

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В СЛОИСТОЙ ПОЛОСЕ

ВАСИЛЬЕВ В. В., СИБИРЯКОВ А. В.

В последние годы в различных областях техники получили широкое применение элементы из слоистых композитов, армированных прочными и жесткими волокнами. Обладая высокими механическими характеристиками в плоскости армированных слоев, такие элементы имеют весьма низкую прочность при взаимном отрыве слоев, что связано с малой прочностью полимерного связующего, соединяющего слой. В связи с этим при воздействии нормального по отношению к слоям импульса давления наблюдается откольная форма разрушения композита, связанная с расслоением материала и определяющая, как правило, несущую способность композитных конструкций при динамическом нагружении.

В публикуемой работе рассматривается динамическая задача теории упругости для слоистой полосы или тела, неограниченно протяженного в направлении оси z (фиг. 1). Край $y=0$ и $y=b$ свободно оперты, край $x=0$ свободен от нагрузки, а по краю $x=x_n$ действует давление $q(y, t)$.

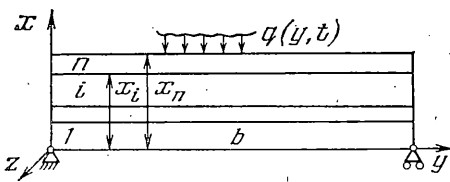
1. Уравнения движения и соотношения упругости записываются для слоя с номером i ($i=1, 2, 3, \dots, n$) следующим образом:

$$C_{41}^i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + (C_{12}^i + C_{33}^i) \frac{\partial^2 v_i}{\partial x \partial y} + C_{33}^i \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} = \rho_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

$$C_{22}^i \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} + (C_{21}^i + C_{33}^i) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} + C_{33}^i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} = \rho_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}$$

$$\sigma_x^i = C_{11}^i \frac{\partial u_i}{\partial x} + C_{12}^i \frac{\partial v_i}{\partial y}, \quad \sigma_y^i = C_{21}^i \frac{\partial u_i}{\partial x} + C_{22}^i \frac{\partial v_i}{\partial y}, \quad \tau_{xy}^i = C_{33}^i \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \quad (1.2)$$

Упругие постоянные $C_{mn}^i = C_{nm}^i$ известным образом выражаются через модули упругости и коэффициенты Пуассона как для случая плоского напряженного состояния, так и для случая плоской деформации. Перемещения в направлениях x, y, u_i, v_i и напряжения удовлетворяют следующим начальным и граничным условиям:



Фиг. 1

ям: $u_i = v_i = \partial u_i / \partial t = \partial v_i / \partial t = 0$ при $t=0$; $\sigma_y^i = 0, u_i = 0$ при $y=0, b$; $\sigma_x^i = \tau_{xy}^i = 0$ при $x=0$; $u_i = u_{i+1}, v_i = v_{i+1}, \sigma_x^i = \sigma_x^{i+1}, \tau_{xy}^i = \tau_{xy}^{i+1}$ при $x=x_i$; $\sigma_x^n = -q, \tau_{xy}^n = 0$ при $x=x_n$.

Представим решение в виде рядов, удовлетворяющих условиям на краях $y=0$ и $y=b$, т. е.

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} U_i^k(x, t) \sin \alpha_k y, \quad v_i = \sum_{k=1}^{\infty} V_i^k(x, t) \cos \alpha_k y, \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{b} \quad (1.3)$$

и проведем преобразование Лапласа — Карсона по времени t . С учетом начальных условий уравнения (1.1) принимают вид

$$C_{11}^i U_i^{L''} - (C_{33}^i \alpha^2 + \rho_i p^2) U_i^L - \alpha (C_{12}^i + C_{33}^i) V_i^{L'} = 0 \quad (1.4)$$

$$\alpha (C_{21}^i + C_{33}^i) U_i^{L'} + C_{33}^i V_i^{L''} - (C_{22}^i \alpha^2 + \rho_i p^2) V_i^L = 0$$

Индекс (k) в трансформантах для упрощения записи опускается. Штрихом обозначена производная по x . Решение уравнений (1.4) записывается в форме

$$U_i^L = \sum_{j=1}^2 F_{ij}, \quad V_i^L = \frac{1}{C_{12}^i + C_{33}^i} \sum_{j=1}^2 \left[C_{11}^i - \frac{1}{(\lambda_j^i)^2} (\alpha^2 C_{33}^i + \rho_i p^2) \right] F_{ij}' \quad (1.5)$$

$$F_{i1} = A_1^i \operatorname{ch} \lambda_1^i x + A_2^i \operatorname{sh} \lambda_1^i x, \quad F_{i2} = A_3^i \operatorname{ch} \lambda_2^i x + A_4^i \operatorname{sh} \lambda_2^i x$$

где λ_j^i ($j=1, 2$) — положительные корни характеристического уравнения

$$C_{11}^i C_{33}^i \lambda^4 + [C_{11}^i (C_{22}^i \alpha^2 + \rho_i p^2) + C_{33}^i (C_{33}^i \alpha^2 + \rho_i p^2) - \alpha^2 (C_{12}^i + C_{33}^i)^2] \lambda^2 + (C_{22}^i \alpha^2 + \rho_i p^2) (C_{33}^i \alpha^2 + \rho_i p^2) = 0 \quad (1.6)$$

В соответствии с равенствами (1.2), (1.3), (1.5) изображения напряжений (k -х коэффициентов разложений по y) имеют вид

$$\sigma_x^{Li} = \sum_{j=1}^2 \beta_j^i F_{ij}', \quad \sigma_y^{Li} = \sum_{j=1}^2 (C_{21}^i - C_{22}^i \alpha \gamma_j^i) F_{ij}', \quad \tau_{xy}^{Li} = \sum_{j=1}^2 \delta_j^i F_{ij} \quad (1.7)$$

$$\beta_j^i = (C_{11}^i - C_{12}^i \alpha \gamma_j^i), \quad \delta_j^i = \alpha + \gamma_j^i (\lambda_j^i)^2$$

$$\gamma_j^i = (C_{11}^i (\lambda_j^i)^2 - C_{33}^i \alpha^2 - \rho_i p^2) / [\alpha (\lambda_j^i)^2 (C_{12}^i + C_{33}^i)] \quad (1.8)$$

Произвольные постоянные A_k^i ($i=1, 2, 3, \dots, n$; $k=1, 2, 3, 4$) определяются из граничных условий при $x=0$, $x=x_n$ и условий сопряжения слоев. Используя последние условия, удается выразить все постоянные через константы, соответствующие первому слою с $i=1$. Имеет место следующая рекуррентная зависимость:

$$U_i^L(x, p) = \sum_{s=0}^1 \sum_{j=1}^2 m_i^{j+2s} F_{(i-1)j}(x_{i-1}, p) \operatorname{ch} \lambda_{s+1}^i (x - x_{i-1}) + \sum_{s=0}^1 \sum_{j=1}^2 k_i^{j+2s} F_{(i-1)j}'(x_{i-1}, p) \operatorname{sh} \lambda_{s+1}^i (x - x_{i-1}) \quad (1.9)$$

$$m_i^{1,2} = (\delta_2^i - \delta_{1,2}^{i-1}) / (\delta_2^i - \delta_1^i), \quad m_i^{3,4} = (\delta_1^i - \delta_{1,2}^{i-1}) / (\delta_1^i - \delta_2^i)$$

$$k_i^{1,2} = (\beta_{1,2}^{i-1} \gamma_2^i - \beta_2^i \gamma_{1,2}^{i-1}) [\lambda_1^i (\beta_1^i \gamma_2^i - \beta_2^i \gamma_1^i)]^{-1}$$

$$k_i^{3,4} = (\beta_{1,2}^{i-1} \gamma_1^i - \beta_1^i \gamma_{1,2}^{i-1}) [\lambda_2^i (\beta_2^i \gamma_1^i - \beta_1^i \gamma_2^i)]^{-1}$$

Последовательно применяя формулу (1.9), окончательно получим для любого слоя с номером i ($i=1, 2, 3, \dots, n$):

$$F_{ii} = \frac{1}{2^i} \sum_{r_1, \dots, r_{i-1}=1}^2 \sum_{\eta_1, \dots, \eta_i} (A_{2r_{i-1}}^1 + \eta_1 A_{2r_i}^1) \prod_{j=1}^{i-1} (m_{2r_{j+1}-2+r_j}^{j+1} + \lambda_{r_j}^j \eta_j \eta_{j+1} k_{2r_{j+1}-2+r_j}^{j+1}) \exp \left[\sum_{j=1}^{i-1} \eta_j \lambda_{r_j}^j (x_j - x_{j-1}) + \eta_i \lambda_{r_i}^i (x - x_{i-1}) \right] \quad (1.10)$$

В равенствах (1.10) с целью получения единой формы записи для всех слоев введены переменные $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, принимающие значения $+1$ и -1 , и предусматривается независимое суммирование по r и η . Например,

первое выражение в круглых скобках принимает четыре значения ($A_1^1 \pm \pm A_2^1$), ($A_3^1 \pm A_4^1$). Индекс l принимает значения 1, 2, причем $r_i = l$. Счита-

ется, что при $i=1$ произведение $\prod_{j=1}^0 (\dots) = 1$. Трансформанты перемеще-

ний и напряжений определяются в результате подстановки (4.10) в формулы (4.5) и (4.7).

Постоянные $A_{1,2,3,4}^1$ находятся из граничных условий при $x=0$ и $x=x_n$ (фиг. 1) и имеют вид

$$A_1^1 = \Delta_1 / \Delta, \quad A_2^1 = \Delta_2 / \Delta, \quad A_3^1 = \xi_2 A_1^1, \quad A_4^1 = \xi_1 A_2^1 \quad (4.11)$$

$$\xi_2 = -\delta_1^1 / \delta_2^1, \quad \xi_1 = -\lambda_1^1 \beta_1^1 / (\lambda_2^1 \beta_2^1) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \Delta = & \sum_{i_2 \dots i_n=1}^2 \sum_{j_2 \dots j_n=1}^2 \sum_{\eta_1 \dots \eta_n} \sum_{\xi_1 \dots \xi_n} \frac{1}{2^{2n}} (\beta_i^n \delta_j^n \eta_n \lambda_i^n - \beta_j^n \delta_i^n \xi_n \lambda_j^n) \times \\ & \times [(m_{2i_2-1}^2 + \eta_1 \eta_2 \lambda_1^1 k_{2i_2-1}^2) \exp(\eta_1 \lambda_1^1 x_1) + \xi_2 (m_{2i_2}^2 + \eta_1 \eta_2 \lambda_2^1 k_{2i_2}^2) \times \\ & \times \exp(\eta_1 \lambda_2^1 x_1)] \prod_{r=2}^{n-1} (m_{2i_{r+1}-2+i_r}^{r+1} + \eta_{r+1} \eta_r \lambda_{i_r}^r k_{2i_{r+1}-2+i_r}^{r+1}) \times \\ & \times \exp \left[\sum_{r=2}^n \eta_r \lambda_{i_r}^r (x_{i_r} - x_{i_{r-1}}) \right] \xi_1 [(m_{2j_2-1}^2 + \lambda_1^1 \xi_1 \xi_2 k_{2j_2-1}^2) \exp(\xi_1 \lambda_1^1 x_1) + \\ & + \xi_1 (m_{2j_2}^2 + \xi_1 \xi_2 \lambda_2^1 k_{2j_2}^2) \exp(\xi_1 \lambda_2^1 x_1)] \prod_{r=2}^{n-1} (m_{2j_{r+1}-2+j_r}^{r+1} + \xi_{r+1} \xi_r \lambda_{j_r}^r k_{2j_{r+1}-2+j_r}^{r+1}) \times \\ & \times \exp \left[\sum_{r=2}^n \xi_r \lambda_{j_r}^r (x_{j_r} - x_{j_{r-1}}) \right] \\ \Delta_l = & \sum_{i_2 \dots i_n=1}^2 \sum_{\eta_1 \dots \eta_n} \frac{R(p)}{2^n} \eta_1^l \delta_{i_n}^n [(m_{2i_2-1}^2 + \eta_1 \eta_2 \lambda_1^1 k_{2i_2-1}^2) \exp(\eta_1 \lambda_1^1 x_1) + \\ & + \xi_l (m_{2i_2}^2 + \eta_1 \eta_2 \lambda_2^1 k_{2i_2}^2) \exp(\eta_1 \lambda_2^1 x_1)] \prod_{r=2}^{n-1} (m_{2i_{r+1}-2+i_r}^{r+1} + \\ & + \eta_{r+1} \eta_r \lambda_{i_r}^r k_{2i_{r+1}-2+i_r}^{r+1}) \exp \left[\sum_{r=2}^n \eta_r \lambda_{i_r}^r (x_r - x_{r-1}) \right] \quad (l=1, 2) \end{aligned}$$

В этих равенствах через $R(p)$ обозначена трансформанта k -го коэффициента разложения типа (4.3) для нагрузки $(-q)$; переменные ξ аналогичны введенным выше переменным η и принимают значения ± 1 .

2. Рассмотрим построение оригиналов. Отметим, что все полученные трансформанты представляют собой отношения обобщенных экспоненциальных многочленов и могут быть условно записаны в виде

$$f(p) = \left\{ R(p) \sum_{m=1}^{L_1} a_m(p) \exp[\alpha_m(x, p)] \right\} \left\{ \sum_{m=1}^{L_2} b_m(p) \exp[\beta_m(p)] \right\}^{-1} \quad (2.1)$$

Для обращения подобных выражений можно применить следующий весьма общий метод. В аргументах экспонент выделяются линейные части и выражение (2.1) представляется в виде бесконечного ряда

$$f(p) = R(p) \sum_{m=1} C_m(p) \exp(\gamma_m p), \quad \gamma_m < 0 \quad (2.2)$$

Далее строятся оригиналы функций $C_m(p)$. Последние являются бесконечно гладкими и для их обращения могут быть использованы известные численные и приближенные методы. Оригиналы функции $f(p)$ строятся по теоремам линейности и запаздывания и представляет собой суперпозицию бесконечной последовательности волн, имеющих определенное время возникновения.

Остановимся подробнее на методах построения оригиналов функций $C_m(p)$. Решения уравнения (1.6) могут быть представлены в виде

$$\lambda = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k p^{-k}, \quad (a_{-1})_1 = p \sqrt{\frac{\rho}{C_{11}}}, \quad (a_{-1})_2 = p \sqrt{\frac{\rho}{C_{33}}} \quad (2.3)$$

где $(a_0)_{1,2} = 0$ и $a_j = 0$ при четных j . Остальные коэффициенты могут быть найдены из рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} & \left[2a_{-1}^2 - \frac{C_{11} + C_{33}}{C_{11}C_{33}} \rho \right] \left[2a_{j+3}a_{-1} + \sum_{n=0}^{j+2} a_n a_{j+2-n} \right] + \\ & + \left[\frac{C_{12}^2 - 2C_{12}C_{33} - C_{11}C_{22}}{C_{11}C_{33}} \alpha^2 \right] \sum_{n=-1}^j a_n a_{j-n} + \sum_{k=0}^j \left\{ \left[\sum_{n=-1}^k a_n a_{k-n} \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[\sum_{n=-1}^{j-k} a_n a_{j-k-n} \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

После подстановки разложения (2.3) в (4.8) и (4.12) получаем, что каждый из коэффициентов $C_m(p)$ в (2.2) может быть представлен рядом Лорана в окрестности бесконечности, причем главная часть этого разложения равна нулю. Таким образом оригинал C_m может быть построен по теореме Хевисайда о разложении. Отметим, что, как правило, запись оригиналов $C_m(p)$ в виде степенных рядов является наиболее удобной и простой.

При достаточно большом p (т. е. в начальные моменты времени) в разложении (2.3) можно ограничиться членами, соответствующими $k = -1$. В этом случае из выражений (1.3), (1.5), (1.7), (1.9), (1.10) и (1.11) можно получить следующие асимптотические приближения:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^L &= -2^{n-l} q^L(y, p) \left\{ \sum_{\eta_1 \dots \eta_n} \prod_{i=1}^{l-1} (1 + \eta_{i+1} \eta_i \kappa_{i,i+1}) \exp \left[\sum_{j=1}^{l-1} \eta_j \lambda_1^j (x_j - x_{j-1}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \eta_l \lambda_1^l (x - x_{l-1}) \right\} \left\{ \sum_{\eta_1 \dots \eta_n} \eta_n C_{11}^n \lambda_1^n \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \eta_{i+1} \eta_i \kappa_{i,i+1}) \times \right. \\ & \left. \times \exp \left[\sum_{j=1}^n \eta_j \lambda_1^j (x_j - x_{j-1}) \right] \right\}^{-1} \\ \sigma_x^{Li} &= -2^{n-l} q^L(y, p) \left\{ \kappa_{l,n} \sum_{\eta_1 \dots \eta_n} \eta_l \prod_{i=1}^{l-1} (1 + \eta_{i+1} \eta_i \kappa_{i,i+1}) \exp \left[\sum_{j=1}^{l-1} \eta_j \lambda_1^j (x_j - \right. \right. \\ & \left. \left. - x_{j-1}) + \eta_l \lambda_1^l (x - x_{l-1}) \right] \right\} \left\{ \sum_{\eta_1 \dots \eta_n} \eta_n \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \eta_{i+1} \eta_i \kappa_{i,i+1}) \times \right. \\ & \left. \times \exp \left[\sum_{j=1}^n \eta_j \lambda_1^j (x_j - x_{j-1}) \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

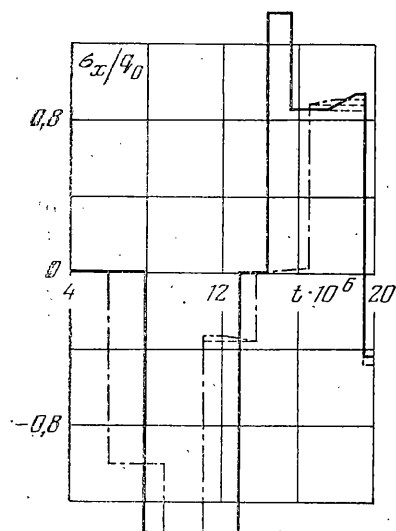
$$(l=1, 2, 3, \dots, n) \quad \kappa_{r,r+1} = (C_{11}^r \rho_r / (C_{11}^{r+1} \rho_{r+1}))^{1/2}$$

где $q^L(y, p)$ — изображение внешней нагрузки (давления).

Анализ асимптотического решения показывает, что в рассматриваемом случае напряжения σ_y^r появляются из-за эффекта Пуассона, функции τ_{xy}^r и v имеют более высокий порядок малости, коэффициенты C_m ряда (2.2) постоянны и оригинал представляет собой последовательность волн, форма которых повторяет внешнее воздействие. Отметим, что трансформанты (2.4) с точностью до механических характеристик совпадают и изображениями соответствующих функций, описывающих распространение одномерных волн в слоистом стержне.

Таким образом, в начальные моменты времени волновой процесс является фактически одномерным, причем существенны только нормальные напряжения, направленные по действию нагрузки.

3. В качестве примера рассмотрим двухслойную полосу из композиционного материала, армированного в направлении оси y (фиг. 1), $b=0,4$ м. Нижний силовой слой изготовлен из боропластика, причем $C_{11}^1 = 19$ ГПа, $C_{22}^1 = 211$ ГПа, $C_{33}^1 = 4,55$ ГПа, $C_{12}^1 = 5,1$ ГПа, $\rho_1 = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, $x_1 = 12 \cdot 10^{-3}$ м. Верхний (нагруженный) защитный слой изготовлен из органоластика, причем $C_{11}^2 = 6$ ГПа, $C_{22}^2 = 105$ ГПа, $C_{33}^2 = 4,2$ ГПа, $C_{12}^2 = 1,6$ ГПа, $\rho_2 = 1,4 \cdot 10^3$ кг/м³, $x_2 = 27 \cdot 10^{-3}$ м. В начальный момент времени $t=0$ на полосу действует прямоугольный импульс равномерного давления $q=q_0(t)$ длительностью $T=5 \cdot 10^{-6}$ с.



Фиг. 2

Результаты решения представлены на фиг. 2, где изображена суперпозиция первых 20 волн напряжений. Из графика следует, что при $t \approx 3T$ в нижнем слое возникают растягивающие напряжения, которые в 1,27 раза превосходят интенсивность действующего давления и могут привести к откольному разрушению. Распределение напряжений достаточно хорошо описывается асимптотическим решением (2.4) (оно показано пунктиром на участках, где не совпадает с полным решением), т. е. по существу может быть получено при помощи одномерной модели — слоистого стержня.

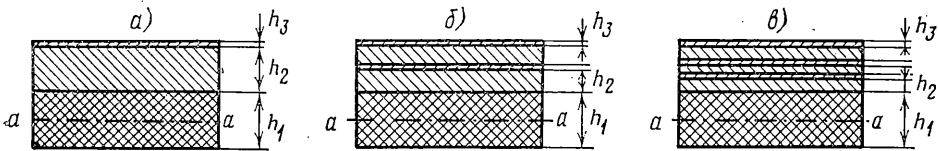
В связи с тем, что амплитуда растягивающего напряжения, которое может вызвать откольное разрушение, зависит от структуры слоистого пакета, последнюю можно выбрать так, чтобы это напряжение было минимальным.

Ввиду того что экспериментальное определение прочности связи между слоями при высоких скоростях нагружения связано с большими трудностями, представляется целесообразным задавать схему расположения слоев так, чтобы в расчетном сечении выполнялось условие $\sigma_x \leq 0$.

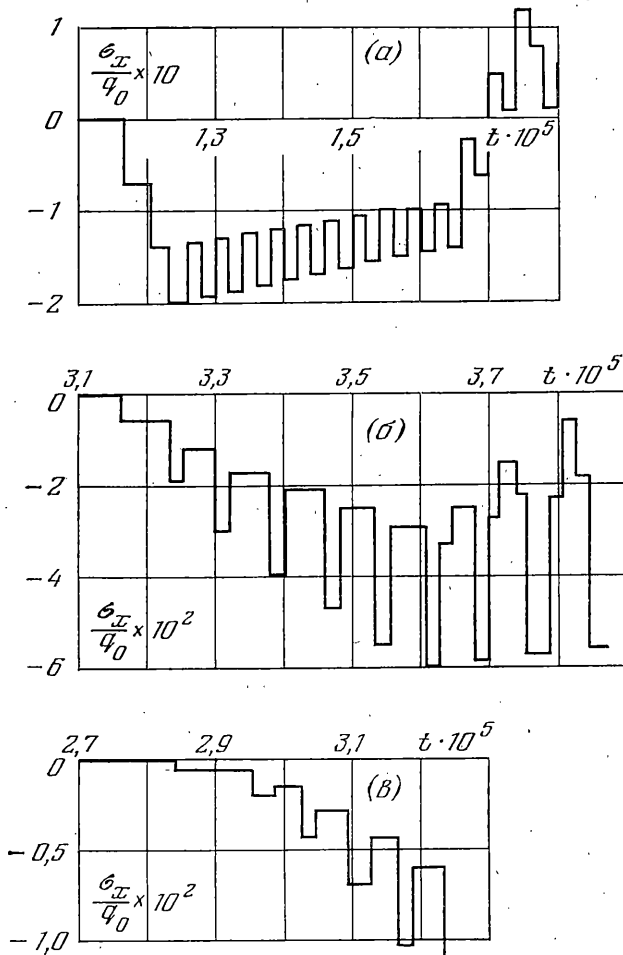
В качестве примера рассмотрим трехслойный пакет, показанный на фиг. 3, а и состоящий из нижнего несущего композиционного слоя ($C_{11}^1 = 10$ ГПа, $\rho_1 = 1,4 \cdot 10^3$ кг/м³, $h_1 = 12 \cdot 10^{-3}$ м), легкого заполнителя ($C_{11}^2 = 0,28$ ГПа, $\rho_2 = 0,25 \cdot 10^3$ кг/м³, $h_2 = 10^{-2}$ м) и наружного металлического слоя ($C_{11}^3 = 72$ ГПа, $\rho_3 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $h_3 = 10^{-3}$ м). На поверхности наружного слоя действует прямоугольный импульс внешнего давления q_0 длительностью 10^{-6} с.

На фиг. 4, а показано изменение во времени относительных напряжений в расчетном сечении $a-a$ ($x = 6,5 \cdot 10^{-3}$ м, фиг. 3, а), где положительные напряжения максимальны. Расчет осуществлялся по одномерной стержневой модели.

Попытаемся, не изменяя суммарной толщины и материалов слоистой системы, снизить эти напряжения соответствующим выбором структуры пакета. При этом воспользуемся следующим эффектом. Внешний импульс, проникнув в наружный слой, частично отразится от границы этого слоя и заполнителя. Отраженный импульс после прохождения пути, равного двойной толщине внешнего слоя, снова частично пройдет в заполнитель, частично отразится от границы третьего и второго слоев и т. д. При каждом таком процессе амплитуда отраженной волны составит $(1 - \kappa_{2,3}) / (1 + \kappa_{2,3})$ от амплитуды падающей волны ($\kappa_{i,j}$ — отношение волновых сопротивлений i -го и j -го слоев). Для рассматриваемых заполнителей такая потеря в амплитуде меньше 4%.



Фиг. 3



Фиг. 4

Таким образом внешний слой становится источником сжимающих периодических импульсов со слабо падающей амплитудой, которые защищают нижний несущий слой от растягивающих напряжений в сечениях с координатами, кратными толщине внешнего слоя и близкими к ним. Чтобы использовать описанный эффект, введем дополнительный слой, служащий источником импульсов сжимающих напряжений (фиг. 3, б).

Соответствующий характер изменения напряжений в сечении $a-a$ показан на фиг. 4, б. Сравнивая фиг. 4, а и б, можно заключить, что введение дополнительного слоя значительно снижает уровень напряжений. Введение второго дополнительного слоя (фиг. 3, в) приводит к дальнейшему снижению напряжений (фиг. 4, в).

Введение дополнительных слоев исключает появление растягивающих напряжений лишь в начальный период времени, однако, как правило, этого оказывается достаточным для предотвращения откольного разрушения, так как реальные материалы обладают не учитываемыми в данной работе демпфирующими свойствами, снижающими уровень напряжений во времени.

Москва

Поступила в редакцию
9.III.1983