

УДК 539.214:539.374

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ
ПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

ЛЕЛЛЕЦ Я. А.

Задачи оптимального проектирования геометрически нелинейных жесткопластических балок и цилиндрических оболочек рассматривались в [1-4]. В [1] найден проект минимального веса замкнутой цилиндрической оболочки при предположении, что прогибы, соответствующие оптимальному проекту и оболочке постоянной толщины, совпадают. В [3, 4] разработана техника параметрической оптимизации пластических балок с учетом умеренно больших прогибов. Ниже результаты этих работ обобщаются для замкнутых цилиндрических оболочек, материал которых подчиняется кусочно-линейному условию пластичности Треска - Сен-Венена.

1. Рассматривается замкнутая круговая цилиндрическая оболочка длины l , нагруженная внутренним давлением P . Боковая стенка цилиндра считается идеально-трехслойной, состоящей из двух тонких несущих слоев толщины h и из заполнителя между ними, причем общая толщина стенки — H . Допускается, что концы оболочки закреплены каким-то образом и начало координатной оси X , которая совпадает с недеформированной образующей, находится в левом торце оболочки. Поперечные сечения $X=S_1, \dots, X=S_n$ фиксированы при помощи дополнительных круговых жестких опор.

Требуется найти такие координаты этих опор, а также при необходимости значение давления и толщину несущих слоев, при которых критерий качества

$$J = G_0(P, h, S_1, \dots, S_n W(X_*) dW(X_*)/dX, U(X_*)) + \int_0^l F_0(W, dW/dX, U) dX \quad (1.1)$$

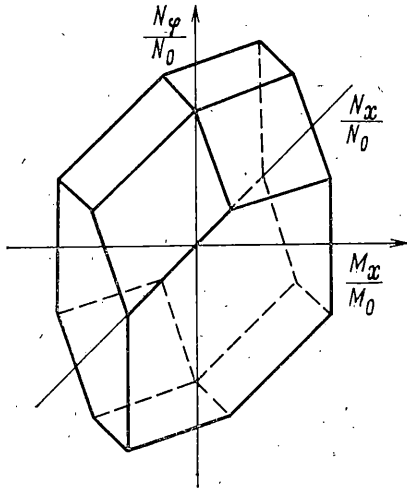
достигает минимального значения. При этом должны быть удовлетворены основные уравнения геометрически нелинейной теории пластических цилиндрических оболочек и учтены дополнительные ограничения

$$\int_0^l E_{0i}(W, dW/dX, U) dX \leq A_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (1.2)$$

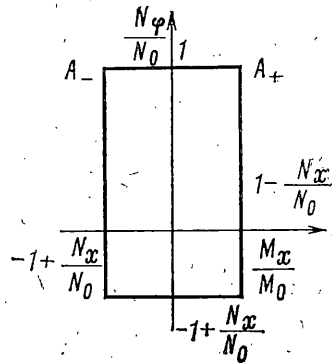
$$H_{0j}(P, h, S_1, \dots, S_n, W(X_j), dW(X_j)/dX, U(X_j)) \leq B_j \quad (j=1, \dots, k) \quad (1.3)$$

Функции E_{0i} , F_0 , G_0 , H_{0j} в формулах (1.1) — (1.3) считаются заданными дифференцируемыми функциями, величины A_i , B_j — заданными постоянными, а W и U обозначают радиальное и осевое перемещения соответственно. Естественно потребовать, что точки X_j являются внутренними точками отрезка $[0, l]$. Иными словами, краевые условия, налагаемые на обобщенные напряжения и перемещения, не входят в состав ограничений (1.3).

Для разъяснения смысла поставленной задачи рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть для простоты $n=1$. Если, например, $G_0 = -P$, $F_0 = -H_{0j} = 0$, $E_{01} = W$, $m=1$, то задача заключается в определении оптимального



Фиг. 1



Фиг. 2

расположения дополнительной опоры и максимального значения внутреннего давления, при которых средний прогиб не превышает заданной величины. Но если $G_0=0$, $F_0=W$, $E_{0i}=A_i=0$, а вместо (1.3) имеются ограничения $P \geq P_1$, $P \geq P_2$, то находится такое расположение дополнительной опоры, при котором интегральный прогиб достигает минимального значения. Величины $P_1=P_1(S_1)$ и $P_2=P_2(S_1)$ обозначают здесь несущую способность участков оболочки, находящихся соответственно слева и справа от средней опоры.

2. В случае замкнутой оболочки продольное усилие $N_x = \frac{1}{2}RP$, где R — радиус оболочки. Тогда уравнение равновесия можно записать в виде [1]:

$$d^2 M_x / dX^2 + \frac{1}{2} RP d^2 W / dX^2 - N_\varphi / R + P = 0 \quad (2.1)$$

где M_x — изгибающий момент, N_φ — окружное усилие. В работе будут учтены умеренно большие прогибы, поэтому компоненты деформации имеют вид

$$\varepsilon_x = dU/dX + \frac{1}{2} (dW/dX)^2, \quad \varepsilon_\varphi = W/R, \quad \kappa_x = -d^2 W / dX^2, \quad \kappa_\varphi = 0 \quad (2.2)$$

Предполагается, что материал оболочки жесткопластический, подчиняющийся условию текучести Треска — Сен-Венана. Соответствующая поверхность текучести для трехслойных цилиндрических оболочек является многогранником (фиг. 1), грани которого определяются зависимостями [5]:

$$\begin{aligned} \frac{N_\varphi}{N_0} = \pm 1, \quad -\frac{N_x}{N_0} - \frac{M_x}{M_0} = \pm 1, \quad \frac{N_\varphi}{N_0} - \frac{N_x}{N_0} = \pm 1, 2, \quad \frac{N_\varphi}{N_0} - \frac{N_x}{N_0} - \frac{M_x}{M_0} = \pm 2 \\ -\frac{N_x}{N_0} + \frac{M_x}{M_0} = \pm 1, \quad 2 \frac{N_\varphi}{N_0} - \frac{N_x}{N_0} + \frac{M_x}{M_0} = \pm 2, \quad N_0 = 2\sigma_0 h, \quad M_0 = \sigma_0 Hh \end{aligned} \quad (2.3)$$

где σ_0 — предел текучести материала.

Ниже применяется теория пластичности типа деформации. Согласно этой теории, вектор, составленный из компонент деформаций (2.2), является внешней нормалью к поверхности текучести, составленной из граней (2.3), если напряженное состояние соответствует некоторой точке на поверхности текучести, и равен нулю, если изображающая точка находится внутри поверхности. В сингулярной точке, т. е. точке, расположенной на линии пересечения граней, вектор компонент деформации заключен внутри угла, ограниченного крайними нормальными к поверхности текучести в данной точке.

Для рассматриваемой оболочки и нагружения усилие $N_x = 1/2 PR$. Ее можно трактовать как уравнение плоскости в пространстве обобщенных напряжений. Линия сечения плоскости $N_x = 1/2 PR$ и многогранника, образованного гранями (2.3), представляет собой в случае $N_x \geq N_0/2$ прямоугольник, изображенный на фиг. 2. Случай $N_x < N_0/2$ в дальнейшем не рассматривается, так как тогда пластических деформаций не возникает [1].

Из ассоциированного закона деформирования и формул (2.2) следует, что в силу $\varepsilon_\varphi \geq 0$ в оболочке реализуется лишь режим деформирования $N_\varphi = N_0$ (фиг. 2). Тогда изгибающий момент удовлетворяет неравенству

$$|M_x| \leq M_0(1 - N_x/N_0) \quad (2.4)$$

Для отрезка A_-A_+ (фиг. 2) закон деформирования можно записать в виде

$$\varepsilon_x = \pm \lambda_*^2 / N_0, \quad \kappa_x = \pm \lambda_*^2 / M_0, \quad \varepsilon_\varphi = \lambda_{**}^2 / N_0 \quad (2.5)$$

где знак плюс соответствует точке A_+ , а минус — точке A_- на фиг. 2. В формуле (2.5) через λ_*^2 обозначен множитель, равный нулю во внутренних точках отрезка A_-A_+ (фиг. 2) и принимающий произвольные положительные значения в точках A_- и A_+ . По аналогии с предыдущим о функции λ_{**}^2 предварительно известно лишь то, что она принимает неотрицательные значения.

Запись приведенных выше ограничений (2.1) — (2.5) упрощается, если пользоваться обозначениями

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{l}, & s_i &= \frac{S_i}{l}, & n_x &= \frac{N_x}{2\sigma_0}, & n_\varphi &= \frac{N_\varphi}{2\sigma_0}, & m &= \frac{M_x}{\sigma_0 H'} \\ w &= \frac{W}{H}, & u &= \frac{Ul}{H^2}, & \omega &= \frac{2l^2}{RH}, & p &= \frac{PR}{2\sigma_0}, & \lambda &= \frac{\lambda_* l}{H\sqrt{\sigma_0 h}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Эти обозначения позволяют записать уравнение равновесия в виде

$$m'' + pw'' + \omega(p - h) = 0 \quad (2.7)$$

где штрихом обозначается дифференцирование по x . Соотношения (2.5) приобретают с учетом (2.2) и (2.6) вид

$$u' = -1/2 (w')^2 \pm 1/2 \lambda^2, \quad -w'' = \pm \lambda^2 \quad (2.8)$$

Последнее уравнение в (2.5) можно опустить, поскольку оно является уравнением для определения неизвестной функции λ_{**} , а вместо (2.4) имеем

$$m - h + 1/2 p \leq 0, \quad m + h - 1/2 p \geq 0 \quad (2.9)$$

В дальнейшем вместо ограничений (2.1) — (2.5) рассматриваются (2.7) — (2.9), причем фазовыми координатами считаются переменные

$$y_1 = m, \quad y_2 = m', \quad y_3 = w, \quad y_4 = w', \quad y_5 = u \quad (2.10)$$

Из формул (2.7) и (2.8) видно, что фазовые координаты удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_2' &= \pm p \lambda^2 + \omega(h - p), & y_3' &= y_4 \\ y_4' &= \pm (-\lambda^2), & y_5' &= 1/2 (-y_4^2 \pm \lambda^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

а также определенным краевым и промежуточным условиям

$$\begin{aligned} y_i(0) &= y_{0i} \quad (i \in I_1), & y_i(s_j) &= y_{sj} \quad (i \in I_{2j}) \quad (j=1, \dots, n) \\ y_i(1) &= y_{1i} \quad (i \in I_3) \end{aligned} \quad (2.12)$$

где I_1 , I_{2j} и I_3 — некоторые подмножества множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Допускается, что фазовые переменные y_1 , y_3 и y_5 являются всюду непрерывными, но y_2 и y_4 могут иметь конечные разрывы при $x=s_j$ ($j=1, \dots, n$), т. е. $[y_2(s_j)] \neq 0$, $[y_4(s_j)] \neq 0$, где $[y(s)] = y(s+0) - y(s-0)$.

3. Сформулированная выше задача рассматривается как вариационная задача теории оптимального управления, где $y_1 - y_5$ являются фазовыми переменными, а λ выступает в роли управления. Величины h, p, s_1, \dots, s_n трактуются как параметры, подлежащие определению.

Из (2.9) и (2.10) следует, что оптимальная траектория данной системы имеет участки, где

$$|y_1| = h - 1/2p \quad (3.1)$$

Ограничение (3.1) является ограничением второго порядка [6-8]. В самом деле, дифференцируя (3.1) дважды по x с учетом (2.10), (2.11), видим, что в выражении для второй производной появляется управление, т. е.

$$y_2 = 0, \quad \pm p\lambda^2 + \omega(h-p) = 0 \quad (3.2)$$

Пусть равенство (3.1) имеет место при $\alpha_i \leq x \leq \beta_i$ ($i=1, \dots, n$). Это означает, что на участках оптимальной траектории $x \in (\alpha_i, \beta_i)$ удовлетворяется как уравнение (3.1), так и соотношения (3.2). Разумеется, знак плюс в (3.2) действителен на участке оболочки, где напряженное состояние соответствует точке A_+ (фиг. 2), а знак минус — на том участке, где реализуется режим A_- . Величины α_i и β_i предварительно неизвестны, они определяются в ходе синтеза задачи.

Для решения задач с фазовыми ограничениями разработано несколько подходов [6-8].

В данной работе используется метод, разработанный в [3, 4], согласно которому следует фиксировать переменную y_2 в точках α_i и β_i :

$$y_2(\alpha_i) = 0, \quad y_2(\beta_i) = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (3.3)$$

и ввести новое управление θ , так, чтобы при всех $x \in (0, 1)$ выполнялось равенство

$$|y_1| - h + 1/2p + \theta^2 = 0 \quad (3.4)$$

Если в (3.4) $\theta=0$, то удовлетворяются также (3.1) и (3.2), если же $\theta \neq 0$, то исходные неравенства (2.9) превращаются в строгие неравенства. Таким образом, в дальнейшем вместо (2.9) учитываются (3.3) и (3.4).

Для вывода необходимых условий оптимальности следует составить расширенный функционал [8]:

$$J_* = G + \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^5 \psi_j y_j' - L \right) dx + \sum_{i \in I_1} \eta_i (y_i(0) - y_{0i}) + \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I_{2j}} v_{ij} (y_i(s_j) - y_{si}) + \quad (3.5)$$

$$+ \sum_{i \in I_3} \rho_i (y_i(1) - y_{1i}) + \sum_{j=1}^n \{ \varphi_j y_2(\alpha_j) + \chi_j y_2(\beta_j) \} + \sum_{i=1}^h \pi_i (H_i - B_i + \theta_i^2)$$

$$L = -F + \psi_1 y_2 + \psi_2 (\pm p\lambda^2 + \omega(h-p) + \psi_3 y_4 \pm (-\psi_4)\lambda^2 + \dots + \psi_5 |2(-y_4^2 \pm \lambda^2) + \sum_{i=1}^m \psi_{0i} E_i + \varphi(|y_1|) - h + p/2 + \theta^2) \quad (3.6)$$

$$G(p, h, s_1, \dots, s_n, y_3(x_*), y_4(x_*), y_5(x_*)) = \\ = G_0(p, h, s_1, \dots, s_n, W, (X_*, dW/dX, U(X_*)))$$

$$F(y_3, y_4, y_5) = l^{-1} F_0(W, dW/dX, U), \quad E_i(y_3, y_4, y_5) = l^{-1} E_{0i}(W, dW/dX, U) \quad (3.7)$$

$$H_j(p, h, s_1, \dots, s_n, y_3(x_j), y_4(x_j), y_5(x_j)) = H_{0j}(P, h, S_1, \dots, S_n, (W(X_j), dW(X_j)/dX, U(X_j))) \quad (j=1, \dots, k)$$

Здесь неизвестные функции $\psi_1 - \psi_5$ называются сопряженными переменными: η_i ($i \in I_1$), ν_{ij} ($i \in I_{2j}, j=1, \dots, n$), ρ_i ($i \in I_3$), π_i ($i=1, \dots, k$) и Φ_j, χ_j ($j=1, \dots, n$) — некоторые множители Лагранжа, а θ_i ($i=1, \dots, k$) — параметры, L — функция Гамильтона.

Относительно множителей ψ_{0i} ($i=1, \dots, m$) предполагается, что они удовлетворяют условиям

$$\psi_{0i} \left(\int_0^1 E_i(y_3, y_4, y_5) dx - A_i \right) = 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (3.8)$$

Полная вариация функционала (3.5) вычисляется по схеме [3, 8]:

$$\Delta \int_0^1 y dx = \int_0^1 \delta y dx - \sum_{i=1}^n [y(s_i)] \Delta s_i, \quad \Delta y(s_i \pm 0) = \delta y(s_i \pm 0) + y'(s_i \pm 0) \Delta s_i \quad (3.9)$$

где δy — вариация переменной y , Δy — ее полная вариация в указанной в скобках точке, а Δs_i — приращения величин s_i .

Согласно сказанному, разные вариации в следующих случаях являются равными ($i=1, \dots, 5$):

$$\begin{aligned} \delta y_i(0) &= \Delta y_i(0), & \delta y_i(1) &= \Delta y_i(1), & \delta y_i(x_*) &= \Delta y_i(x_*) \\ \delta y_i(x_j) &= \Delta y_i(x_j) \quad (j=1, \dots, k), \\ \delta y_2(\alpha_j) &= \Delta y_2(\alpha_j), & \delta y_2(\beta_j) &= \Delta y_2(\beta_j) \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вычислим первую вариацию функционала (3.5) ΔJ_* с учетом соотношений (3.6) — (3.10). Составляя уравнение $\Delta J_* = 0$ и считая независимыми вариации фазовых переменных во внутренних точках, а также их полные вариации в характерных точках интервала $(0, 1)$, выводятся необходимые условия оптимальности. Кроме фазовых переменных $y_1 - y_5$ варьируются управления λ, θ и параметры p, h, s_1, \dots, s_n . В конечном счете это приводит к следующим условиям:

для определения управлений

$$\varphi \theta = 0, \quad \lambda (2p\psi_2 - 2\psi_4 + \psi_5) = 0 \quad (3.11)$$

для неизвестных параметров или множителей Лагранжа

$$\pi_i \theta_i = 0 \quad (i=1, \dots, k) \\ \left\{ \int_0^1 \left(\frac{\varphi}{2} \pm \psi_2 \lambda^2 - \psi_2 \omega \right) dx - \frac{\partial G}{\partial p} + \frac{\partial Y}{\partial p} \right\} \Delta p = 0 \quad (3.12)$$

$$\left\{ \int_0^1 (\psi_2 \omega - \varphi) dx - \frac{\partial G}{\partial h} + \frac{\partial Y}{\partial h} \right\} \Delta h = 0$$

$$\left\{ \left[\sum_{i=1}^5 \psi_i y_i'(s_j) - F_*(s_j) \right] + \frac{\partial G}{\partial s_j} + \sum_{i=1}^k \pi_i \frac{\partial H_i}{\partial s_j} \right\} \Delta s_j = 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad (3.13)$$

$$F_* = F - \sum_{i=1}^m \psi_{0i} E_i, \quad Y = \sum_{i \in I_1} \eta_i y_{0i} + \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I_{2j}} \nu_{ij} y_{sj} +$$

$$+ \sum_{i \in I_3} \rho_i y_i - \sum_{i=1}^h \pi_i H_i$$

Сопряженные переменные должны удовлетворять сопряженной системе

$$\psi_i' = -\partial L / \partial y_i \quad (i=1, \dots, 5) \quad (3.14)$$

и условиям трансверсальности:

в точке $x=0$:

$$\psi_i(0) = 0 \quad (i \in I_1), \quad \psi_i(0) = \eta_i \quad (i \in I_1) \quad (3.15)$$

в точках траектории $x=s_j$, соответствующих дополнительным опорам ($j=1, \dots, n$):

$$\psi_i(s_j) = 0 \quad (i \in I_{2j}), \quad [y_i(s_j)] \neq 0 \quad [\psi_i(s_j)] = 0 \quad (i \in I_{2j}), \quad (3.16)$$

$$[y_i(s_j)] = 0, \quad [\psi_i(s_j)] = v_{ij} \quad (i \in I_{2j})$$

в конечной точке траектории $x=1$:

$$\psi_i(1) = 0 \quad (i \in I_3), \quad \psi_i(1) = -\rho_i \quad (i \in I_3) \quad (3.17)$$

в некоторых характерных промежуточных точках:

$$[\psi_i(x_*)] = \frac{\partial G}{\partial y_i(x_*)} \quad (i=1, \dots, 5), \quad [\psi_2(\alpha_j)] = \varphi_j, \quad [\psi_2(\beta_j)] = \chi_j \quad (j=1, \dots, r) \quad (3.18)$$

$$[\psi_i(\alpha_j)] = [\psi_i(\beta_j)] = 0 \quad (i=1, 3, 4, 5; j=1, \dots, r)$$

$$[\psi_i(x_j)] = \sum_{\alpha=1}^h \pi_\alpha \frac{\partial H_\alpha}{\partial y_i(x_j)} \quad (i=1, \dots, 5; j=1, \dots, h)$$

4. Подробный анализ условий оптимальности (3.11), (3.12) показывает, что оптимальная траектория рассматриваемой системы состоит из частей двух типов

$$\varphi=0, \quad \theta \neq 0, \quad \lambda=0, \quad 2p\psi_2 - 2\psi_4 + \psi_5 \neq 0, \quad (x \in (\alpha_j, \beta_j)) \quad (4.1)$$

$$\varphi \neq 0, \quad \theta=0, \quad \lambda \neq 0, \quad 2p\psi_2 - 2\psi_4 + \psi_5 = 0 \quad (x \in (\alpha_j, \beta_j)) \quad (j=1, \dots, r) \quad (4.2)$$

Участки траектории, где выполняются условия (4.2), можно рассматривать как особые участки [9]. Дифференцируя последнее уравнение в (4.2) по x и заменяя производные сопряженных переменных правыми частями системы (3.14), которая имеет вид

$$\psi_1' = \pm(-\varphi), \quad \psi_2' = -\psi_1, \quad \psi_3' = \partial F_*/\partial y_3 \quad (4.3)$$

$$\psi_4' = -\psi_3 + y_4 \psi_5 + \partial F_*/\partial y_4, \quad \psi_5' = \partial F_*/\partial y_5$$

получим уравнение

$$\psi_3 - p\psi_1 - y_4 \psi_5 - \partial F_*/\partial y_4 + \frac{1}{2} \partial F_*/\partial y_5 = 0 \quad (4.4)$$

Последнее уравнение удовлетворяется тождественно при $x \in (\alpha_j, \beta_j)$. Дифференцирование тождества (4.4) в свою очередь дает

$$\pm p\varphi \pm \psi_5 \lambda^2 - y_4 \frac{\partial F_*'}{\partial y_5} + \frac{\partial F_*'}{\partial y_3} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial F_*'}{\partial y_5} - \frac{\partial F_*'}{\partial y_4} \right)' = 0 \quad (4.5)$$

Формулу (4.5) можно трактовать либо как уравнение относительно λ , либо как условие для определения функции φ в интервалах (α_j, β_j) . Вне

этих интервалов согласно (4.1) $\varphi=0$, поэтому

$$\varphi=0 \quad (x \in (\alpha_j, \beta_j) \quad (j=1, \dots, n))$$

$$\varphi = \frac{1}{p} \left(-\psi_3 \lambda^2 \pm \left(y_4 \frac{\partial F_*}{\partial y_3} - \frac{\partial F_*}{\partial y_3} \right) \pm \left(\frac{\partial F_*}{\partial y_4} - \frac{1}{2} \frac{\partial F_*}{\partial y_5} \right)' \right) \quad (x \in (\alpha_j, \beta_j)) \quad (4.6)$$

Соотношения (4.6) необходимы для интегрирования системы сопряженных уравнений (4.3). При решении системы (4.3) необходимо удовлетворить условиям трансверсальности (3.15)–(3.18), а также условиям (4.2) и (4.4) при $x \in (\alpha_j, \beta_j)$. Построенное таким путем решение сопряженной системы позволяет с помощью (2.14) и (3.12) найти оптимальные значения варьируемых параметров. Следует отметить, что, учитывая (3.15)–(3.18), из (3.12) и (3.13) можно исключить неизвестные множители η_i, ρ_i, ν_{ij} . Величина Y будет иметь теперь вид

$$Y = \sum_{i=1}^5 \left\{ \psi_i(0) y_{0i} + \sum_{j=1}^n [\psi_i(s_j)] y_{sj} - \psi_i(1) y_{1i} \right\} - \sum_{i=1}^k \pi_i H_i \quad (4.7)$$

5. Пусть в качестве примера требуется найти такое расположение дополнительной опоры, при котором интегральный прогиб

$$J = \int_0^1 y_3 dx \quad (5.1)$$

принимает минимальное значение при фиксированной интенсивности внутреннего давления. Давление, конечно, должно быть столь большим, чтобы в обеих частях оболочки возникли пластические деформации. Это означает, что на давление разумно наложить ограничения

$$h + \frac{8h}{8 + \omega s^2} - p \leq 0, \quad h + \frac{(3 + 2\sqrt{2})h}{3 + 2\sqrt{2} + \omega(1-s)^2} - p \leq 0 \quad (5.2)$$

которые гарантируют, что давление превышает несущую способность в обеих частях оболочки [5].

Как давление, так и толщина несущих слоев считаются заданными. Допускается, что при $x=0$ и $x=s$ возникают пластические шарниры, а при $x \in (\alpha_j, \beta_j)$, где $j=1, 2$ – пластические зоны, соответствующие угловой точке A_+ (фиг. 2). При этом $\alpha_1 \leq \beta_1 \leq s \leq \alpha_2 \leq \beta_2 \leq 1$ и краевые условия для фазовых переменных имеют вид (левый конец оболочки закреплён, правый – шарнирно закреплён):

$$y_1(0) = y_1(s) = \frac{1}{2}p - h, \quad y_1(1) = 0, \quad y_3(0) = y_3(s) = y_3(1) = 0$$

$$y_5(0) = 0, \quad y_2(\alpha_j) = y_2(\beta_j) = 0 \quad (j=1, 2) \quad (5.3)$$

Сопряженные переменные для данной задачи (5.1)–(5.3) удовлетворяют согласно (3.15)–(3.18) краевым условиям

$$\psi_5(1) = \psi_i(0) = \psi_i(s) = \psi_i(1) = 0 \quad (i=2, 4) \quad (5.4)$$

и условиям разрыва

$$[\psi_1(s)] \neq 0, \quad [\psi_3(s)] \neq 0, \quad [\psi_2(\alpha_j)] \neq 0, \quad [\psi_2(\beta_j)] \neq 0 \quad (j=1, 2) \quad (5.5)$$

За исключением указанных в (5.5) случаев, сопряженные переменные ψ_1 – ψ_5 являются непрерывными.

Из (3.13) вытекает, что

$$\partial F_* / \partial y_3 = 1, \quad \partial F_* / \partial y_4 = \partial F_* / \partial y_5 = 0 \quad (5.6)$$

Поэтому согласно (4.3) и (5.4) $\psi_5=0$ и (4.6) примет вид

$$\varphi=0 \quad (x \in (\alpha_j, \beta_j)), \quad \varphi=\pm(-1/p) \quad (x \in (\alpha_j, \beta_j) \quad (j=1, 2)) \quad (5.7)$$

Сопряженная система (4.3) превращается с учетом (5.6) и (5.7) в систему

$$\begin{aligned} \psi_1' &= 0 \quad (x \in (\alpha_j, \beta_j)), \quad \psi_1' = 1/p \quad (x \in (\alpha_j, \beta_j)) \\ \psi_2' &= -\psi_1, \quad \psi_3' = 1, \quad \psi_4' = -\psi_3, \quad \psi_5' = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

При решении уравнений (5.8) следует учесть условия (5.4) и (5.5), а также соотношения (4.2) и (4.4), которые в данном случае имеют вид

$$\psi_3 = p\psi_1, \quad \psi_4 = p\psi_2 \quad (x \in (\alpha_j, \beta_j)) \quad (j=1, 2) \quad (5.9)$$

Поскольку теперь $\Delta p = \Delta h = 0$, то условия оптимальности (3.12) дают, что

$$[\psi_1(s)y_2(s) + \psi_3(s)y_4(s)] + \pi_1 \frac{\partial H_1}{\partial s} + \pi_2 \frac{\partial H_2}{\partial s} = 0, \quad \pi_1 \theta_1 = \pi_2 \theta_2 = 0 \quad (5.10)$$

где H_1 и H_2 — левые части неравенств (5.2).

Решение системы (5.8), удовлетворяющее условиям (5.4), (5.5) и (5.9), имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 1/2(2\alpha_1 - s)/p, \quad \psi_2 = 1/2x(s - 2\alpha_1)/p \quad (x \in (0, \alpha_1)) \\ \psi_1 &= 1/2(2x - s)/p, \quad \psi_2 = 1/2x(s - x)/p \quad (x \in (\alpha_1, \beta_1)) \\ \psi_1 &= 1/2(2\beta_1 - s)/p, \quad \psi_2 = 1/2(s - x)(2\beta_1 - s)/p \quad (x \in (\beta_1, s)) \\ \psi_1 &= 1/2(2\alpha_2 - s - 1)/p, \quad \psi_2 = 1/2(s - x)(2\alpha_2 - s - 1)/p \quad (x \in (s, \alpha_2)) \\ \psi_1 &= 1/2(2x - s - 1)/p, \quad \psi_2 = 1/2(s - x)(x - 1)/p \quad (x \in (\alpha_2, \beta_2)) \\ \psi_1 &= 1/2(2\beta_2 - s - 1)/p, \quad \psi_2 = 1/2(1 - x)(2\beta_2 - s - 1)/p \quad (x \in (\beta_2, 1)) \\ \psi_3 &= 1/2(2x - s), \quad \psi_4 = 1/2x(s - x) \quad (x \in (0, s)) \\ \psi_3 &= 1/2(2x - s - 1), \quad \psi_4 = 1/2(s - x)(x - 1) \quad (x \in (s, 1)) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Совместно с сопряженной системой следует проинтегрировать и основную систему (2.14) с учетом краевых условий (5.3). Из уравнений (2.11) в данном случае вытекает (записываются лишь величины, которые будут необходимы для анализа условий (5.10)):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{\frac{2(2h-p)}{\omega(p-h)}}, \quad \alpha_2 = s + \alpha_1, \quad \beta_1 = s - \alpha_1, \quad \beta_2 = 1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} \\ y_2(s \pm 0) &= \pm \omega \alpha_1 (p-h), \quad y_4(s-0) = (\omega/2)(2\alpha_1 - s)(p-h)/p \quad (5.12) \\ y_4(s+0) &= \omega(p-h)(\beta_2 - \alpha_2)(\beta_2 + \alpha_2 - 2)/[2p(s-1)] \end{aligned}$$

Подставляя $\psi_i(s \pm 0)$ и $y_{i+1}(s \pm 0)$ ($i=1, 3$) согласно (5.11) и (5.12) в (5.10), приходим к следующим претендующим на оптимальность вариантам:

$$s = \frac{1}{2} + \frac{2h-p}{2\omega(p-h)}, \quad \pi_1 = \pi_2 = 0, \quad \theta_1 \neq 0, \quad \theta_2 \neq 0 \quad (5.13)$$

$$s = \sqrt{\frac{8(2h-p)}{\omega(p-h)}}, \quad \pi_1 \neq 0, \quad \pi_2 = 0, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 \neq 0 \quad (5.14)$$

$$s = 1 - \sqrt{\frac{(3+2\sqrt{2})(2h-p)}{\omega(p-h)}}, \quad \pi_1 = 0, \quad \pi_2 \neq 0, \quad \theta_1 \neq 0, \quad \theta_2 = 0 \quad (5.15)$$

Формулы (5.14) и (5.15) соответствуют случаям, когда одно из неравенств (5.2) превращается в равенство. Тогда первое уравнение в (5.10) можно рассматривать как уравнение для определения λ_1 или λ_2 .

Анализ соотношений (5.13)–(5.15) показывает, что оптимальное значение величины s выражается в виде

$$s_0 = \sqrt{8(2h-p)/[\omega(p-h)]} \quad (p_0 \leq p \leq p_1) \quad (5.16)$$

$$s_0 = (1/2 + 2h - p)/[2\omega(p-h)] \quad (p_1 \leq p \leq 2h)$$

$$p_0 = h + \frac{h}{1 + \omega/(19 + 6\sqrt{2})}, \quad p_1 = h + \frac{h}{1 + \omega/(15 - 4\sqrt{14})} \quad (5.17)$$

Из (5.16) и (5.17) следует, что

$$s_0(p_0) = 2\sqrt{2}/(1 + 3\sqrt{2}), \quad s_0(p_1) = 8 - 2\sqrt{14} \quad (5.18)$$

Ниже представлена зависимость характерных значений давления p_0 , p_1 от геометрического параметра оболочки

ω	4	8	12	16
p_0/h	1,873	1,774	1,696	1,632
p_1/h	1,882	1,789	1,714	1,652

Видно, что интервал давления (p_0 , p_1) является в (5.16) довольно коротким.

При $p=2h$ согласно (5.12) $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\beta_1=s$, $\beta_2=1$, а (3.1) приобретает вид $|y_1|=0$, т. е. в оболочке реализуется безмоментное напряженное состояние. Когда давление достигает значения $2h$, тогда s_0 достигает значения 0,5. При дальнейшем увеличении давления дополнительная опора сохраняет эту же позицию (оболочка находится в безмоментном состоянии).

Если $p=p_0$, то решение (5.16)–(5.18) совпадает с решением задачи о максимизации несущей способности замкнутой цилиндрической оболочки [10]. Естественно, что при $p < p_0$ оптимальное расположение дополнительной опоры определяется единственным образом (в этом случае $y_3=0$). Но вследствие ограничений (5.2) этот случай выходит за рамки работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lellep J., Sawczuk A.* Optimal project of a cylindrical shell for moderately large deflections. In: Proc. IUTAM Symp. on Structural Control. Ontario, 1979. Amsterdam: North-Holland, 1980, p. 431–446.
2. *Lellep J.* Application of the optimal control theory to optimal design of plastic beams in post-yield range. — Bull. Acad. Polon. Ser. sci Techn., 1981, v. 29, No. 3–4, p. 159–168.
3. *Lellep J.* Parametrical optimization of plastic beams in the post-yield range. — Internat. J. Engng Sci, 1982, v. 20, No. 1, 67–75.
4. *Леллеп Я.* Параметрическая оптимизация пластических балок. — Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1982, № 627, с. 50–57.
5. *Ольшак В., Савчук А.* Неупругое поведение оболочек. М.: Мир, 1969. 144 с.
6. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
7. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
8. *Троицкий В. А.* Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л.: Машиностроение, 1976. 248 с.
9. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.
10. *Rozvany G. I. N.* Optimal design of flexural systems. Beams, grillages, plates and shells. Oxford: Pergamon Press, 1976. 297 p.

Тарту

Поступила в редакцию
16.XII.1982