**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1984**

УДК 539.3

О ТРЕЩИНЕ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА В УПРУГОЙ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

ГОЛЬДШТЕЙН Р. В., КАПЦОВ А. В.

Методом последовательных приближений решается пространственная задача о воздействии гармонической волны на трещину, занимающую плоскую область в безграничной упругой среде. На примере эллиптической трещины нормального отрыва в первом приближении вычисляется коэффициент интенсивности напряжений для низких частот (длина волны больше размеров трещины) и определяется область сходимости метода. В случае трещины, занимающей круговую область, приводится сравнение с известным численным решением, показывающее эффективность полученных формул до частот, близких к резонансным.

1. Рассмотрим безграничную упругую среду с трещиной, в которой распространяется гармоническая волна смещений и напряжений, задаваемая соответственно законами $(u_j^{\text{inc}}(\mathbf{x}), \sigma_{ij}^{\text{inc}}(\mathbf{x}))\exp(-i\omega t)$. На основании принципа суперпозиции полное волновое поле можно представить в виде суммы падающей волны, распространяющейся в сплошном теле, и поля рассеянной волны, вызываемой приложением к поверхностям трещины усилий

$$t_j^{\pm}(\mathbf{x}, t) = \exp(-i\omega t)\, t_j^{\pm}(\mathbf{x}), \qquad t_j^{\pm}(\mathbf{x}) = -n_k^{\pm}\sigma_{jk}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

где n_k^+ — внешняя нормаль по отношению к области вне трещины.

Для волны рассеяния сформулируем следующую задачу. Пусть трещина занимает плоскую область G (площади G) в плоскости $x_3=0$ и к верхней и нижней ее поверхностям приложены равные и противоположно направленные усилия $t_j^{\pm}(\mathbf{x}, t)$ $(t_j^+(\mathbf{x}, t)+t_j^-(\mathbf{x}, t)=0$ на поверхности трещины). Скачок смещений на поверхности трещины $\Delta b_j(\mathbf{x}) = b_j^+(\mathbf{x}) - b_j^-(\mathbf{x})$ равен нулю вне области G.

Эта задача с помощью динамического аналога теоремы взаимности Бетти сводится к независимой системе интегродифференциальных уравнений относительно скачков смещений для трещины нормального отрыва (которая будет рассматриваться в дальнейшем) и трещины сдвига [1].

С помощью обобщенного преобразования Фурье по переменным $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ с параметром $\xi = (\xi_1, \xi_2)$:

$$f^{\frown}(\xi) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \exp[i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)]\, dx_1\, dx_2 \tag{1.2}$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} f^{\frown}(\xi) \exp[-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)]\, d\xi_1\, d\xi_2$$

интегродифференциальные уравнения задачи о трещине нормального отрыва представляются в виде

$$t_3(\mathbf{x})=A^*\Delta b_3+A_\omega{}^*\Delta b_3 \qquad (1.3)$$

$$A^*\Delta b_3=-\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\exp[-i(\xi_1x_1+\xi_2x_2)]A\Delta b_3{}^\vee d\xi_1\,d\xi_2$$

$$A_\omega{}^*\Delta b_3=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\exp[-i(\xi_1x_1+\xi_2x_2)]A_\omega\Delta b_3{}^\vee d\xi_1\,d\xi_2$$

$$A=\frac{\mu}{2(1-\nu)}|\xi|,\qquad A_\omega=A+\frac{\mu}{2\beta^2}\left[\frac{(\beta^2-2|\xi|^2)^2}{\sqrt{|\xi|^2-|\alpha|^2}}-4|\xi|^2\sqrt{|\xi|^2-\beta^2}\right]$$

$$|\xi|^2=\xi_1{}^2+\xi_2{}^2,\quad \beta=\omega/c_s,\quad \alpha=\omega/c_d,\quad c_s=(\mu/\rho)^{1/2}$$

$$c_d=[(\lambda+2\mu)/\rho]^{1/2}$$

где λ, μ — коэффициенты Ламе, ν — коэффициент Пуассона, причем $A_\omega\to 0$ при $\omega\to 0$. В этом случае уравнение (1.3) переходит в уравнение статической задачи. Если положить в (1.3) $t_3(\mathbf{x})=0$, то приходим к известному уравнению для волны Рэлея, распространяющейся по границе свободного полупространства, из которого можно найти связь ω и $|\xi|$.

Введем безразмерные переменные: $y_\gamma=x_\gamma/d$, $\tau_\gamma=d\xi_\gamma$, $\gamma=1,\,2$, $d^2=G/\pi$, $q_3(y)=t_3(\mathbf{x})/\mu$, $\Delta u_3(y)=\Delta b_3(\mathbf{x})/d$. Учитывая, что

$$b_3{}^\vee(\xi)=d^3\iint\limits_{G_{k_1}}u(y)\exp[i(\tau_1y_1+\tau_2y_2)]dy_1\,dy_2=d^3u^\vee(\tau) \qquad (1.4)$$

где G_{k_1} — безразмерная площадь, по величине равная площади круга единичного радиуса, перепишем (1.3):

$$q_3(y)=(A^*+A_h{}^*)\Delta u_3$$

$$A^*\Delta u_3=-\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\exp[-i(y_1\tau_1+y_2\tau_2)]A\Delta u_3{}^\vee(\tau)\,d\tau_1\,d\tau_2$$

$$(1.5)$$

$$A_h\Delta u_3=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\exp[-i(y_1\tau_1+y_2\tau_2)]A_h\Delta u_3{}^\vee(\tau)\,d\tau_1\,d\tau_2$$

$$A=|\tau|/(2(1-\nu)),\qquad |\tau|^2=\tau_1{}^2+\tau_2{}^2$$

$$A_h=A+\frac{1}{2h^2}\left[\frac{(h^2-2|\tau|^2)^2}{\sqrt{|\tau|^2-s^2}}-4|\tau|^2\sqrt{|\tau|^2-h^2}\right]$$

где $h=\beta d$ определяет отношение характерного размера трещины к длине поперечной упругой волны, соответствующей данной частоте осцилляции, а $s=\alpha d$.

Будем искать решение задачи (2.3), (1.5) методом последовательных приближений, взяв за нулевое приближение решение статической задачи, считая известным разрешающий оператор R^*, обратный A^*, такой, что

$$\Delta u_3{}^\circ=R^*q_3 \qquad (1.6)$$

Тогда скачок смещений и нагрузка, соответствующая этому скачку смещений для статической задачи, представляются в виде

$$\Delta u_3=\Delta u_3{}^{\circ}+\sum_{h=1}^{\infty}(-R^*A_h{}^*)\Delta u_3{}^{\vee\circ}$$

$$A\Delta u_3=q_3-\sum_{h=0}^{\infty}A_h{}^*(-R^*A_h{}^*)^h\Delta u_3{}^{\vee\circ} \tag{1.7}$$

2. Метод последовательных приближений, а следовательно, и ряды в (1.7) сходятся при достаточно малых значениях параметра **h**. Получим условия сходимости метода. Отметим вначале, что решение псевдодифференциального уравнения (1.5) существует и единственно в $\overset{\circ}{H}_{1/2}(G_{K_1})$ при $q_3\in H_{-1/2}(G_{K_1})$ [2].

Введем оператор B^*, такой, что

$$B^*\Delta u_3=R^*q_3-R^*A_h{}^*\Delta u_3 \tag{2.1}$$

Найдем условия, при которых оператор B^* сжимающий, т. е.

$$\|B^*(v^{(1)}-v^{(2)})\|_{1/2}\leqslant\theta\|v^{(1)}-v^{(2)}\| \quad (0<\theta<1) \tag{2.2}$$

Рассмотрим вначале величину

$$\|B^*(v^{(1)}-v^{(2)})\|_{1/2}=\|R^*A_h{}^*(v^{(1)}-v^{(2)})\|_{1/2} \tag{2.3}$$

Покажем, что для операторов R^* и K^*:

$$\|R^*K^*(v^{(1)}-v^{(2)}\|_{1/2}\leqslant\frac{\sqrt{1-\varkappa}}{\varkappa}\|K^*(v^{(1)}-v^{(2)})\|, \qquad \varkappa=\frac{\lambda(K_1)}{1+\lambda(K_1)} \tag{2.4}$$

где $\lambda(K_1)$ — наименьшее собственное значение оператора $P_{K_1}Au$, P_{K_1} — оператор сужения на область K_1 — круг единичного радиуса.

Для этого воспользуемся следующим изопериметрическим неравенством, доказанным в [3]: для безграничной среды с плоской трещиной нормального отрыва заданной площади величина $\lambda(G_{K_1})$ принимает минимальное значение в случае круговой трещины, т. е.

$$\lambda(G_{K_1})\geqslant\lambda(K_1) \tag{2.5}$$

Там же показано, что оператор $(Au,\ u)$ коэрцитивен

$$(Av,v)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{G_{K_1}}|\tau|\ |v(\tau)|^2\,d\tau_1\,d\tau_2\geqslant\lambda_1(G_{K_1})\|v\|^2\geqslant\lambda_1(K_1)\|v\|^2 \tag{2.6}$$

Поскольку

$$(Av,\ v)=\varkappa(Av,\ v)+(1-\varkappa)(Av,\ v)\geqslant\varkappa(Av,\ v)+(1-\varkappa)\lambda(K_1)\|v\|^2 \tag{2.7}$$

подберем $\varkappa$ так, чтобы $\varkappa=(1-\varkappa)\lambda(K_1)$. По определению

$$\|v\|_{1/2}{}^2=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|\tau|)\,|v^{\vee}|^2d\tau_1\,d\tau_2=\|v\|^2+(Av,v) \tag{2.8}$$

С учетом (2.7) из (2.8) получаем

$$(Av,\ v)\geqslant\varkappa\|v\|_{1/2}{}^2 \tag{2.9}$$

С другой стороны, из (2.8) с учетом (2.9) следует

$$\|v\|_{1/2}{}^2(1-\varkappa)\geqslant\|v\|^2 \tag{2.10}$$

С помощью неравенства Коши — Буняковского имеем

$$(Av,\ v)\leqslant\|v\|\|q_3\| \tag{2.11}$$

Из (2.11), учитывая (2.9), (2.10), получаем

$$\|v\|_{1/2}^2\leqslant\frac{1}{\varkappa}\|v\|\,\|q_3\|\leqslant\frac{\sqrt{1-\varkappa}}{\varkappa}\|v\|_{1/2}\|q_3\| \tag{2.12}$$

или, положив $q_3=K^*(v^{(1)}-v^{(2)})$ и учитывая, что $v=R^*q_3$:

$$\|R^*K^*(v^{(1)}-v^{(2)})\|_{1/2}\leqslant\frac{\sqrt{1-\varkappa}}{\varkappa}\|K^*(v^{(1)}-v^{(2)})\| \tag{2.13}$$

Таким образом, для операторов A_h^* и B^* имеем

$$\|B^*(v^{(1)}-v^{(2)})\|_{1/2}\leqslant\frac{\sqrt{1-\varkappa}}{\varkappa}\|A_h^*(v^{(1)}-v^{(2)})\| \tag{2.14}$$

Оценим норму в правой части (2.14). По определению

$$\|A_h^*v\|\equiv\left[\iint\limits_{G_{K_1}}(A_hv)^2\,dy_1\,dy_2\right]^{1/2}\leqslant\max|A_hv|\sqrt{\pi} \tag{2.15}$$

$$|A_hv|=\frac{1}{(2\pi)^2}|J|,\quad J=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}A_h(\boldsymbol{\tau})v^{\vee}(\boldsymbol{\tau})\exp[-i(y_1\tau_1+y_2\tau_2)]\,d\tau_1\,d\tau_2 \tag{2.16}$$

Введем

$$A_h^\circ=h^2C/|\tau|,\quad C=(8\nu^2-12\nu+7)/(16(1-\nu)^2) \tag{2.17}$$

Тогда

$$|J|\leqslant|J_1|+|J_2| \tag{2.18}$$

$$J_1=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}(A_h-A_h^\circ)v^{\vee}\exp[-i(y_1\tau_1+y_2\tau_2)]\,d\tau_1\,d\tau_2$$

$$J_2=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}A_h^\circ v^{\vee}\exp[-i(y_1\tau_1+y_2\tau_2)]\,d\tau_1\,d\tau_2$$

$$|J_1|\leqslant I_1\iint\limits_{G_{K_1}}v\,dy_1\,dy_2\leqslant I_1\|v\|\sqrt{\pi}\leqslant I_1\sqrt{\pi}\sqrt{1-\varkappa}\|v\|_{1/2}$$

$$I_1=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}|A_h-A_h^\circ|\,d\tau_1\,d\tau_2 \tag{2.19}$$

Раскладывая разность $A_h-A_h^\circ$ в ряд по $|\tau|$, интегрируя почленно получившееся выражение и мажорируя его, получаем следующую оценку:

$$I_1\leqslant6{,}2\pi h^3,\quad J_1\leqslant C_1\|v\|_{1/2},\quad C_1=6{,}2\pi^{3/2}h^3\sqrt{1-\varkappa} \tag{2.20}$$

Из (2.18) следует

$$J_2=CI,\quad I=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{v^{\vee}(\tau)\exp[-i(y_1\tau_1+y_2\tau_2)]\,d\tau_1\,d\tau_2}{|\tau|} \tag{2.21}$$

Для оценки последнего интеграла введем функцию $\chi(\tau)$, такую, что $\chi(\tau)=1$ $(0\leqslant|\tau|\leqslant1)$, $\chi(\tau)$ — бесконечно дифференцируема $(1\leqslant|\tau|\leqslant2)$, $\chi(\tau)=0$ $(2\leqslant|\tau|)$.

В этом случае $I=I_2+I_3$:

$$I_2=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{v^{\vee}(\tau)(1-\chi(\tau))}{|\tau|}\exp[-i(y_1\tau_1+y_2\tau_2)]\,d\tau_1\,d\tau_2$$

$$I_3=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{v^{\vee}(\tau)\chi(\tau)}{|\tau|}\exp[-i(y_1\tau_1+y_2\tau_2)]\,d\tau_1\,d\tau_2 \tag{2.22}$$

Оценивая интегралы I_2, I_3, имеем

$$|I_2|=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}|v^{\vee}(\tau)|(1+|\tau|)^{1/2}\frac{1-\chi(\tau)}{|\tau|(1+|\tau|)^{1/2}}\,d\tau_1\,d\tau_2\leqslant C_2^1\|v\|_{1/2}$$

$$C_2^1=\left[\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\chi(\tau))^2}{|\tau|^2(1+|\tau|)}\right]^{1/2}\leqslant(2\pi\ln 2)^{1/2} \tag{2.23}$$

$$|I_3|\leqslant\max|v^{\vee}(\tau)|\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi(\tau)}{|\tau|}\,d\tau_1\,d\tau_2\leqslant C_3^1|v|_{1/2}$$

$$C_3^1=4\pi^{3/2}\sqrt{1-\varkappa}$$

Из (2.17), (2.20), (2.23) получаем

$$\|J\|\leqslant(C_1+C_2+C_3)\|v\|_{1/2}$$

$$C_2=\frac{8\nu^2-12\nu+7}{16(1-\nu)^2}(2\pi\ln 2)^{1/2}h^2 \tag{2.24}$$

$$C_3=\frac{8\nu^2-12\nu+7}{4(1-\nu)^2}\pi^{3/2}\sqrt{1-\varkappa}\,h^2$$

Из (2.15), (2.16), (2.24) следует

$$\|A_h{}^*v\|\leqslant\frac{1}{4}(C_1+C_2+C_3)\|v\|_{1/2}\pi^{-3/2} \tag{2.25}$$

а из (2.14), (2.25)

$$\|B^*(v^{(1)}-v^{(2)})\|_{1/2}\leqslant\theta\|v^{(1)}-v^{(2)}\|_{1/2},$$

$$\theta=\frac{\sqrt{1-\varkappa}}{4\varkappa\pi^{3/2}}(C_1+C_2+C_3) \tag{2.26}$$

Подставляя вместо $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ в (2.26) $\Delta u_3^{(1)}$, $\Delta u_3^{(2)}$, величину $\lambda_1(K_1)=2$ (см. [3]), получаем условие сходимости метода последовательных приближений $\theta=0{,}44h^2+0{,}77h^3<1$; откуда $h\leqslant0{,}9$ и $\lambda_s/d\geqslant7$. Таким образом, если длина волны λ_s больше семи характерных размеров трещины d, то метод последовательных приближений заведомо сходится. Как будет видно ниже, уже первый член разложения (1.7) хорошо приближает решение и при существенно меньшем отношении λ_s/d.

3. Оценим в первом приближении изменение коэффициента интенсивности напряжений под действием гармонически меняющихся усилий, приложенных к поверхностям трещины, что будет соответствовать значениям

коэффициента интенсивности напряжений при достаточно малых h или больших по сравнению с размером трещины длин волн.

1. Для этого вычислим первую поправку Δq_3 к амплитуде нагрузки и сведем тем самым задачу о стационарных колебаниях к статической задаче о трещине с несколько измененной нагрузкой. Из (1.15) следует, что в первом приближении

$$A\Delta u_3 = q_3 + \Delta q_3 \tag{3.1}$$

$$\Delta q_3 = -\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty} A_h \Delta u_3^\circ(\tau)\exp[-i(y_1\tau_1 + y_2\tau_2)]\,d\tau_1\,d\tau_2 \tag{3.2}$$

Введем Δq_3°, такое, что

$$\Delta q_3^\circ = A_h^\circ * \Delta u_3^\circ \tag{3.3}$$

Очевидно, что

$$\Delta q_3^\circ = -h^2 H_1 \iint_G \frac{\Delta u_3^\circ(\mathbf{x}')\,d^2x'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \qquad H_1 = C/(2\pi) \tag{3.4}$$

Представим (3.1) в виде

$$A\Delta u_3 = q_3 + \Delta q_3^\circ + \Delta(q_3 - q_3^\circ) \tag{3.5}$$

Ясно, что второе слагаемое в правой части (3.5) пропорционально квадрату h. Третье же слагаемое оказывается порядка $o(h^4)$. Это проверяется непосредственно путем его разложения в ряд по h. Таким образом, с точностью до члена второго порядка по h $\Delta q_3 = \Delta q_3'$ и выражается формулой (3.4).

2. Вычислим значение коэффициента интенсивности напряжений для трещины, занимающей плоскую область G_{K_1} в плоскости $y_3=0$, ограниченную эллипсом $y_1^2/a_1^2 + y_2^2/a_2^2 \leqslant 1$, где $a_\theta = a_\theta^*/d$, a_θ^* — полуоси эллипса. Если к верхней и нижней поверхностям такой трещины приложить противоположно направленные вдоль оси y_3 нагрузки величины $q=\text{const}$, то скачок смещений Δu_3° выражается формулой [4]:

$$\Delta u_3^\circ(y_1, y_2) = 2D\sqrt{1 - y_1^2/a_1^2 - y_2^2/a_2^2} \tag{3.6}$$

$$D = qa_2(1-\nu)/E(k), \quad k = (a_1^2 - a_2^2)/a_1^2, \quad a_1 > a_2 \tag{3.7}$$

где $E(k)$ — эллиптический интеграл II рода.

Подставляя (3.6) в (3.4), имеем

$$\Delta q_3 = -Hh^2 \iint_{G_{K_1}} \frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{y}'|}\sqrt{1 - \frac{y_1'^2}{a_1^2} - \frac{y_2'^2}{a_2^2}}\,dy_1'\,dy_2', \qquad H = DH_1 \tag{3.8}$$

Вычисляя интеграл в (3.8), получаем

$$\iint_{G_{K_1}} \sqrt{1 - \frac{y_1'^2}{a_1^2} - \frac{y_2'^2}{a_2^2}}\,[(y_1 - y_1')^2 + (y_2 - y_2')^2]^{-1/2}\,dy_1'\,dy_2' = A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + A_3 \tag{3.9}$$

$$A_1 = -\frac{\pi a_2}{k^2 a_1^2}[K(k) - E(k)], \quad A_2 = -\frac{\pi}{a_2 k^2}[K(k)k'^2 - E(k)]$$

$$A_3 = \pi a_2 K(k), \quad k'^2 = 1 - k^2$$

где $K(k)$ — эллиптический интеграл I рода.

На поверхности трещины выполняются условия

$$q_3 = -q^t, \quad q^t = A_{00} + A_{20}y_1^2 + A_{02}y_2^2$$
$$A_{00} = q + HA_3h^2, \quad A_{20} = HA_1h^2, \quad A_{02} = HA_2h^2 \tag{3.10}$$

Коэффициент интенсивности напряжений вычисляется по обычным формулам [5] для нагрузки (3.10) и выражается формулой

$$K_I = \frac{8}{a_1 a_2}\left(\frac{\pi}{a_1 a_2}\right)^{1/2} (a_1^2 \sin^2\theta + a_2 \cos^2\theta)^{1/4} \left(C_{00} - \frac{4C_{02}}{a_2^2}\sin^2\theta - \frac{4C_{02}}{a_1^2}\cos^2\theta\right) \tag{3.11}$$

а коэффициенты C_{00}, C_{20}, C_{02} вычисляются из системы уравнений

$$L_{11}C_{00}+L_{12}C_{20}+L_{13}C_{02}={}^1/_2A_{00}$$
$$L_{22}C_{20}+L_{23}C_{02}={}^1/_2A_{20}, \quad L_{32}C_{20}+L_{33}C_{02}={}^1/_2A_{02} \tag{3.12}$$

$$L_{11} = \frac{4E(k)}{a_1 a_2^2}, \quad L_{12} = \frac{8[k'^2K(k)-(1-2k^2)E(k)]}{a_1^3 a_2^2 k^2}$$
$$L_{13} = \frac{8[(1+k^2)E(k)-k'^2K(k)]}{a_1 a_2^4 k^2}$$
$$L_{22}=8\left[\left(3-8k^2+\frac{2}{k^2}\right)E(k)-2k'^2\left(2+\frac{1}{k^2}\right)K(k)\right]\Big/(a_1^5a_2^2k^2) \tag{3.13}$$
$$L_{23} = \frac{8[k'^2(2-k^2)K(k)-2(k'^2+k^4)E(k)]}{a_1^3a_2^4k^4}, \quad L_{32}=L_{23}$$
$$L_{33} = \frac{8[2(3k^2-1)K(k)+3k^2E(k)+(2-10k^2)E(k)/k'^2]}{a_1^3a_2^4k^4}$$

3. Для примера рассмотрим круговую трещину нормального отрыва. Выполняя предельный переход при $a_2, a_1 \to a$ в (3.13), имеем

$$L_{11}=2\pi/a^3, \quad L_{12}=6\pi/a^5, \quad L_{13}=L_{12}$$
$$L_{22}=-45\pi/(2a^7), \quad L_{23}=-15\pi/(2a^7), \quad L_{32}=L_{23}, \quad L_{33}=L_{22} \tag{3.14}$$

Пригрузка в этом случае выражается формулой

$$\Delta q_3=\varkappa_1 h^2 q(a-(y_1^2+y_2^2)/(2a))$$
$$\varkappa_1=(8\nu^2-12\nu+7)/(32(1-\nu)) \tag{3.15}$$

Величина пригрузки максимальна в центре трещины и минимальна на ее границе. Из (3.15) следует, что $\Delta q_{3\,\max}=\varkappa_1 h^2 aq$, $\Delta q_{3\,\min}=\varkappa_1 h^2 aq/2$, $\Delta q_{3\,\min}/\Delta q_{3\,\max}={}^1/_2$.

Подставляя 3.15 в (3.12) и вычисляя C_{00}, C_{20}, C_{02}, с помощью (3.11) получаем

$$K_I=K_I^\circ(1+\psi h^2) \tag{3.16}$$

где K_I° — статический коэффициент интенсивности напряжений для нагрузки величины q

$$K_I^\circ=2(a/\pi)^{1/2}q, \quad \psi=(8\nu^2-12\nu+7)/(24(1-\nu)) \tag{3.17}$$

Коэффициент при h^2 совпадает с аналогичным коэффициентом из [6].

Для $\nu=0{,}1$ $K_I/K_I^\circ=1+0{,}61x^2$, а для $\nu=0{,}25$ $K_I/K_I^\circ=1+0{,}75x^2$.

Сравнение отношения коэффициентов интенсивности с значениями, полученными путем численного решения этой задачи [7], показывает, что при $x=0{,}3$ результаты, полученные по (3.17), согласуются с численным решением с точностью до 4%, а при $x=0{,}75$ — с точностью до 10%. Максимальное же значение K_I, как это следует из численного решения, соответствует примерно $x=1$. Таким образом, асимптотические формулы (3.17) хорошо описывают восходящий участок куполообразной кривой зависимости K_I от h почти вплоть до его максимального значения.

Рассмотрим изменение K_I при стационарных нагрузках с малой частотой для эллиптических трещин с разными отношениями полуосей.

Для $k'=0{,}8$ при $\nu=0{,}5$ получаем $C_{00}=0{,}055qa_1^3+0{,}08a^5h^2q$, $C_{20}=3{,}4\cdot10^{-4}\ a_1^7h^2q$, $C_{02}=1{,}4\cdot10^{-4}\ a_1^7h^2q$, а для $k'=0{,}6$ при том же значении ν $C_{00}=0{,}035a_1^3q+2{,}8\cdot10^{-3}\ a_1^5h^2q$, $C_{20}=2\cdot10^{-4}\ a_1^7h^2q$, $C_{02}=2{,}5\cdot10^{-5}\ a_1^7h^2q$.

Для коэффициентов интенсивности имеем в первом и во втором случаях соответственно

$$K_I=7{,}89a_1^{1/2}(\sin^2\theta+\cos^2\theta\cdot0{,}64)\left(0{,}055+0{,}27\frac{a_1^2}{\lambda_s^2}-0{,}02\frac{a_1^2}{\lambda_s^2}\cos^2\theta\right) \tag{3.18}$$

$$K_I=12{,}2a_1^{1/2}(\sin^2\theta+\cos^2\theta\cdot 0{,}36)\left(0{,}035+0{,}1\frac{a_1^2}{\lambda_s^2}-0{,}02\frac{a_1^2}{\lambda_s^2}\cos^2\theta\right)$$

Рассмотрим изменение K_I для волн длиной $\lambda_s=20a_1$. В этом случае поправка коэффициенту интенсивности за счет колебаний мала, и формулы (3.19) можно считать точными. Увеличение K_I для $k'=0{,}8$ и $k'=0{,}6$ равно соответственно 1,2% и 0,7% (для круговой трещины радиуса a это увеличение при $\nu=0{,}5$ равно 2,2%).

Таким образом, можно отметить, что для более вытянутых трещин относительное увеличение K_I меньше. Ниже приведены значения частот ω_i, соответствующие длине волны $\lambda_s=20a_1$, плотности $\rho=1{,}8$ г/см^3 и коэффициенту Пуассона ν, равному 0,5 для трех размеров трещин (первая строка соответствует $E=100$ кГ/см^3, а вторая $E=1000$ кГ/см^3):

a [см]	0,5	1,0	5,0
ω_i [Гц]	430	215	43
	1360	680	135

Если частота колебаний меньше указанной в выводе, то увеличение K_I не превзойдет 2,2; 1,2; 0,7% для трещин с $k'=1$; 0,8; 0,6 соответственно. Для волны $\lambda_s=10a_1$ относительное увеличение превысит указанные значения в 4 раза и будет составлять соответственно 8,8; 4,8; 3,2% для тех же значений k'.

Следует отметить, что асимптотическая зависимость K_I от частоты (параметра h) — квадратичная зависимость — лежит выше истинной зависимости и служит тем самым оценкой сверху ее истинного значения. Поэтому указанные выше увеличения K_I достигаются при более высоких частотах, чем это указано в выводе. Однако в том же диапазоне частот поправка к статическому значению K_I может оказаться больше вследствие влияния границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Budiansky B., Rice J. R.* An integral eguation for dynamic elastic respons of an isolated 3-d crack.— Wave motion, 1979, v. 1, No. 3, p. 187—192.
2. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука. 1973. 232 с.
3. *Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И.* Изопериметрические неравенства и оценки некоторых интегральных характеристик решения пространственной задачи теории упругости для тела с плоскими трещинами нормального разрыва.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 68—79.
4. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения.— В кн.: Разрушение. Т. 2. М.: Мир, 1973, с. 83—203.
5. *Shah R. C., Kobayashi A. S.* Stress intensity factor for an elliptical crack under arbitrary normal loading.— End. Fract. Mech., 1971, v. 3, No. 1, p. 71—96.
6. *Mal A. K.* Dynamic stress intensity factor for an axisymmetric loading of the penny shaped crack.— Internat. J. Engng. Sci., 1968, v. 6, No. 11, p. 623—630.
7. *Sih G. C., Loeber J. F.* Normal compression and radial shear waves scattering at a penny shaped crack in an elastic solid.— J. Acoust. Soc. Amer., 1969, v. 46, No. 3, p. 711—721.

Москва

Поступила в редакцию 25.XI.1983