Как известно [2], момент гравитационных сил, действующих на спутник, имеет вид

$$M = 3\mu R^{-3} [(C' - B') \gamma_3 \beta_3 O_x + (A' - C') \alpha_3 \gamma_3 O_y + (B' - A') \alpha_3 \beta_3 O_z] \quad (2.8)$$

Здесь A' , B' , C' — главные центральные моменты инерции спутника, находящегося в гравитационном поле.

Момент сил светового давления, определяемый формулой (2.7), совпадает с моментом гравитационных сил (2.8), действующим на спутник, находящийся в гравитационном поле, главные центральные моменты инерции которого имеют вид

$$A' = B' = 2a_{1c} R_0^2 R / 3\mu, \quad C' = a_{1c} R_0^2 R / 3\mu \quad (2.9)$$

Движение спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов исследовано в [2]; где проекция момента гравитацион-

ных сил на оси OL_1, OL_2, OL для трехосного спутника могут быть представлены в виде

$$M_1 = 3\omega_0^2 (1+e \cos \nu)^3 (1-e^2)^{-3} \sum_{j=1}^3 (\delta_2 \delta_j s_{3j} - \delta_3 \delta_j s_{2j})$$

$$M_2 = 3\omega_0^2 (1+e \cos \nu)^3 (1-e^2)^{-3} \sum_{j=1}^3 (\delta_3 \delta_j s_{1j} - \delta_1 \delta_j s_{3j})$$

$$M_3 = 3\omega_0^2 (1+e \cos \nu)^3 (1-e^2)^{-3} \sum_{j=1}^3 (\delta_1 \delta_j s_{2j} - \delta_2 \delta_j s_{1j})$$

Здесь $s_{ij} = A' \alpha_{i1} \alpha_{j1} + B' \alpha_{i2} \alpha_{j2} + C' \alpha_{i3} \alpha_{j3}$, α_{ij} определены формулами (1.1); $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — направляющие косинусы вектора e_r в системе координат $OL_1L_2L_3$, равные $\delta_1 = \cos \rho \cos(\nu - \sigma)$, $\delta_2 = \sin(\nu - \sigma)$, $\delta_3 = \sin \rho \cos(\nu - \sigma)$.

Вычисления показывают, что

$$\langle M_3 \rangle_\psi = 0, \quad \langle M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi \rangle_\psi = \frac{3\omega_0^2 (1+e \cos \nu)^3}{(1-e^2)^3} (\delta_1^2 + \delta_2^2 - 2\delta_3^2) \times$$

$$\times \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta (A' \sin^2 \varphi + B' \cos^2 \varphi - C')$$

$$\langle M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi \rangle_\psi =$$

$$= \frac{3\omega_0 (1+e \cos \nu)^3}{(1-e^2)^3} (2\delta_3^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2) \frac{1}{2} (A' - B') \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi$$

Учитывая, что согласно (2.9) $A' = B'$, имеем

$$\langle M_3 \rangle_\psi = \langle M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi \rangle_\psi = 0,$$

$$\langle M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi \rangle_\psi = \frac{3\omega_0^2 (1+e \cos \nu)^3}{2(1-e^2)^3} (\delta_1^2 + \delta_2^2 - 2\delta_3^2) (A' - C') \sin \theta \cos \theta$$

Отсюда следует, что после усреднения по ψ уравнение (1.7) принимает вид

$$T' = L(A' - C') \frac{3\omega_0^2 (1+e \cos \nu)^3}{2(1-e^2)^3} \left(\frac{1}{A'} - \frac{1}{B'} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \times$$

$$\times \cos \varphi (\delta_1^2 + \delta_2^2 - 2\delta_3^2) = (A' - C') \times$$

$$\times \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \frac{L_x L_y L_z}{L^2} \frac{3\omega_0^2 (1+e \cos \nu)^3}{2(1-e^2)^3} (\delta_1^2 + \delta_2^2 - 2\delta_3^2) \quad (2.10)$$

В формулах (2.6) и (2.9) от быстрых переменных зависят только L_x, L_y, L_z . Но средние значения произведений $L_x L_y$ и $L_x L_y L_z$ по полодии невозмущенного движения равны нулю в силу симметрии участков полодий относительно координатных плоскостей O_{xy}, O_{xz}, O_{yz} . Поэтому в обоих случаях после усреднения по полодии уравнение (1.7) принимает вид $T'' = 0$ и, следовательно, $T = T_0 = \text{const}$. Это означает, что уравнения для углов σ и ρ после усреднения можно рассматривать независимо от других уравнений для медленных переменных.

Средние по ψ значения силовой функции в первом и втором случаях будут соответственно

$$\langle U \rangle_\psi = -a_0 R_0^2 R^{-2} \cos \theta \sin \varphi \cos(\sigma - \nu) \quad (2.11)$$

$$\langle U \rangle_\psi = -a_{1c} R_0^2 R^{-2} (1 - 3/2 \sin^2 \theta) \sin^2 \rho \cos^2(\sigma - \nu)$$

Теперь силовую функцию нужно усреднить вдоль полодии невозмущенного движения. Невозмущенное движение трехосного спутника подробно

исследовано в [4]. Для вычисления усредненного значения силовой функции в первом приближении требуется определить

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N \cos \theta(t) dt, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N \sin^2 \theta(t) dt$$

где $\theta(t)$ — угол нутации как функция времени в невозмущенном движении.

Примем для определенности $A > B > C$. Функция $\theta(t)$ определяется различными формулами в зависимости от знака величины $2T_0 B - L_0^2$. Если $2T_0 B - L_0^2 > 0$, то (см. [4, 7]) $\cos \theta(\tau) = a \operatorname{dn} \tau$. При $2T_0 B - L_0^2 < 0$ получим $\cos \theta(\tau) = a \operatorname{cn} \tau$. Здесь $\operatorname{dn} \tau$, $\operatorname{cn} \tau$ — эллиптические функции [8], периодические по τ с периодом $N_\tau = 4K(k^2)$, $K(k^2)$ — полный эллиптический интеграл первого рода

$$a^2 = \frac{\varepsilon_1 + h}{1 + \varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{C(A-B)}{A(B-C)}, \quad h = \left(\frac{2T_0}{L_0^2} - \frac{1}{B} \right) \frac{BC}{B-C},$$

$$\tau = \beta t, \quad \beta = \frac{L_0(A-B)}{AB\varepsilon_1} \sqrt{1 + \varepsilon_1}, \quad k^2 = \frac{a^2 - h}{a^2}$$

Формулы для модуля эллиптических функций k^2 и β приведены для $h > 0$. Остальные соотношения справедливы при любых значениях h .

Движениям в окрестности оси Oz (оси момента инерции C) соответствует значение $h > 0$ ($2T_0 B - L_0^2 > 0$), движениям в окрестности Ox (оси момента инерции A) — значение $h < 0$ ($2T_0 B - L_0^2 < 0$), а $h = 0$ ($2T_0 B = L_0^2$) отвечает движению по сепаратрисе.

Используя формулы для интегралов от эллиптических функций [8], с учетом $\cos \theta(\tau) = a \operatorname{dn} \tau$, $\cos \theta(\tau) = a \operatorname{cn} \tau$ получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N \cos \theta(t) dt = \frac{1}{N_\tau} \int_0^{N_\tau} \cos \theta(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{\pi a}{2K(k^2)} & \text{при } 2T_0 B - L_0^2 > 0 \\ 0 & \text{при } 2T_0 B - L_0^2 < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N \sin^2 \theta(t) dt = \frac{1}{N_\tau} \int_0^{N_\tau} \sin^2 \theta(\tau) d\tau =$$

$$= \begin{cases} 1 - a \frac{E(k^2)}{K(k^2)} & \text{при } 2T_0 B - L_0^2 > 0 \\ 1 - \frac{a^2}{k^2} \left[k^2 - 1 + \frac{E(k^2)}{K(k^2)} \right] & \text{при } 2T_0 B - L_0^2 < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Здесь $E(k^2)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

В результате усреднения по полодии в первом случае получаем систему уравнений для ρ и σ :

$$\dot{\rho} = -a_{0c} R_0^2 (L_0 R^2)^{-1} F \sin(\sigma - \nu) \quad (2.14)$$

$$\dot{\sigma} = -a_{0c} R_0^2 (L_0 R^2)^{-1} F \operatorname{ctg} \rho \cos(\sigma - \nu)$$

$$F = \frac{\pi a}{2K(k^2)}, \quad 2T_0 B - L_0^2 > 0; \quad F = 0, \quad 2T_0 B - L_0^2 < 0$$

Во втором случае усредненная система первого приближения для ρ и σ принимает вид

$$\dot{\rho} = -a_{1c} R_0^2 (2L_0 R^2)^{-1} G \sin \rho \sin 2(\sigma - \nu), \quad (2.15)$$

$$\dot{\sigma} = -a_{1c} R_0^2 (L_0 R^2)^{-1} G \cos \rho \cos^2(\sigma - \nu)$$

$$G = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[3a^2 \frac{E(k^2)}{K(k^2)} - 1 \right] & \text{при } 2T_0B - L_0^2 > 0 \\ \frac{1}{2} \left\{ \frac{3a^2}{k^2} \left[k^2 - 1 + \frac{E(k^2)}{K(k^2)} \right] - 1 \right\} & \text{при } 2T_0B - L_0^2 < 0 \end{cases}$$

При этом для медленных усредненных переменных сохраняются прежние обозначения.

В системах уравнений (2.14) и (2.15) удобно перейти к новой независимой переменной $v = v(t)$. В силу уравнения (1.11) и уравнения движения центра масс спутника по плоской эллиптической орбите $R = P/(1 + e \cos v)$ после перехода от независимой переменной t к переменной v системы (2.14) и (2.15) примут вид

$$d\rho/dv = -a_{0c}R_0^2 (L_0\sqrt{\mu P})^{-1} F \sin(\sigma - v) \quad (2.16)$$

$$d\sigma/dv = -a_{0c}R_0^2 (L_0\sqrt{\mu P})^{-1} F \operatorname{ctg} \rho \cos(\sigma - v)$$

$$d\rho/dv = -a_{1c}R_0^2 (2L_0\sqrt{\mu P})^{-1} G \sin \rho \sin 2(\sigma - v) \quad (2.17)$$

$$d\sigma/dv = -a_{1c}R_0^2 (L_0\sqrt{\mu P})^{-1} G \cos \rho \cos^2(\sigma - v)$$

Обозначим $\kappa_v = \sigma - v$. Координата κ_v есть угол между текущим радиус-вектором орбиты e_r и проекцией вектора L на плоскость орбиты. Таким образом, углы ρ , κ_v дают положение вектора L во вращающейся системе координат \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$, e_r , где \mathbf{n} направлено по нормали к плоскости орбиты, $\boldsymbol{\tau}$ — по трансверсали (фиг. 2). Уравнения (2.18), (2.19) в переменных ρ , κ_v принимают вид

$$d\rho/dv = -a_{0c}R_0^2 (L_0\sqrt{\mu P})^{-1} F \sin \kappa_v \quad (2.18)$$

$$d\kappa_v/dv = -a_{0c}R_0^2 (L_0\sqrt{\mu P})^{-1} F \operatorname{ctg} \rho \cos \kappa_v - 1$$

$$d\rho/dv = -a_{1c}R_0^2 (2L_0\sqrt{\mu P})^{-1} G \sin \rho \sin 2\kappa_v \quad (2.19)$$

$$d\kappa_v/dv = -a_{1c}R_0^2 (L_0\sqrt{\mu P})^{-1} G \cos \rho \cos^2 \kappa_v - 1$$

Системы уравнений (2.18) и (2.19) являются автономными и имеют первые интегралы

$$L_0 \cos \rho - a_{0c}R_0^2 (\sqrt{\mu P})^{-1} F \cos \varepsilon_L = \text{const} \quad (2.20)$$

$$L_0 \cos \rho - a_{1c}R_0^2 (2\sqrt{\mu P})^{-1} G \cos^2 \varepsilon_L = \text{const} \quad (2.21)$$

Здесь ε_L — угол между векторами L и e_r (фиг. 2): $\cos \varepsilon_L = \sin \rho \cos \kappa_v$.

Первые интегралы (2.20) и (2.21) отличаются от первых интегралов для систем, описывающих изменение углов ρ и κ_v , в случае динамически симметричного спутника [1] только множителями F и G . Поэтому результаты [1] могут быть перенесены на рассматриваемый случай движения относительно центра масс космического аппарата с трехосным эллипсоидом инерции, представляющим собой тело вращения.

Первый интеграл (2.20) может быть записан в виде

$$\cos \chi = \text{const} \quad (2.22)$$

где χ — угол между вектором L и прямой OP , лежащей в плоскости (\mathbf{n}, e_r) и составляющей с вектором \mathbf{n} угол ρ^* . Величина угла ρ^* определяется из уравнения $\operatorname{tg} \rho^* = -n_0$, $n_0 = a_{0c}R_0^2 / (L_0\sqrt{\mu P})$.

Равенство (2.22) означает, что в системе координат (n, τ, e_r) движение вектора кинетического момента L представляет собой равномерное по ν вращение вокруг прямой OP . В [1] определена угловая скорость вращения вектора L . Она равна $-\sqrt{1+n_0^2}$.

Заметим, что если начальные условия T_0 и L_0 таковы, что $2T_0B-L_0^2 < 0$, то $F=0$ и угол ρ^* равен нулю. Тогда движение вектора L в системе координат (n, τ, e_r) является вращением с угловой скоростью 1 вокруг вектора n . В системе координат $OXYZ$ вектор L будет постоянным. Это означает, что оскулирующие элементы ρ и σ не изменяются.

Если же T_0 и L_0 таковы, что $2T_0B-L_0^2 > 0$, то угол ρ^* отличен от нуля и вращение вектора L происходит вокруг оси OP , наклоненной к источнику света, причем угол наклона тела тем больше, чем больше величина n_0 .

Исследование движения спутника во втором случае на основании первого интеграла (2.21) может быть проведено так же, как это сделано в [1] для случая динамически симметричного спутника в гравитационном поле на круговой орбите, поскольку система уравнения (2.19) отличается от системы уравнений, описывающей движение спутника в гравитационном поле на круговой орбите, только множителем G , зависящим от начальных данных T_0, L_0 .

Авторы выражают благодарность Ф. Л. Черноусько, В. В. Белецкому и Л. Д. Акуленко за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. Черноусько Ф. Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов. — ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, с. 474–483.
3. Карьмов А. А. Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника Солнца в поле сил светового давления. — ПММ, 1964, т. 28, вып. 5, с. 923–930.
4. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
5. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
6. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971. 440 с.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
8. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.

Одесса, Москва

Поступила в редакцию
31.V.1983