МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1985

УДК 539.374

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТЕОРИИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

КОНДАУРОВ В. И., НИКИТИН Л. В.

Как показано в [1, 2], уравнения динамики упруговязкопластической среды с конечными деформациями могут быть записаны в виде квазилинейной симметричной системы дифференциальных уравнений, дополненной набором конечных соотношений. Симметричная форма позволяет изучить некоторые качественные свойства решений.

В публикуемой работе рассматриваются ограничения, при которых используемая система является гиперболической. Эти ограничения формулируются в виде необходимых условий, представляющих собой условия существования действительных скоростей распространения характеристических конусов, и более сильных достаточных условий. Последние помимо вещественности скоростей распространения обеспечивают возможность приведения исходной системы уравнений к эквивалентной системе дифференциальных соотношений на характеристических плоскостях с произвольной заданной нормалью. Указывается, что используемое достаточное условие гиперболичности тесно связано с взаимной однозначностью преобразования вектора решения исходной системы в вектор решения симметричной системы и выполняется только на некотором множестве в области допустимых параметров состояния.

Подробно разбирается частный случай, когда внутренняя энергия является функцией энтропии и некоторого тензора упругих деформаций. В этом случае из достаточного условия следуют аналоги так называемых дополнительных неравенств нелинейной теории упругости [3, 4].

Формулируются уравнения переноса, которые описывают изменение амплитуды слабых разрывов, распространяющихся по характеристическим поверхностям.

Приводится оценка роста разности двух решений задачи Коши, из которой следует теорема единственности и непрерывная зависимость решения от начальных данных.

**1. Основные уравнения.** В начальных декартовых координатах $\xi^i$ полная система динамических уравнений, описывающая поведение однородных изотропных упруговязкопластических сред с учетом конечных деформаций и термических эффектов, является системой квазилинейных дифференциальных уравнений [1, 2]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\theta}{\rho_0 c_F}\frac{\partial T_{ik}}{\partial\theta}\frac{\partial v_i}{\partial\xi^k}+\frac{(r^{(p)}+r)}{c_F}\\ \frac{\partial v_i}{\partial t}=\frac{\partial^2 A}{\partial F_{ia}\partial F_{jb}}\frac{\partial F_{jb}}{\partial\xi^a}-\frac{\partial\tau_{mn}}{\partial F_{ia}}\frac{\partial W_{mn}}{\partial\xi^a}-\frac{\partial\eta}{\partial F_{ia}}\frac{\partial\theta}{\partial\xi^a}+b_i\\ \partial F_{ij}/\partial t=\partial v_i/\partial\xi^j,\quad \partial W_{ij}/\partial t=\Psi_{ij}(U_{ab},W_{ab},\theta)\end{gathered}\tag{1.1}$$

и конечных соотношений

$$A=A(U_{ab},W_{ab},\theta),\quad T_{ij}=\rho_0\partial A/\partial F_{ij},\quad \eta=-\partial A/\partial\theta$$
$$c_F=\theta\partial\eta/\partial\theta,\quad \tau_{mn}=-\partial A/\partial W_{mn},\quad \rho\det\|F_{ij}\|=\rho_0$$

$$F_{ij}=R_{i\alpha}U_{\alpha j}=V_{ib}R_{bj},\quad R_{i\alpha}R_{j\alpha}=\delta_{ij},\quad U_{ij}=U_{ji} \tag{1.2}$$

$$F_{ij}=E_{i\alpha}P_{\alpha j},\quad P_{\alpha j}=H_{\alpha b}W_{bj},\quad H_{\alpha i}H_{bi}=\delta_{\alpha b},\quad W_{bj}=W_{jb}$$

$$r^{(p)}=(\tau_{mn}-\theta\partial\tau_{mn}/\partial\theta)\Psi_{mn},\quad \delta=\tau_{mn}\Psi_{mn}\geqslant 0$$

где $\theta>0$ — абсолютная температура, $\rho$, $\rho_0$ — плотность материала среды в актуальной и отсчетной конфигурации, $T_{ik}$ — компоненты несимметричного тензора напряжений Пиолы — Кирхгоффа первого рода, $x^i$ — координаты частицы в актуальной конфигурации, $v_i=\partial x^i/\partial t|_{\xi^j}$ — вектор скорости, $F_{ij}=\partial x^i/\partial\xi^j$, $\det\|F_{ij}\|\neq 0$ — градиент взаимно однозначного отображения отсчетной конфигурации в актуальную, $A$, $\eta$, $\varepsilon=A+\theta\eta$ — плотность свободной энергии, энтропии и внутренней энергии соответственно. Символ $\mathbf{W}$ означает правый симметричный положительно-определенный тензор, входящий в полярное разложение $\mathbf{P}=\mathbf{HW}$, $\mathbf{HH}^T=\mathbf{I}$, $\mathbf{W}=\mathbf{W}^T$, градиента невырожденного отображения отсчетной конфигурации в разгруженную. Тензор $\mathbf{W}$ является мерой «чистых» пластических деформаций. Полные деформации характеризуются симметричным положительно-определенным тензором $\mathbf{U}$, входящим в разложение $\mathbf{F}=\mathbf{RU}$, где $\mathbf{R}$ — ортогональный тензор. Симметричный тензор $\boldsymbol{\tau}$ определяет скорость диссипации $\delta$, величина $r^{(p)}$ равна плотности массовых источников тепла за счет работы на необратимых деформациях, $\boldsymbol{\Psi}$ — тензор производства пластических деформаций, равный нулю в упругом состоянии материала и отличный от нуля, образующий «острый угол» с $\boldsymbol{\tau}$ в пластическом состоянии. Состояние упругости и пластичности соответствует внутренним ($f<0$) и внешним ($f\geqslant 0$) точкам относительно поверхности, представляющей собой так называемое статическое условие пластичности $f(U, W, \theta)=0$.

Соотношения (1.1), (1.2) инвариантны [1] относительно ортогональных преобразований актуальной и отсчетной конфигурации, относительно ортогональных преобразований евклидова пространства, касательного к пространству разгрузки, и удовлетворяют второму началу термодинамики в форме неравенства Клаузиуса — Дюгема [3].

Дифференциальные уравнения (1.1) могут быть записаны в виде системы дифференциальных законов сохранения

$$\partial\varphi_\alpha{}^\circ/\partial t-\partial\varphi_\alpha{}^m/\partial\xi^m=f_\alpha\quad (m=1,2,3;\ \alpha=1,2,\ldots,19) \tag{1.3}$$

$$\varphi_\alpha{}^\circ=\{\varepsilon+{}^1/{}_2v_iv_i,\ v_i,\ F_{ij},\ W_{ij}\},\ f_\alpha=\{r+b_iv_i,\ b_i,\ 0,\ \Psi_{ij}\} \tag{1.4}$$

$$\varphi_\alpha{}^m=\{T_{im}v_i/\rho_0,\ T_{im}/\rho_0,\ v_i\delta_{mj},\ 0\}$$

В областях гладких течений следствием (1.3) является дифференциальный закон сохранения энтропии

$$\partial\eta/\partial t=(\tau_{mn}\Psi_{mn}+r)/\theta \tag{1.5}$$

Действительно, умножая систему (1.3) на вектор

$$v_\alpha=\{\theta^{-1},\ -\theta^{-1}v_i,\ -(\theta\rho_0)^{-1}T_{ij},\ \theta^{-1}\tau_{ij}\} \tag{1.6}$$

и учитывая соотношение $dA=\rho_0{}^{-1}T_{ij}dF_{ij}-\tau_{ij}dW_{ij}-\eta d\theta$, вытекающее из исходных предположений, первого принципа термодинамики и неравенства Клаузиуса — Дюгема, непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости равенств

$$v_\alpha d\varphi_\alpha{}^\circ=d\eta,\quad v_\alpha d\varphi_\alpha{}^m=0,\quad v_\alpha f_\alpha=(\tau_{ij}\Psi_{ij}+r)/\theta \tag{1.7}$$

из которых следует (1.5).

Наличие дополнительного закона сохранения (1.5) вместе с соотношениями (1.7) позволяет аналогично тому, как это сделано в [5—7] для уравнений газовой динамики, магнитогидродинамики и линейной теории упругости, привести систему (1.3) к симметричному виду. Для этого представим два первых соотношения (1.7) в форме $d(v_\alpha\varphi_\alpha{}^\circ-\eta)=\varphi_\alpha{}^\circ dv_\alpha$,

$d(v_\alpha \varphi_\alpha{}^m)=\varphi_\alpha{}^m dv_\alpha$, откуда следует

$$\varphi_\alpha{}^\circ=\partial L^\circ/\partial v_\alpha, \quad \varphi_\alpha{}^m=-\partial L^m/\partial v_\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L^\circ}{\partial v_\alpha}+\frac{\partial}{\partial \xi^m}\frac{\partial L^m}{\partial v_\alpha}=L^\circ_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\beta}{\partial t}+L^\circ_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\beta}{\partial \xi^m}=f_\alpha \tag{1.8}$$

$$L^\circ(v_\gamma)=v_\alpha\varphi_\alpha{}^\circ-\eta=\theta^{-1}(A-{}^1/_2 v_i v_i-T_{ij}F_{ij}+\tau_{ij}W_{ij})$$

$$L^m(v_\gamma)=-v_\alpha\varphi_\alpha{}^m=T_{im}v_i/(\rho_0\theta)$$

$$L_{\alpha\beta}{}^\circ(v_\gamma)=\partial^2 L^\circ/\partial v_\alpha \partial v_\beta, \quad L_{\alpha\beta}{}^m(v_\gamma)=\partial^2 L^m/\partial v_\alpha \partial v_\beta$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений нелинейной теории термоупругопластических тел, чувствительных в пластическом состоянии к скорости деформирования, с помощью замены вектора решения может быть записана в виде квазилинейной симметричной системы (1.8) первого порядка относительно переменных $v_\alpha$, которые определены соотношениями (1.6). Требование невырожденности преобразования от переменных $\varphi_\alpha{}^\circ$ к переменным $v_\alpha$, разумеется, накладывает ограничение $\det\|L_{\alpha\beta}{}^\circ\|\neq 0$.

**2. Дополнительные неравенства. Условия гиперболичности.** Рассмотрим теперь характеристические свойства системы (1.1). Пусть $\varphi(t, \xi^i)=0$ – уравнение характеристической поверхности, $c=-\partial\varphi/\partial t/|\nabla\varphi|$, $\nu_i=\partial\varphi/\partial\xi^i/|\nabla\varphi|$ – скорость распространения и нормаль к этой поверхности. Для системы (1.1) можно показать [1], что $c=0$ является кратным корнем характеристического уравнения. Если $c\neq 0$, то для скоростей распространения имеет место уравнение [1, 2]:

$$\det\left\|c^2\delta_{ij}-\nu_a\frac{\partial^2\varepsilon(\mathbf{F},\mathbf{W},\eta)}{\partial F_{ia}\,\partial F_{jb}}\nu_b\right\|=0 \tag{2.1}$$

Из (2.1) следует, что условием существования ненулевых действительных скоростей распространения характеристических поверхностей является положительная определенность симметричной квадратичной формы

$$\frac{\partial^2\varepsilon(\mathbf{F},\mathbf{W},\eta)}{\partial F_{ia}\,\partial F_{jb}}\nu_a\nu_b\gamma_i\gamma_j>0 \qquad (\forall \nu_i\nu_i\neq 0,\ \gamma_i\gamma_i\neq 0) \tag{2.2}$$

Неравенство (2.2) формально совпадает с аналогичным условием для нелинейно-упругого материала и носит название $SE$-условие [3] или условие сильной эллиптичности [4].

Соотношение (2.2) необходимо и достаточно для существования скоростей распространения характеристических поверхностей. Но вопросы, связанные с возможностью приведения уравнений (1.1) к системе независимых соотношений на характеристических плоскостях, соответствующих заданной нормали $\nu_i$, остаются открытыми, если пользоваться только неравенством (2.2).

Выясним теперь, в каких точках области параметров состояния $p_\alpha=(\mathbf{F},\mathbf{W},\eta)$ система (1.8) будет заведомо гиперболической. Достаточными условиями этого являются следующие ограничения:

$$\frac{\partial^2\varepsilon(p_\gamma)}{\partial p_\alpha\,\partial p_\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta\neq 0 \qquad (\forall\lambda_\alpha\lambda_\alpha\neq 0) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon(p_\gamma)}{\partial p_\alpha\,\partial p_\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta>0, \qquad \lambda_\alpha=\{a_i b_j, 0, 0\} \qquad (\forall a_i a_i\neq 0,\ b_j b_j\neq 0) \tag{2.4}$$

Предположение (2.3) эквивалентно условию определенности (положительной или отрицательной) симметричной матрицы $L_{\alpha\beta}{}^\circ$, и потому существует невырожденное действительное преобразование, одновременно приводящее две симметричные матрицы $L_{\alpha\beta}{}^\circ$ и $\nu_m L_{\alpha\beta}{}^m$ к диагональному виду. Это означает, что для любого направления, задаваемого вектором $\nu_i$, существует $M$, где $M$ — число уравнений исходной системы (1.1), действительных скоростей распространения характеристик и $M$ независимых дифференциальных соотношений на характеристических плоскостях.

Предположение (2.4) выражает условие согласованности достаточного условия (2.3) с необходимым условием (2.2) и означает выпуклость функции $\varepsilon=\varepsilon(\mathbf{F})$ на множестве в пространстве $\{F_{ij}\}$, элементы $F_{ij}^*$ которого равны $b_i a_m F_{mj}$ при заданном $F_{ij}$ и любых $a_m$, $b_j$.

Соотношение (2.3) обеспечивает невырожденность преобразования системы (1.3) в (1.8), поскольку якобиан $\det\|\partial\varphi_\alpha{}^\circ/\partial v_\beta\|=\det\|L_{\alpha\beta}{}^\circ\|\neq0$.

Рассмотрим некоторые следствия, которые вытекают из предположений (2.3), (2.4). Пусть $G_{ij}$, $D_{ij}$ — произвольные тензоры второго ранга, $\alpha$ — отличный от нуля скаляр, $p_\alpha(0)=\{F_{ij},\ W_{ij},\ \eta\}$, $p_\alpha^*\equiv p_\alpha(s)=\{(\mathbf{I}+s\mathbf{G})\mathbf{F},\ \mathbf{W}+s\mathbf{D}\mathbf{W}\mathbf{D}^T,\ (1+s\alpha)\eta\}=p_\alpha(0)+s\lambda_\alpha$, где $\lambda_\alpha=\{\mathbf{GF},\ \mathbf{DWD}^T,\ \alpha\eta\}$, $\lambda_\alpha\lambda_\alpha\neq0$, $s\geqslant0$ — скалярный параметр, достаточно малый для того, чтобы $1+s\alpha\neq0$, а тензоры $(\mathbf{I}+s\mathbf{G})$ и $\mathbf{W}+s\mathbf{DWD}^T$ были невырожденными. Тогда с учетом (2.3):

$$\frac{d\varepsilon[p_\alpha(s)]}{ds}=\frac{\partial\varepsilon(s)}{\partial p_\alpha}\lambda_\alpha,\qquad \frac{d^2\varepsilon}{ds^2}=\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial p_\alpha\,\partial p_\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta\neq0 \tag{2.5}$$

Если внутренняя энергия дважды непрерывно дифференцируема в окрестности $p_\alpha(0)$, то для достаточно малых $s$ величина $d^2\varepsilon(s)/ds^2$ имеет тот же знак, что и $d^2\varepsilon(0)/ds^2$. Поэтому существует интервал, в котором

$$s[\varepsilon'(s)-\varepsilon'(0)]\neq0 \tag{2.6}$$

Из первого соотношения (2.5) тогда следует

$$\left[\frac{\partial\varepsilon(s)}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial\varepsilon(0)}{\partial p_\alpha}\right]s\lambda_\alpha=\left[\frac{\partial\varepsilon(s)}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial\varepsilon(0)}{\partial p_\alpha}\right]\ [p_\alpha(s)-p_\alpha(0)]\neq0$$

Принимая во внимание формулы

$$\frac{1}{\rho_0}T=\frac{\partial\varepsilon}{\partial F}\bigg|_{W,\eta},\qquad \tau=-\frac{\partial\varepsilon}{\partial W}\bigg|_{F,\eta},\qquad \theta=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\bigg|_{F,W}$$

полученное неравенство можно записать в виде

$$\rho_0^{-1}(T_{ij}^*-T_{ij})(F_{ij}^*-F_{ij})-(\tau_{ij}^*-\tau_{ij})(W_{ij}^*-W_{ij})+(\theta^*-\theta)(\eta^*-\eta)\neq0 \tag{2.7}$$

где величины со звездочкой соответствуют аргументу $p_\alpha(s)$, без звездочки — $p_\alpha(0)$.

Соотношения (2.3), или эквивалентные им условия (2.7), выполняются не во всех точках произвольной области параметров состояния $\{\mathbf{F},\ \mathbf{W},\ \eta\}$. Например, для пары $p_\alpha=\{\mathbf{F},\ \mathbf{W},\ \eta\}$, $p_\alpha^*=\{\mathbf{QF},\ \mathbf{W},\ \eta\}$, $\mathbf{QQ}^T=\mathbf{I}$, $\det\mathbf{Q}=1$, отличающейся произвольным чистым поворотом актуальной конфигурации, условие (2.7) с учетом формулы $\mathbf{T}^*=\mathbf{T}(\mathbf{QF})=\mathbf{QT}(\mathbf{F})$ сводится к неравенству

$$(Q_{ia}-\delta_{ia})\sigma_{ab}(Q_{ib}-\delta_{ib})\neq0 \tag{2.8}$$

где $\sigma_{ab}=(\rho/\rho_0)T_{aj}F_{bj}^{-1}$ — симметричный тензор напряжений Коши.

Как показано в [3, 4], необходимым и достаточным условием справедливости (2.8) являются следующие соотношения для главных значений тензора $\boldsymbol{\sigma}$: $\sigma_1+\sigma_2\neq0$, $\sigma_2+\sigma_3\neq0$, $\sigma_1+\sigma_3\neq0$.

Если, например, $\sigma_1=\sigma_2=0$, $\sigma_3\neq0$, этот результат легко проинтерпретировать. Действительно, любое вращение вокруг главной оси, соответствующей $\sigma_3$, приводит к изменению компонент $F_{1j}$ и $F_{2j}$, оставляя неизменными величины $F_{3j}$. Компоненты $T_{1j}=T_{2j}=0$ и $T_{3j}=(\rho_0/\rho)\sigma_3F_{3j}^{-1}$ не меняются при таком вращении, и, следовательно, нарушается взаимная однозначность при замене вектора решения $(\theta,\ v_i,\ F_{ij},\ W_{ij})$ системы (1.1) вектором $(1/\theta,\ -v_i/\theta,\ -T_{ij}/\rho_0\theta,\ \tau_{ij})$ системы (1.8).

Некоторые более интересные следствия ограничений (2.3), (2.4) можно получить, если рассмотреть частный случай, когда внутренняя энергия является изотропной функцией тензора упругих деформаций $e_{ij}$ и энтропии $\eta$, т. е. $\varepsilon=\varepsilon(e_{ij}, \eta)$, где тензор упругих деформаций определен следующим образом [8]:

$$\mathbf{e}=\mathbf{F}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{F}^{T}, \quad e_{ij}=F_{ia}W_{ab}^{-1}W_{bc}^{-1}F_{jc} \tag{2.9}$$

При ортогональных преобразованиях актуальной конфигурации, задаваемых ортогональным тензором $\mathbf{Q}$, имеем $\mathbf{F}\to\mathbf{QF}$, $\mathbf{W}\to\mathbf{W}$, $\mathbf{e}\to\mathbf{QeQ}^{T}$. Ортогональные преобразования отсчетной и разгруженной конфигурации не меняют тензор $\mathbf{e}$.

В этом случае внутренняя энергия является функцией только трех главных инвариантов $I_k$ ($k=1, 2, 3$) и энтропии $\eta$, т. е.

$$\varepsilon=\varepsilon(I_k, \eta), \quad I_1=e_{ii}, \quad I_2={}^1/_2[(e_{ii})^2-e_{ij}e_{ij}], \quad I_3=\det\|e_{ij}\| \tag{2.10}$$

Из условий (2.3), (2.4) тогда следует ряд неравенств, аналогичных так называемым дополнительным неравенствам нелинейной теории изотропных упругих тел [3, 4].

Рассмотрим семейство пар $p_\alpha(0)$ и $p_\alpha(s)=\{\mathbf{F}+s\mathbf{GF}, \mathbf{W}, \eta\}=p_\alpha(0)+s\lambda_\alpha$, $\lambda_\alpha=\{\mathbf{GF}, \mathbf{0}, 0\}$, $s\geqslant 0$, $\det\mathbf{G}\neq 0$. Тогда (2.3) записывается в виде

$$\left(F_{ka}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial F_{ia}\,\partial F_{jb}}F_{mb}\right)G_{ik}G_{jm}\neq 0 \tag{2.11}$$

Пользуясь формулами, следующими из (2.9), (2.10):

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_{ia}}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial e_{pq}}\frac{\partial e_{pq}}{\partial F_{ia}}, \qquad \frac{\partial e_{pq}}{\partial F_{jb}}F_{mb}=\delta_{pj}e_{mq}+\delta_{qj}e_{mp}$$

$$\frac{\partial}{\partial F_{jb}}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_{ia}}\right)=\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial e_{pq}\,\partial e_{st}}\frac{\partial e_{pq}}{\partial F_{jb}}\frac{\partial e_{st}}{\partial F_{ia}}+\frac{\partial\varepsilon}{\partial e_{pq}}\frac{\partial^2 e_{pq}}{\partial F_{ia}\,\partial F_{jb}}$$

$$F_{ka}\frac{\partial^2 e_{pq}}{\partial F_{ia}\,\partial F_{jb}}F_{mb}=(\delta_{pi}\delta_{qj}+\delta_{pj}\delta_{qi})e_{km}$$

неравенство (2.11) можно привести к виду

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial e_{ij}}e_{km}+2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial e_{jq}\,\partial e_{il}}e_{mq}e_{kl}\right)G_{ik}G_{jm}\neq 0 \tag{2.12}$$

Если воспользоваться симметричным тензором напряжений Коши $\sigma_{ij}=(\rho/\rho_0)T_{ia}F_{ja}^{-1}=\rho(\partial\varepsilon/\partial F_{ia})F_{ja}$ и уравнением неразрывности $\rho(\det\|e_{ij}\|)^{1/2}=\rho_0\det\|W_{ab}^{-1}\|$, то можно получить соотношения $2\partial\rho/\partial e_{ab}=-\rho e_{ab}^{-1}$, $2\rho\partial\varepsilon/\partial e_{ij}=\sigma_{ja}e_{ia}^{-1}$, с помощью которых (2.12) приводится к форме

$$(2(\partial\sigma_{ik}/\partial e_{ja})e_{am}+\sigma_{ik}\delta_{jm}-\sigma_{im}\delta_{jk})G_{ik}G_{jm}\neq 0 \tag{2.13}$$

симметричной относительно перестановки пар индексов $ik$ и $jm$.

В главных осях тензора упругих деформаций $\mathbf{e}$ имеем $\sigma_i=\alpha_0(I_k, \eta)+\alpha_1(I_k, \eta)e_i+\alpha_2(I_k, \eta)e_i^2$, где $\alpha_k$ ($k=0, 1, 2$) — скалярные функции, которые выражаются через производные внутренней энергии по инвариантам $I_k$.

Предполагая в дальнейшем, что $e_i\neq e_j$ при $i\neq j$, находим

$$\alpha_1+\alpha_2(e_i+e_k)=(\sigma_i-\sigma_k)/(e_i-e_k) \quad (i\neq k)$$

$$2\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial e_{ja}}e_{am}G_{ik}G_{jm}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\sigma_i-\sigma_k}{e_i-e_k}(e_kG_{ik}+e_iG_{ki})G_{ik} \quad (i\neq k) \tag{2.14}$$

$$2\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial e_{ja}}e_{am}G_{ik}G_{jm}=2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_i}{\partial\ln e_j}G_{ii}G_{jj}$$

$$(\sigma_{ik}\delta_{jm}-\sigma_{im}\delta_{jk})G_{ik}G_{jm}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma_i(G_{ii}G_{jj}-G_{ij}G_{ji})$$

и соотношение (2.13) в главных осях тензора упругих деформаций записывается в виде неравенства для квадратичной формы

$$\begin{gathered}M_{ab}y_ay_b+\sum_{k=1}^{3}N_{AB}^{\,k}y_A{}^ky_B{}^k\neq0\qquad(a,b=1,2,3;A,B=1,2)\\ M_{aa}=2\frac{\partial\sigma_a}{\partial e_a},\qquad M_{ab}=2\frac{\partial\sigma_a}{\partial e_b}+\sigma_a\qquad(a\neq b),\qquad y_a=G_{aa}\\ N_{11}{}^1=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{e_2-e_3}e_3,\qquad N_{22}{}^1=2\frac{\sigma_1-\sigma_3}{e_1-e_3}e_2,\qquad y_A{}^1=\{G_{23},G_{32}\}\\ N_{12}{}^1=N_{21}{}^1=\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma_2-\sigma_3}{e_2-e_3}(e_2+e_3)-(\sigma_2+\sigma_3)\right]\end{gathered}\tag{2.15}$$

а остальные компоненты $2\times2$-матриц $N_{AB}{}^k$ определяются круговой перестановкой чисел 1, 2, 3.

Вводя главные силы $t_i=(e_1e_2e_3)^{1/2}\sigma_i/(e_i)^{1/2}$ и производя замену $z_a=(e_a)^{1/2}y_a/(e_1e_2e_3)^{1/2}$, соотношение (2.15) в силу независимости $y_a$ и $y_a{}^k$ можно записать в виде четырех неравенств

$$J_{ab}z_az_b\equiv\partial t_a/\partial\sqrt{e_b}z_az_b\neq0\quad(a,b=1,2,3)\tag{2.16}$$

$$N_{AB}{}^ky_A{}^ky_B{}^k\neq0\quad(A,B=1,2;\ k=1,2,3)\tag{2.17}$$

Неравенство (2.16) в нелинейной теории упругости [3, 4] носит название IFS-условие.

Из (2.17) следуют соотношения $t_i+t_j\neq0$, $(t_i-t_j)/(e_i-e_j)\neq0$ $(i\neq j)$, второе из которых известно в теории упругости под названием OF-условие.

Привлекая теперь условие (2.4) согласованности достаточного условия гиперболичности с SE-условием (2.2), находим

$$\partial\sigma_1/\partial e_1>0,\quad\partial\sigma_2/\partial e_2>0,\quad\partial\sigma_3/\partial e_3>0\tag{2.18}$$

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{e_1-e_2}>0,\quad\frac{\sigma_1-\sigma_3}{e_1-e_3}>0,\quad\frac{\sigma_2-\sigma_3}{e_2-e_3}>0\quad(i\neq j,\ e_i\neq e_j)\tag{2.19}$$

Неравенства (2.18) — это известное [3, 4] TE-условие, а (2.19) представляет собой неравенства Бейкера — Эриксена — Годунова [3, 4, 6].

Следует отметить, что для среды, внутренняя энергия которой неинвариантна относительно произвольных унимодулярных преобразований отсчетной конфигурации, соотношения (2.12), (2.13) не имеют места и получить неравенства типа (2.16)—(2.19) не удается.

**3. Уравнение переноса.** Рассмотрим теперь уравнение, описывающее изменение амплитуды слабых разрывов решения гиперболической симметричной системы (1.8), распространяющихся по характеристическим поверхностям. Такие уравнения играют важную роль в лучевых методах теории распространения волн [9].

Для вывода уравнения, соответствующего движущейся поверхности $\varphi(t,\xi^i)=0$, продифференцируем по $t$ при $\xi^i=\text{const}$ симметричную систему

(1.8). Для сингулярной поверхности слабого разрыва следует

$$L_{\alpha\beta}{}^{\circ}\left[\frac{\partial q_\beta}{\partial t}\right]_-^+ + L_{\alpha\beta}{}^{i}\left[\frac{\partial q_\beta}{\partial \xi^i}\right]_-^+ = f_{\alpha\beta}[q_\beta]_-{}^+ - \overset{\circ}{L}_{\alpha\beta\gamma}[q_\beta q_\gamma]_-{}^+ - \overset{i}{L}_{\alpha\beta\gamma}[p_\beta{}^i q_\gamma]_-{}^+ \tag{3.1}$$

$$q_\beta = \partial v_\beta/\partial t, \quad p_\beta{}^i = \partial v_\beta/\partial \xi^i, \quad L^{0,i}_{\alpha\beta\gamma} = \partial L^{0\ i}_{\alpha\beta}/\partial v_\gamma$$

$$L^{0,i}_{\alpha\beta\gamma} = L^{0,i}_{\alpha\gamma\beta}, \quad f_{\alpha\beta} = \partial f_\alpha/\partial v_\beta$$

где $[q_\beta]_-{}^+ = q_\beta{}^+ - q_\beta{}^-$ — скачок величины $q_\beta$ на поверхности разрыва.

Условия кинематической и геометрической совместности [10] дают

$$[\partial q_\beta/\partial t]_-{}^+ = -c[\partial q_\beta/\partial \nu]_-{}^+ + \delta[q_\beta]_-{}^+/\delta t$$

$$[\partial q_\beta/\partial \xi^i]_-{}^+ = [\partial q_\beta/\partial \nu]_-{}^+\nu_i + g^{AB}(\partial[q_\beta]_-{}^+/\partial y^A)(\partial \xi^i/\partial y^B)$$

где $\partial q_\beta/\partial \nu = \nu_i \partial q_\beta/\partial \xi^i$ — производная по направлению нормали к поверхности $\varphi=0$, $g^{AB}$ — метрический тензор криволинейной системы координат $y^A$ $(A, B=1, 2)$, введенной на поверхности $\varphi=0$ таким образом, что

$$\left.\frac{\partial \xi^i}{\partial t}\right|_{y^A} = c\nu^i, \quad c = -\frac{1}{|\nabla\varphi|}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\xi^i}, \quad \nu_i = \frac{1}{|\nabla\varphi|}\frac{\partial\varphi}{\partial \xi^i}$$

а величина $\delta q_\beta/\delta t \equiv \partial q_\beta/\partial t|_{y^A}$ — производная вдоль бихарактеристики. Учитывая, что

$$[q_\beta q_\gamma]_-{}^+ = [q_\gamma]_-{}^+ q_\beta{}^- + [q_\beta]_-{}^+ q_\gamma{}^- + [q_\beta]_-{}^+[q_\gamma]_-{}^+, \quad [p_\beta{}^i]_-{}^+ = -\frac{\nu_i}{c}[q_\beta]_-{}^+ \tag{3.2}$$

уравнение (3.1) можно привести к виду

$$(-cL_{\alpha\beta}{}^{\circ} + \nu_i L_{\alpha\beta}{}^{i})\left[\frac{\partial q_\beta}{\partial \nu}\right]_-^+ + L_{\alpha\beta}{}^{\circ}\frac{\delta[q_\beta]_-{}^+}{\delta t} + g^{AB}L_{\alpha\beta}{}^{i}\frac{\partial \xi^i}{\partial y^B}\frac{\partial[q_\beta]_-{}^+}{\partial y^A} =$$

$$= a_{\alpha\beta}[q_\beta]_-{}^+ - b_{\alpha\beta\gamma}[q_\beta]_-{}^+[q_\gamma]_-{}^+ \tag{3.3}$$

$$a_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} - 2\overset{\circ}{L}_{\alpha\beta\gamma}q_\gamma{}^- + (\nu_i/c)\overset{i}{L}_{\alpha\beta\gamma}q_\gamma{}^- - \overset{i}{L}_{\alpha\beta\gamma}(p_\gamma{}^i)^-$$

$$b_{\alpha\beta\gamma} = \overset{\circ}{L}_{\alpha\beta\gamma} - (\nu_i/c)\overset{i}{L}_{\alpha\beta\gamma}$$

Уравнение (3.3) содержит скачки как первых, так и вторых производных вектора решения системы (1.8). Чтобы исключить из (3.3) величины $[\partial q_\beta/\partial \nu]$, умножим (3.3) слева на матрицу $\omega_{\lambda\alpha}$, строками которой являются нуль-векторы симметричной характеристической матрицы $(-cL_{\alpha\beta}{}^{\circ} + \nu_i L_{\alpha\beta}{}^{i})$, соответствующие скорости $c$ распространения характеристик в направлении нормали $\nu_i$. В результате получим

$$\omega_{\lambda\alpha}L_{\alpha\beta}{}^{\circ}\frac{\delta[q_\beta]}{\delta t} + g^{AB}\omega_{\lambda\alpha}L_{\alpha\beta}{}^{i}\frac{\partial \xi^i}{\partial y^B}\frac{\partial[q_\beta]_-{}^+}{\partial y^A} =$$

$$= \omega_{\lambda\alpha}a_{\alpha\beta}[q_\beta]_-{}^+ - \omega_{\lambda\alpha}b_{\alpha\beta\gamma}[q_\beta]_-{}^+[q_\gamma]_-{}^+ \tag{3.4}$$

Пусть кратность собственного числа $c$ равна $m$. Соотношения (3.4) представляют тогда $m$ уравнений для $M=19$ неизвестных $[q_{\alpha\beta}]_-{}^+$. Для исключения части неизвестных воспользуемся уравнением

$$(-cL_{\alpha\beta}{}^{\circ} + \nu_i L_{\alpha\beta}{}^{i})[q_\beta]_-{}^+ = 0 \tag{3.5}$$

которое следует из (1.8) и соотношения $[\partial v_\beta/\partial \nu]_-{}^+ = -[q_\beta]_-{}^+/c$. Поскольку матрица коэффициентов (3.5) симметрична, то ее левые и правые нуль-векторы совпадают. Из предположения, что на рассматриваемом решении система (1.8) гиперболична, следует также, что $\omega_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta=1, 2, \ldots, M)$ — невырожденная матрица. Поэтому общее решение (3.5) можно представить в виде

$$[q_\beta]_-{}^+ = Q_\mu\omega_{\mu\beta} \quad (\mu=1, 2, \ldots, m; \ \beta=1, 2, \ldots, M) \tag{3.6}$$

Подставляя (3.6) в (3.5), придем к искомой системе $m$ уравнений относительно $m$ неизвестных

$$A_{\gamma\mu}\frac{\delta Q_\mu}{\delta t}+B_{\lambda\mu}{}^A\frac{\partial Q_\mu}{\partial y^A}=F_{\lambda\mu}Q_\mu+\Phi_{\lambda\mu\zeta}Q_\mu Q_\zeta \tag{3.7}$$

$$(\lambda,\ \mu,\ \zeta=1,2,\ldots,m;\ A=1,2,\ \alpha,\beta,\gamma=1,2,\ldots,M)$$

$$A_{\lambda\mu}=\omega_{\lambda\alpha}\omega_{\mu\beta}L_{\alpha\beta}{}^\circ,\qquad A_{\lambda\mu}=A_{\mu\lambda}$$

$$B_{\lambda\mu}{}^A=\omega_{\lambda\alpha}\omega_{\mu\beta}L_{\alpha\beta}{}^i g^{AB}\partial\xi^i/\partial y^B,\qquad B_{\lambda\mu}{}^A=B_{\mu\lambda}{}^A$$

$$F_{\lambda\mu}=\omega_{\lambda\alpha}\omega_{\mu\beta}a_{\alpha\beta}-\omega_{\lambda\alpha}L_{\alpha\beta}{}^\circ\frac{\delta\omega_{\mu\beta}}{\delta t}-\omega_{\lambda\alpha}L_{\alpha\beta}{}^i\frac{\partial\xi^i}{\partial y^B}g^{AB}\frac{\partial\omega_{\mu\beta}}{\partial y_A}$$

$$\Phi_{\lambda\mu\zeta}=\omega_{\lambda\alpha}\omega_{\mu\beta}\omega_{\zeta\gamma}b_{\alpha\beta\gamma}$$

Для вывода уравнения, которое описывает изменение во времени интенсивности слабого разрыва на материальной поверхности ($c=0$), следует рассматривать продолженную систему, получающуюся из (1.8) действием оператора $\nu_i\partial/\partial\xi^i$. С учетом формул $\delta\nu_i/\delta t=\nu_i\partial\nu_i/\partial y^A=0$ для $c=0$, условий совместности и представления (3.6) для скачка нормальных производных решения придем к системе (3.7) с матрицами коэффициентов правых частей

$$F_{\lambda\mu}=\omega_{\lambda\alpha}\omega_{\mu\beta}\{f_{\alpha\beta}-\overset{\circ}{L}_{\alpha\beta\gamma}q_\gamma-\overset{i}{L}_{\alpha\beta\gamma}(p_\gamma{}^i+\nu_a\nu_i p_\gamma{}^a)^-\}-$$
$$-\omega_{\lambda\alpha}L_{\alpha\beta}{}^\circ\frac{\delta\omega_{\mu\beta}}{\delta t}-\omega_{\lambda\alpha}L_{\alpha\beta}{}^i g^{AB}\frac{\partial\xi^i}{\partial y^B}\frac{\partial\omega_{\mu\beta}}{\partial y^A}$$

$$\Phi_{\lambda\mu\zeta}=-\omega_{\lambda\alpha}\omega_{\mu\beta}\omega_{\zeta\gamma}\overset{i}{L}_{\alpha\beta\gamma}\nu_i$$

Из нелинейности правой части (3.7) следует, что интенсивность слабого разрыва решения уравнений динамики рассматриваемой среды может обратиться в бесконечность за конечный промежуток времени, т. е. слабый разрыв превратится в ударную волну или контактный разрыв.

Воспользовавшись вместо (3.2) соотношением $[q_\beta q_\gamma]_-{}^+=q_\beta{}^-[q_\gamma]_-{}^++[q_\beta]_-{}^+q_\gamma{}^+$, можно показать, что, как и в уравнениях газовой динамики [11], слабый разрыв не может ни исчезнуть, ни возникнуть, если только решение и его первые производные ограничены в рассматриваемой области. Иными словами, появление слабых разрывов обусловлено либо начальным состоянием, либо скачкообразным изменением свойств материала. Примеры такого рода можно найти в [12, 13] по распространению волн малых деформаций в упругопластических стержнях.

**4. Оценка роста решения задачи Коши.** Пусть симметричная система (1.8) определена в четырехмерной открытой области $\Omega$, граница $\partial\Omega$ которой состоит из трехмерной области $\omega(0)$, лежащей в плоскости $t=0$, и из кусочно-гладкой поверхности $\Gamma(t,\xi)=0$, $t>0$. Будем считать, что $\nabla\Gamma\neq0$, внутри области $\Gamma<0$, а вне ее $\Gamma>0$. Предположим, что решение $v_\gamma(t,\xi)$ задачи Коши для системы (1.8) вместе с коэффициентами уравнений (1.8) удовлетворяет в $\bar\Omega$ условиям гладкости

$$v_\gamma(t,\xi),\ L_{\alpha\beta}{}^\circ(v_\gamma(t,\xi)),\ L_{\alpha\beta}{}^m(v_\gamma(t,\xi)),\ f_\alpha(v_\gamma(t,\xi))\in C_1(\bar\Omega) \tag{4.1}$$

и на данном решении выполняется достаточное условие гиперболичности (2.3), которое запишем (поменяв при необходимости знаки коэффициентов (1.8) на противоположные) так:

$$L_{\alpha\beta}{}^\circ(v_\gamma(t,\xi))\lambda_\alpha\lambda_\beta>0\quad(\forall\lambda_\alpha\lambda_\alpha\neq0,\ (t,\xi)\in\Omega) \tag{4.2}$$

Пусть далее в любой точке границы $\Gamma=0$ нормаль к ней лежит внутри конуса нормалей к характеристической поверхности, соответствующей максимальному собственному числу $c_{\max}=c_{\max}(v(t,\xi),\boldsymbol{\nu})$, $\boldsymbol{\nu}=\nabla\Gamma/|\nabla\Gamma|$, т. е.

имеет место неравенство Гамильтона — Якоби [14]:

$$G \geqslant |c_{\max}|, \quad G=(1/|\nabla\Gamma|)\partial\Gamma/\partial t>0 \tag{4.3}$$

Тогда для любого другого решения $v_\gamma'(t, \xi)$ начальной задачи для (1.8), удовлетворяющего (4.1) — (4.3), имеет место оценка

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{v}'\|_t^2 \leqslant Ne^{tN}\|\mathbf{v}-\mathbf{v}'\|_0^2 \tag{4.4}$$

$$N=\mathrm{const}>0, \quad \|\mathbf{v}\|_t^2=\int\limits_{\omega(t)} v_\alpha L_{\alpha\beta}{}^\circ v_\beta d\omega$$

где $\omega(t)$ — сечение $t=\mathrm{const}$ области $\Omega$.

Для доказательства рассмотрим решения $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ двух задач Коши для системы (1.8) с начальными данными $\mathbf{v}(0,\xi)=\mathbf{v}_0(\xi)$, $\mathbf{v}'(0,\xi)=\mathbf{v}_0'(\xi)$, $\xi\in\in\omega(0)$. Вычитая из (1.8), соответствующего $\mathbf{v}'$, уравнение (1.8) для $\mathbf{v}$, и обозначая $\mathbf{w}(t,\xi)=\mathbf{v}'-\mathbf{v}$, получим

$$\mathbf{L}^\circ(\mathbf{v})\partial\mathbf{w}/\partial t+\mathbf{L}^i(\mathbf{v})\partial\mathbf{w}/\partial\xi^i=\mathbf{R}\mathbf{w} \tag{4.5}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{w}=\mathbf{f}(\mathbf{v}')-\mathbf{f}(\mathbf{v})+(\mathbf{L}^\circ(\mathbf{v}')-\mathbf{L}^\circ(\mathbf{v}))\partial\mathbf{v}'/\partial t+(\mathbf{L}^i(\mathbf{v}')-\mathbf{L}^i(\mathbf{v}))\partial\mathbf{v}'/\partial\xi^i$$

Умножая (4.5) скалярно на $2\mathbf{w}$ и пользуясь симметрией матриц $\mathbf{L}^\circ$ и $\mathbf{L}^i$, придем к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{w}\mathbf{L}^\circ\mathbf{w})+\frac{\partial}{\partial\xi^i}(\mathbf{w}\mathbf{L}^i\mathbf{w})=2\mathbf{w}\mathbf{R}\mathbf{w} \tag{4.6}$$

Интегрируя (4.6) по области $\Omega_t$, представляющей собой часть области $\Omega$, заключенную между плоскостями $t=0$ и $t=\mathrm{const}>0$, и применяя теорему Гаусса — Остроградского к интегралу в левой части, получим

$$\int\limits_{\omega(t)}\mathbf{w}\mathbf{L}^\circ\mathbf{w}d\omega-\int\limits_{\omega(0)}\mathbf{w}\mathbf{L}^\circ\mathbf{w}d\omega+\int\limits_{\Gamma_t}\mathbf{w}(G\mathbf{L}^\circ+\nu_i\mathbf{L}^i)\mathbf{w}d\Gamma=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_{\omega(t')}\mathbf{w}\mathbf{R}\mathbf{w}d\omega dt', \quad \boldsymbol{\nu}=\frac{\nabla\Gamma}{|\nabla\Gamma|}, \quad G=\frac{1}{|\nabla\Gamma|}\frac{\partial\Gamma}{\partial t} \tag{4.7}$$

где $\Gamma_t$ — часть границы $\Gamma$ между плоскостями $t=0$ и $t=\mathrm{const}>0$.

Квадратичная форма

$$\mathbf{w}(G\mathbf{L}^\circ+\nu_i\mathbf{L}^i)\mathbf{w}>0 \tag{4.8}$$

Действительно, $\mathbf{L}^\circ=\mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^T$, $\nu_i\mathbf{L}^i=\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^T$, $\boldsymbol{\Lambda}>0$, $\det\mathbf{S}\neq 0$. Здесь $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathbf{D}$ — диагональные матрицы, причем из уравнения $\det\|-c\mathbf{L}^\circ+\nu_i\mathbf{L}^i\|=0$ следует $D_{\alpha\alpha}==c_\alpha\Lambda_{\alpha\alpha}$ (по $\alpha$ не суммировать).

Но тогда с учетом (4.3): $\quad \mathbf{w}(G\mathbf{L}^\circ+\nu_i\mathbf{L}^i)\mathbf{w}=\sum\limits_{\alpha,\beta}(G+c_\alpha)(S_{\alpha\beta}w_\beta)^2\Lambda_{\alpha\alpha}>0.$

Условия (4.1), (4.2) обеспечивают неравенства

$$a|\mathbf{w}|^2\leqslant\mathbf{w}\mathbf{L}^\circ\mathbf{w}\leqslant A|\mathbf{w}|^2 \quad (a>0) \tag{4.9}$$

$$|\mathbf{w}\mathbf{R}\mathbf{w}|\leqslant N_1|\mathbf{w}|^2\leqslant N\mathbf{w}\mathbf{L}^\circ\mathbf{w}, \quad N=N_1/a$$

Соотношения (4.8), (4.9) позволяют получить из (4.7):

$$\|\mathbf{w}\|_t^2\leqslant\|\mathbf{w}\|_0^2+N\int\limits_0^t\|\mathbf{w}\|_\tau^2 d\tau$$

Отсюда, используя лемму об интегральном неравенстве [14, с. 123], сразу выводим искомую оценку (4.4).

При условии (4.1), (4.2) из (4.4) непосредственно следует единственность и непрерывная зависимость от начальных данных решения задачи Коши для системы (1.8) внутри любой области $\Omega$, для которой справедливо (4.3).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Кондауров В. И.* Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями.— Ж. прикл. механ. и техн. физ., 1982, № 4, с. 133—139.
2. *Кондауров В. И.* О законах сохранения упруговязкопластической среды с конечными деформациями.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 6, с. 100—111.
3. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
4. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
5. *Годунов С. К.* Симметричная форма уравнений магнитной гидродинамики.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. т. 3, № 1, 1972, с. 26—34.
6. *Годунов С. К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 304 с.
7. *Friedrichs K. O., Lax P. D.* Systems of conservation equations with a convex extension.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1971, v. 68, No. 8, p. 1686—1688.
8. *Kondaurov V. I., Kukudjanov V. N.* On constitutive equations and numerical solution of the multidimensional problems of the dynamics of nonisothermic elastic-plastic media with finite deformations.— Arch. Mech., 1979, v. 31, No. 5, p. 623—647.
9. *Энгельбрехт Ю. К., Нигул У. К.* Нелинейные волны деформации. М.: Наука, 1981. 256 с.
10. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
11. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
12. *Кукуджанов В. Н., Никитин Л. В.* Удар о жесткую преграду стержня с кусочно-постоянным пределом текучести.— Инж. ж., 1961, т. 1, № 1, с. 177—183.
13. *Кукуджанов В. Н.* Распространение упругопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформации. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 48 с.
14. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. с. 416.



Москва

Поступила в редакцию
18.X.1983