

УДК 539.214:539.374

## О ЗАКОНЕ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ КОМПОЗИТНОЙ СРЕДЫ

ИСУПОВ Л. П., РАБОТНОВ Ю. Н.

Предсказание эффективных механических характеристик композитов на основе известных свойств компонентов и геометрии строения является одной из фундаментальных проблем механики композитных сред. Большое внимание в настоящее время уделяется описанию эффективных свойств упругопластических материалов. Некоторые модели композитов с упругопластическими составляющими волокнистой и слоистой структуры предложены в [1–5], условие пластичности для изотропной случайно неоднородной среды рассматривалось в [6], метод построения предельных поверхностей для простейших случаев нагружения слоистого композита приведен в [7]. Для композитной структуры с одинаковым деформированием компонентов получены определяющие уравнения и предельная поверхность в [8]. В [9] исследованы некоторые общие свойства определяющих уравнений для неоднородной упругопластической среды. Метод расчета пластических деформаций на основе решения задачи для идеализированного структурного элемента с последующим усреднением рассмотрен в [10].

В публикуемой работе общий метод построения определяющих уравнений предложен на основе полученных соотношений связи пластических деформаций композита в целом и его компонентов. При этом структура композита задается на этапе построения упругой модели. Неоднородная среда с идеально пластическими составляющими оказывается трансляционно-упрочняющейся. Получены уравнения для двухкомпонентной среды с условием пластичности Мизеса для составляющих. В качестве примера рассмотрена простая модель волокнистого композита.

1. При определении эффективных механических характеристик композита, т. е. при переходе от неоднородной среды к эквивалентной однородной, постулируется существование характеристического объема  $V \sim H^3$ , такого, что  $L \gg H \gg h$ , где  $L$  — характерный размер тела или параметр изменяемости внешней нагрузки,  $h$  — размер структурной неоднородности [11]. При выполнении этих условий можно считать, что макронапряжения и макродеформации остаются постоянными в пределах объема  $V$ , а его структура полностью характеризует строение композита.

Рассмотрим статистически однородную среду из двух упругопластических компонентов, так что  $V = V_{(1)} + V_{(2)}$ ,  $v_i = V_{(i)}/V$ , где  $v_i$  — коэффициент объемного содержания  $i$ -го компонента. Определим операции усреднения

$$\langle (\dots) \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\dots) dV, \quad \langle (\dots) \rangle_{(i)} = \frac{1}{V_{(i)}} \int_{V_{(i)}} (\dots) dV$$

$$\langle (\dots) \rangle = v_1 \langle (\dots) \rangle_{(1)} + v_2 \langle (\dots) \rangle_{(2)} \quad (1.1)$$

Обозначим  $\sigma_{ij}^*$  и  $\varepsilon_{ij}^*$  — локальные поля напряжений и деформаций в объеме  $V$ . В дальнейшем все величины со звездочкой относятся к локальным характеристикам внутри объема  $V$ . Пусть на поверхности  $S$  объема  $V$  заданы следующие граничные условия:  $\sigma_{ij}^* n_j = T_i^0 = \sigma_{ij}^0 n_j$  или  $u_i^* = u_i^0 = \varepsilon_{ij}^0 x_j$ , где  $\sigma_{ij}^0$  и  $\varepsilon_{ij}^0$  — постоянные тензоры. Такие граничные условия будем называть однородными. В этом случае справедливы следующие соотношения для средних [11]:

$$\langle \sigma_{ij}^* \rangle = \sigma_{ij}^0, \quad \langle \varepsilon_{ij}^* \rangle = \varepsilon_{ij}^0, \quad \langle \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* \rangle = \langle \sigma_{ij}^* \rangle \langle \varepsilon_{ij}^* \rangle \quad (1.2)$$

где  $\sigma_{ij}^*$  — произвольное статически допустимое поле напряжений, а  $\varepsilon_{ij}^*$  — произвольное кинематически допустимое поле деформаций.

Введем следующие матричные обозначения. Тензоры напряжений и деформаций представим в виде векторов  $\sigma = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sqrt{2}\sigma_{23}, \sqrt{2}\sigma_{13}, \sqrt{2}\sigma_{12}\}'$ ,  $\varepsilon = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \sqrt{2}\varepsilon_{23}, \sqrt{2}\varepsilon_{13}, \sqrt{2}\varepsilon_{12}\}'$ , где штрих означает транспонирование. Тензор четвертого ранга  $A_{ijkl}$ , симметричный по каждой паре индексов, представим в виде матрицы  $A$  размерности  $6 \times 6$ , так, что скалярное произведение векторов  $\sigma' \sigma$  и произведение матрицы на вектор  $A \sigma$  соответствует свертке тензоров по двум индексам.

2. Рассмотрим упругое состояние композита. Запишем закон Гука для неоднородной среды в объеме  $V$ :

$$\sigma_* = C_* \varepsilon_*, \quad \varepsilon_* = A_* \sigma_*, \quad A_* = C_*^{-1} \quad (2.1)$$

Симметричные тензоры  $C_*$  и  $A_*$  являются кусочно-постоянными функциями координат в объеме  $V$ :  $C_*(x) = C_{(i)}$ ,  $A_*(x) = A_{(i)}$  при  $x \in V_{(i)}$ , где  $C_{(i)} = A_{(i)}^{-1}$  — упругие постоянные  $i$ -й фазы.

По определению [9] тензорами макронапряжений и макродеформаций назовем

$$\sigma = \langle \sigma_* \rangle, \quad \varepsilon = \langle \varepsilon_* \rangle \quad (2.2)$$

при однородных граничных условиях на поверхности объема  $V$ . Тензоры эффективных упругих постоянных  $C$  и  $A$  определяются соотношениями

$$\sigma = \langle C_* \varepsilon_* \rangle = C \varepsilon, \quad \varepsilon = \langle A_* \sigma_* \rangle = A \sigma, \quad A = C^{-1} \quad (2.3)$$

Связь локальных и макроскопических напряжений в упругом состоянии задается тензором концентрации напряжений  $B_*$  [9]:

$$\sigma_*(x) = B_*(x) \sigma \quad (2.4)$$

Тензор  $B_*(x)$  зависит от упругих постоянных компонентов и геометрического строения и может быть в принципе найден в результате решения соответствующей краевой задачи для упругой неоднородной среды. Из (2.2) — (2.4) следует ( $I$  — единичная матрица):

$$A = \langle A_* B_* \rangle, \quad \langle B_* \rangle = I \quad (2.5)$$

При переходе к упругопластическому деформированию определим локальную пластическую деформацию  $\varepsilon_*^p$  и пластическую макродеформацию  $\varepsilon^p$ :

$$\varepsilon_*^p = \varepsilon_* - A_* \sigma_*, \quad \varepsilon^p = \varepsilon - A \sigma \quad (2.6)$$

Основную роль при построении упругопластической модели композита играет выяснение связи между  $\varepsilon_*^p$  и  $\varepsilon^p$ . Рассмотрим идеально упругое тело сравнения. Пусть  $\tau_*$  и  $e_*$  — поля напряжений и деформаций в характеристическом объеме  $V$  при однородных граничных условиях, но при условии, что композит остается полностью упругим. На основании (2.1) — (2.4) имеем

$$\tau = \langle \tau_* \rangle, \quad e = \langle e_* \rangle, \quad e_* = A_* \tau_*, \quad e = A \tau, \quad \tau_* = B_* \tau \quad (2.7)$$

Для статически допустимых полей напряжений  $\sigma_*$  и  $\tau_*$  и кинематически допустимых полей деформаций  $\varepsilon_*$  и  $e_*$ , используя (1.2), можем записать  $\langle \tau_*' \varepsilon_* \rangle = \tau' \varepsilon$ ,  $\langle e_*' \sigma_* \rangle = e' \sigma$ . Вычитая эти равенства, с учетом трех последних соотношений (2.7) получим  $\tau' \langle B_*' (\varepsilon_* - A_* \sigma_*) \rangle = \tau' (\varepsilon - A \sigma)$ . Отсюда в силу произвольности вектора  $\tau'$  и на основании определения (2.6), следует

$$\varepsilon^p = \langle B_*' \varepsilon_*^p \rangle \quad (2.8)$$

Вектор пластических макродеформаций находится осреднением аффинно преобразованного вектора локальных пластических деформаций. При этом матрица преобразования  $B_*$  определяется упругими характеристиками композита и геометрией строения и никак не зависит от пластических свойств среды.

Композитная среда, состоящая из пластически несжимаемых компонентов, не является в общем случае, как это видно из (2.8), пластически несжимаемой.

3. Рассмотрим возможность построения определяющих уравнений для композита. Примем гипотезу о равномерном распределении напряжений и деформаций в компонентах [1-5, 7, 8]. Будем считать тензоры локальных напряжений и деформаций кусочно-постоянными, принимающими значения  $\sigma_{(i)} = \langle \sigma_* \rangle_{(i)}$  и  $\varepsilon_{(i)} = \langle \varepsilon_* \rangle_{(i)}$ , если рассматриваемая точка принадлежит объему  $V_{(i)}$ ,  $i=1, 2$ . В этом случае из (2.2) на основании (1.1) следует

$$\sigma = v_1 \sigma_{(1)} + v_2 \sigma_{(2)}, \quad \varepsilon = v_1 \varepsilon_{(1)} + v_2 \varepsilon_{(2)} \quad (3.1)$$

*Упругое состояние.* Закон Гука для компонентов  $\sigma_{(i)} = C_{(i)} \varepsilon_{(i)}$ ,  $\varepsilon_{(i)} = A_{(i)} \sigma_{(i)}$ ,  $A_{(i)} = C_{(i)}^{-1}$  ( $i=1, 2$ ) (суммирование по повторяющимся индексам в скобках отсутствует).

На основании (2.4) получим

$$\sigma_{(i)} = B_{(i)} \sigma, \quad B_{(i)} = \langle B_* \rangle_{(i)} \quad (3.2)$$

Для эффективных упругих постоянных из (2.5) с использованием (1.1) следует

$$A = v_1 A_{(1)} B_{(1)} + v_2 A_{(2)} B_{(2)}, \quad v_1 B_{(1)} + v_2 B_{(2)} = I \quad (3.3)$$

Если матрица упругих податливостей композита  $A$  известна (определена экспериментально или вычислена теоретически), из (3.3) могут быть найдены

$$B_{(1)} = (A_{(1)} - A_{(2)})^{-1} (A - A_{(2)}) / v_1, \quad B_{(2)} = -(A_{(1)} - A_{(2)})^{-1} (A - A_{(1)}) / v_2 \quad (3.4)$$

*Начальная поверхность текучести.* Критерий пластичности для компонентов имеет вид

$$f_{(i)}(\sigma_{(i)}) = k_{(i)}^2 \quad (i=1, 2) \quad (3.5)$$

Учитывая (3.2), получим, что условием достижения предела упругости для композита является выполнение одного из двух следующих равенств:

$$f_{(i)}(B_{(i)} \sigma) = k_{(i)}^2 \quad (i=1, 2) \quad (3.6)$$

Поверхности (3.6) в пространстве напряжений представляют собой результат аффинного преобразования исходных поверхностей (3.5) с матрицами  $B_{(i)}$  соответственно. Эти поверхности могут быть либо вложенными одна в другую; либо пересекающимися.

*Упругопластическое состояние.* Предположим, что первая поверхность вложена во вторую, либо рассмотрим пути нагружения, пересекающие сначала первую поверхность, так что фаза с индексом 1 находится в пластическом, а с индексом 2 — в упругом состоянии. В этом случае для первого компонента при активном нагружении справедлив ассоциированный закон пластичности, а для второго — закон Гука

$$\dot{\varepsilon}_{(1)}^p = \lambda_{(1)} \partial f_{(1)} / \partial \sigma_{(1)}, \quad f_{(1)} = k_{(1)}^2, \quad (\partial f_{(1)} / \partial \sigma_{(1)})' \dot{\sigma}_{(1)} = 0 \quad (3.7)$$

$$\dot{\varepsilon}_{(1)}^p = \varepsilon_{(1)} - A_{(1)} \sigma_{(1)}, \quad \dot{\varepsilon}_{(2)} = A_{(2)} \dot{\sigma}_{(2)} \quad (3.8)$$

Для пластической деформации композита из (2.8) следует

$$\varepsilon^p = v_1 B'_{(1)} \varepsilon_{(1)}^p, \quad \varepsilon^p = \varepsilon - A \sigma \quad (3.9)$$

Из системы уравнений (3.1), (3.8), (3.9), исключив  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_{(1)}$ ,  $\varepsilon_{(2)}$ ,  $\varepsilon_{(1)}^p$  и  $\sigma_{(2)}$  и принимая во внимание также (3.3) и (3.4), найдем следующую связь:

$$\sigma_{(1)} = B_{(1)} \sigma + C_{(1)}^p \varepsilon^p, \quad C_{(1)}^p = \frac{1}{v_1} (A_{(1)} - A_{(2)})^{-1} [I - (B'_{(1)})^{-1}] \quad (3.10)$$

Уравнение поверхности нагружения для композита получим подставив (3.10) во второе соотношение (3.7)

$$f(\sigma, \varepsilon^p) = f_{(1)}(B_{(1)} \sigma + C_{(1)}^p \varepsilon^p) = k_{(1)}^2 \quad (3.11)$$

Отсюда следует, что

$$\partial f / \partial \sigma = B_{(1)}' \partial f_{(1)} / \partial \sigma_{(1)} \quad (3.12)$$

Используя соотношения (3.12), (3.7) и (3.9), можем записать закон пластичности для композитной среды в обычной форме ассоциированного закона ( $\lambda = v_1 \lambda_{(1)}$ ):

$$\varepsilon^p = \lambda \partial f / \partial \sigma, \quad f(\sigma, \varepsilon^p) = k_{(1)}^2, \quad (\partial f / \partial \sigma)' \sigma' \geq 0 \quad (3.13)$$

Для определения параметра  $\lambda$  продифференцируем (3.11) по параметру нагружения. После подстановки (3.13) определим  $\lambda = -(\partial f / \partial \sigma)' \sigma' / (\partial f / \partial \varepsilon^p)' (\partial f / \partial \sigma)$ .

Как показывает структура выражений (3.11) и (3.13), получен закон течения с трансляционным упрочнением. Начальная поверхность текучести (3.6) переносится в пространстве напряжений параллельно себе на вектор  $C_{(1)}^p \varepsilon^p$ .

Для численного интегрирования определяющих уравнений часто оказывается более удобным представить их в другой форме, позволяющей непосредственно вычислять напряжения в компонентах. Рассмотрим систему, образованную первыми уравнениями (3.7), (3.9) и (3.10). После исключения из них  $\varepsilon_{(1)}^p$  и  $\varepsilon^p$  будем иметь

$$\sigma_{(1)} = B_{(1)} \sigma + v_1 \lambda_{(1)} C_{(1)}^p B_{(1)}' \partial f_{(1)} / \partial \sigma_{(1)} \quad (3.14)$$

Внося это выражение в третье равенство (3.7), определим величину  $\lambda_{(1)}$ :

$$\lambda_{(1)} = - \frac{1}{v_1} \frac{(\partial f_{(1)} / \partial \sigma_{(1)})' B_{(1)} \sigma}{(\partial f_{(1)} / \partial \sigma_{(1)})' C_{(1)}^p B_{(1)}' \partial f_{(1)} / \partial \sigma_{(1)}}$$

Если задан путь нагружения  $\sigma(\tau)$ , где  $\tau$  — монотонно изменяющийся параметр нагружения, то система (3.14) становится системой шести обыкновенных дифференциальных уравнений для определения компонентов тензора  $\sigma_{(1)}$ . Из них независимыми являются пять вследствие использованного условия  $f_{(1)}(\sigma_{(1)}) = k_{(1)}^2$ . После того как система (3.14) проинтегрирована, деформации находятся по формулам (3.10); (3.9).

*Предельное состояние.* В предельном состоянии для каждого из компонентов выполняются условия пластичности (3.5), что можно, используя (3.1), представить в виде

$$f_{(1)}(\sigma_{(1)}) = k_{(1)}^2, \quad f_{(2)}(\sigma / v_2 - (v_1 / v_2) \sigma_{(1)}) = k_{(2)}^2 \quad (3.15)$$

Предельная поверхность, которая не зависит от закона пластичности для композита (3.13), ограничивает в пространстве напряжений область, где может перемещаться поверхность нагружения (3.11). Она является огибающей семейства поверхностей  $f_{(2)} = k_{(2)}^2$ , зависящего от векторного

параметра  $\sigma_{(1)}$ , который в свою очередь удовлетворяет условию  $f_{(1)} = k_{(1)}^2$  в (3.15), что позволяет получить ее уравнение методами дифференциальной геометрии. Исключив вектор  $\sigma_{(1)}$  и параметр  $p$  из соотношений (3.15) и равенства

$$\partial f_{(1)} / \partial \sigma_{(1)} = p \partial f_{(2)} / \partial \sigma_{(2)} \quad (3.16)$$

найдем уравнение дискриминантной поверхности, которая в окрестности каждой гладкой точки совпадает с огибающей [12]. Геометрический метод построения такой предельной поверхности рассмотрен в [13].

В частном случае композита «параллельной структуры» с одинаковым деформированием компонентов  $\epsilon_{(1)} = \epsilon_{(2)} = \epsilon$  из полученных уравнений третьей части следуют все результаты [8].

4. Примем, что компоненты композита пластически изотропны и удовлетворяют критерию пластичности Мизеса

$$f_{(i)}(\sigma_{(i)}) = \frac{1}{2} s_{(i)}' s_{(i)} = k_{(i)}^2, \quad k_{(i)} = \sigma_s^{(i)} / \sqrt{3} \quad (i=1, 2) \quad (4.1)$$

где  $\sigma_s^{(i)}$  — предел упругости при одноосном растяжении  $i$ -го составляющего. Девiator напряжений связан с вектором напряжений  $\sigma_{(i)}$  вырожденной матрицей перехода  $s_{(i)} = P \sigma_{(i)}$ , которая обладает свойствами  $P^T = P$ ,  $PP = P$ . Следующие ее компоненты отличны от нуля:  $P_{11} = P_{22} = P_{33} = 2/3$ ,  $P_{44} = P_{55} = P_{66} = 1$ ,  $P_{12} = P_{13} = P_{23} = -1/3$ .

Если в пластическое состояние переходит сначала компонент с индексом 1, то уравнение начальной поверхности текучести (3.6) запишется следующим образом:

$$\frac{1}{2} \sigma' B_{(1)}' P B_{(1)} \sigma = k_{(1)}^2 \quad (4.2)$$

Для поверхности нагружения (3.11) получим

$$\frac{1}{2} (B_{(1)} \sigma + C_{(1)}^p \epsilon^p)' P (B_{(1)} \sigma + C_{(1)}^p \epsilon^p) = k_{(1)}^2 \quad (4.3)$$

Закон пластичности (3.13) с учетом (4.2) принимает вид

$$\epsilon^p = \lambda B_{(1)}' P (B_{(1)} \sigma + C_{(1)}^p \epsilon^p) \quad (4.4)$$

$$\lambda = - \frac{(B_{(1)} \sigma + C_{(1)}^p \epsilon^p)' P B_{(1)} \sigma}{(B_{(1)} \sigma + C_{(1)}^p \epsilon^p)' P C_{(1)}^p B_{(1)}' P (B_{(1)} \sigma + C_{(1)}^p \epsilon^p)}$$

В результате подстановки (4.1) в (3.15), (3.16) и решения полученной системы уравнений может быть найдено уравнение предельной поверхности

$$\frac{1}{2} s' s = (v_1 k_{(1)} + v_2 k_{(2)})^2 \quad (4.5)$$

Как видно из (4.5), предельная поверхность для такого композита оказывается изотропной, так что предельное напряжение, например, при одноосном растяжении в любом направлении одинаково. Но при этом совершенно различна может быть величина накопленной пластической деформации. Возможность достижения предельной поверхности при заданном пути нагружения определяется ограничениями, налагаемыми на величину пластических деформаций.

5. В качестве примера рассмотрим простую модель волокнистого композита с упругой идеально пластической матрицей и упругими волокнами. В дальнейшем индекс 1 относится к матрице, индекс 2 — к волокну. Составляющие предполагаются изотропными; для матрицы справедлив критерий пластичности Мизеса.

Пусть направление армирования совпадает с осью  $x_1$ . Примем следующие гипотезы о взаимодействии компонентов [3]:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)}, \quad \sigma_{11} = \nu_1 \sigma_{11}^{(1)} + \nu_2 \sigma_{11}^{(2)} \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \nu_1 \varepsilon_{ij}^{(1)} + \nu_2 \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)} \quad (i \neq 11)$$

Такой композит оказывается трансверсально-изотропным. Формулы (5.1) и закон Гука позволяют вычислить эффективные упругие постоянные. Для продольного модуля получим обычное правило смесей  $E = \nu_1 E_{(1)} + \nu_2 E_{(2)}$ , где  $E_{(1)}$ ,  $E_{(2)}$  — модули Юнга матрицы и волокна. Трансверсальные упругие характеристики, полученные на основе модели (5.1), оказываются близки к нижней вариационной оценке, полученной без учета геометрии строения [3, 14].

Тензоры концентрации напряжений  $B_{(i)}$  (3.4) для рассматриваемого композита имеют вид

$$B_{(i)} = \begin{vmatrix} \mathbf{b}_{(i)} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{b}_{(i)} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} E_{(i)} & (1-\nu_i) a_{(i)} & (1-\nu_i) a_{(i)} \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

$$a_{(i)} = (-1)^i (\nu_{(2)} E_{(1)} - \nu_{(1)} E_{(2)})$$

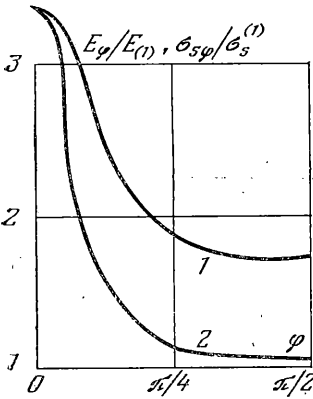
где  $\nu_{(1)}$ ,  $\nu_{(2)}$  — коэффициенты Пуассона матрицы и волокна,  $\mathbf{I}$  — единичная матрица  $3 \times 3$ .

Анализ выражения (3.10) для  $C_{(1)}^p$  с учетом (5.2) позволяет заключить, что

$$C_{(1)}^p = \begin{vmatrix} c_{(1)}^p & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

где  $c_{(1)}^p$  — отличная от нуля матрица размерности  $3 \times 3$ .

Таким образом, поверхность нагружения для композита в пространстве напряжений (4.3) может перемещаться лишь вдоль осей  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ , оставаясь неподвижной относительно осей  $\sigma_{ij}$  ( $i \neq j$ ).



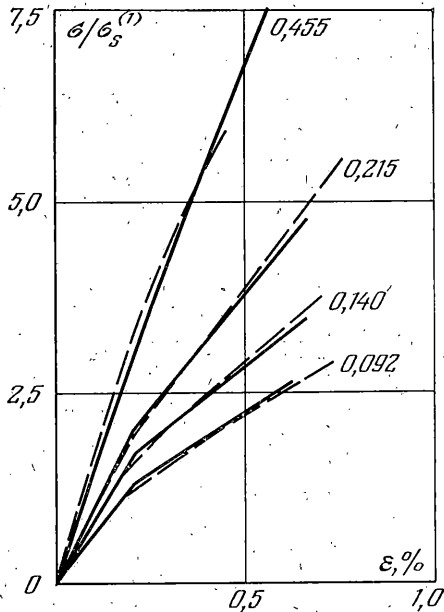
Фиг. 1

Были проведены расчеты эффективных упругопластических характеристик композита алюминиевая матрица — борные волокна, данные по которому приведены в [15]: В качестве матрицы использован алюминиевый сплав Д16 с упругими постоянными  $E_{(1)} = 7,1 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_{(1)} = 0,32$  и пределом текучести  $\sigma^{(1)} = 14,2$  МПа. Для борного волокна  $E_{(2)} = 39,7 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_{(2)} = 0,21$ , предел прочности при растяжении  $\sigma^{(2)} = 2500$  МПа.

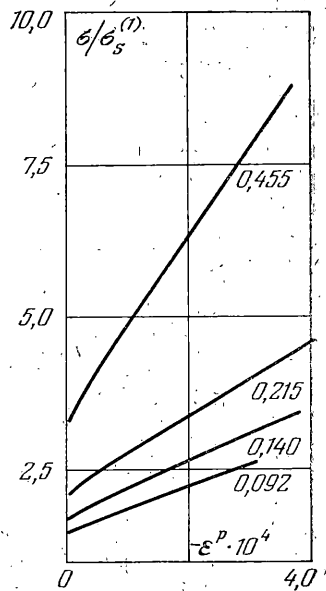
На фиг. 1 приведены графики зависимости модуля Юнга композита  $E_q$  и предела упругости  $\sigma_{sq}$ , рассчитанного на основе (4.2), (5.2), от угла  $\varphi$  между направлением действия растягивающей нагрузки и направлением армирования. Кривая 1 соответствует  $E_q/E_{(1)}$ , кривая 2 —

$\sigma_{sq}/\sigma_s^{(1)}$ . Как видно из приведенных данных, пластическая анизотропия такого композита выше, чем анизотропия упругих свойств.

Диаграммы упругопластического деформирования при одноосном растяжении вдоль направления армирования для различных процентных содержаний армирующих волокон показаны на фиг. 2. Относительное объемное содержание волокна указано у каждой кривой. Диаграммы получены интегрированием определяющих соотношений (4.4) в форме



Фиг. 2



Фиг. 3

(3.14) при заданном процессе нагружения. Штрихами обозначены экспериментальные кривые [15].

На фиг. 3 представлены графики изменения объемной пластической деформации композита с различным содержанием волокна в процессе нагружения, соответствующем диаграммам фиг. 2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Prager W. Plastic failure of fibre-reinforced materials.—Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1969, v. 36, № 3, p. 542–544.
2. McLaughlin P. V. Plastic limit behavior and failure of filament reinforced materials.—Intern. at. J. Solids and Struct. 1972, v. 8, № 11, p. 1299–1318.
3. Dvorak G. J. Bahei-El-Din Y. A. Plasticity analysis of fibrous composites.—Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1982, v. 49, № 2, p. 327–335.
4. Немировский Ю. В. Об упругопластическом поведении армированного слоя.—ПМТФ, 1969, № 6, с. 81–89.
5. Милейко С. Т., Сорокин Н. М., Голофаст Е. Г. Упругопластическое поведение композита с металлической матрицей при одноосном нагружении.—Проблемы прочности, 1974, № 11, с. 45–48.
6. Дудукаленко В. В., Мешков С. И., Сараев Л. А. К расчету эффективных характеристик пластичности неоднородных сред.—ПМТФ, 1979, № 5, с. 150–154.
7. Sawicki A. Yield conditions for layered composites.—Internat. J. Solids and Struct., 1981, v. 17, No. 10, p. 969–979.
8. Работнов Ю. Н. Упругопластическое состояние композитной структуры.—В кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды, М.: Наука, 1969, с. 411–415.
9. Hill R. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals.—J. Mech. Phys. Solids, 1967, v. 15, No. 2, p. 79–95.
10. Зилауц А. Ф., Крегерс А. А., Лагздинь А. Ж., Тегерс Г. А. Расчет упругопластических деформаций композита при сложном нагружении.—Механ. композит. материалов, 1981, № 6, с. 987–992.
11. Hill R. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles.—J. Mech. Phys. Solids, 1963, v. 11, No. 5, p. 357–372.
12. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Физматгиз, 1956. 240 с.
13. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
14. Hashin Z. On elastic behaviour of fibre reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry.—J. Mech. Phys. Solids, 1965, v. 13, No. 3, p. 119–134.
15. Милейко С. Т., Сорокин Н. М., Цирлин А. М. Прочность бороалюминия — композита с хрупким волокном.—Механика полимеров, 1973, № 5, с. 840–846.

Москва

Поступила в редакцию  
8.XII.1983