

УДК 539.3

О ДИФРАКЦИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КВАЗИПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ  
НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ  
ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ,  
РАСПОЛОЖЕННОЙ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

КАПУСТЯНСКИЙ С. М., ЧУМИКОВ Н. И., ШХИНЕК К. Н.

Дифракция упругих волн на цилиндрической полости кругового поперечного сечения, расположенной в изотропной упругой среде, исследовалась в [1]. Статические и квазистатические задачи о деформировании полостей, расположенных в анизотропной среде, изложены в [2-4].

В публикуемой работе исследуется дифракция нестационарной упругой волны на цилиндрической полости произвольного поперечного сечения, свободной от напряжений и расположенной в слоистой среде, приводящейся в частном случае к анизотропной среде. Решение определяющей системы уравнений строится на основе метода конечных разностей. Апробирование разностной схемы производится на ряде модельных задач. Исследуется влияние параметров задачи, характеризующих анизотропные свойства среды, а также дифракционного числа на напряженное состояние и скорости частиц в окрестности полости кругового очертания.

1. В полупространстве, состоящем из параллельных слоев, разделенных тонкими прослойками, расположена цилиндрическая полость произвольного сечения с образующей, параллельной плоскостям раздела слоев. В каждом сечении, перпендикулярном образующей цилиндра, реализуется плоскодеформированное состояние. К поверхности полупространства приложено равномерно распределенное нормальное давление, нарастающее за время  $t_n$  до максимума и далее не изменяющееся или убывающее во времени. Эта нагрузка порождает в слоистом полупространстве ряд волн, из которых максимальной интенсивностью обладает квазипродольная.

Задача состоит в определении поля напряжений и скоростей, возникающего вблизи контура полости при падении на него квазипродольной волны. Предполагается существование определенного соотношения между интенсивностью падающей волны и прочностными характеристиками среды, обеспечивающего отсутствие необратимого сдвига либо расслоения среды в процессе взаимодействия волны с полостью.

Рассмотрим принятую модель среды<sup>1</sup>. Вследствие малой толщины прослоек их влияние на осредненные свойства среды при сжатии — растяжении по нормали или параллельно границам слоев невелико и в дальнейшем не учитывается. При сдвиге соседних слоев касательные напряжения  $\tau$  на контакте определяются зависимостью

$$\tau = k \Delta u / (2h) \quad (1.1)$$

где  $\Delta u$  — относительное смещение слоев вдоль границы раздела,  $2h$  — толщина слоя,  $k$  — коэффициент, учитывающий сдвиговые свойства прослойки (если  $k \rightarrow \infty$ , то имеет место жесткое сцепление слоев, при котором осуществляется переход к изотропной среде, если  $k \rightarrow 0$ , то слои свободно проскальзывают относительно друг друга).

<sup>1</sup> Подробный анализ основных гипотез, заложенных в обсуждаемую модель, произведен в работе *Зволинского Н. В., Шхинека К. Н.* «Континуальная модель слоистой упругой среды». — Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1980, № 165. 56 с.

При принятых предположениях уравнения движения и состояния можно записать в виде

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}, \quad \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{I}{2h} \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} + \tau_{xz} - \tau_{zx} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = \rho a^2 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\rho a^2 = \lambda + 2\mu) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = \rho a^2 \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial t} = \mu_1 \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \mu_1 \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} - \Omega_1 \right) \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{D_1}{2h} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} \quad \left( \Omega_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial t}, \quad \rho a^2 = \lambda + 2\mu \right) \quad (1.6)$$

$$I = \frac{2}{3} h^3 \kappa, \quad D_1 = \frac{8}{3} (\lambda + \mu) \frac{\mu h^3 \kappa}{\rho a^2}$$

$$\mu_1 = \frac{k\mu}{k+\mu}, \quad \kappa = \frac{1}{1+2k/\mu}$$

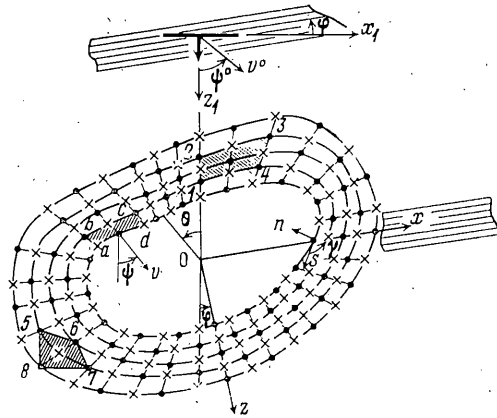
Здесь  $x, z$  — декартовы координаты (плоскость  $xoy$  параллельна границам слоев),  $t$  — время,  $\rho$  — плотность,  $v_x, v_z$  — проекции вектора скорости частиц  $\mathbf{v}$  на оси  $x$  и  $z$ ,  $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{zx}$  — компоненты тензора напряжений,  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламе,  $M$  — изгибающий момент, действующий на слой,  $\Omega$  — поворот элемента слоя.

Среда, свойства которой описываются приведенными выше уравнениями, может быть охарактеризована как анизотропная, моментная. Однако в некоторых важных случаях модель среды существенно упрощается.

Рассмотрим частный случай. Легко убедиться, что система (1.2) — (1.6) допускает решение вида  $u_j = A_j \exp [i\omega(\alpha x + \beta z - ct)]$ , где  $u_j$  — любая из неизвестных функций, входящих в (1.2) — (1.6),  $A_j, \alpha, \beta$  — постоянные коэффициенты,  $\omega$  — волновое число,  $c$  — фазовая скорость. Если подставить в исходную систему решение в таком виде, то левая часть уравнения (1.3) и правая часть уравнения (1.6) будут содержать множитель  $\omega^2 h^2$ . В случае, когда длина распространяющихся волн много больше толщины слоя, слагаемые уравнений, содержащие повороты и моменты, становятся пренебрежимо малыми. Из первоначальной системы остаются уравнения (1.2), (1.4), описывающие среду как трансверсально-изотропную, которая является первым приближением слоистой при разложении искомых величин по малому параметру  $\omega h$ .

Отметим, что множитель  $\omega^2 h^2$  в уравнениях (1.3), (1.6) стоит при производных. Поэтому разложение по  $\omega h$  приводит к понижению порядка системы и она оказывается переопределенной. Это означает, что влияние одного из граничных условий (в данном случае условия, касающегося момента) проявляется в тонкой области, примыкающей к границе. Далее рассматривается первое приближение разложения по  $\omega h$ , а существование пограничного слоя не учитывается.

В среде, описываемой уравнениями (1.2), (1.4), могут распространяться волны двух типов: квазипродольные со смещением, в основном, нор-



Фиг. 1

мальным фазовой плоскости (фронту) и квазипоперечные со смещением, в основном, параллельным ей.

Допустим, что условия на свободной поверхности имеют вид

$$\sigma_{z_1} = P_m f, \quad \tau_{z_1 x_1} = 0 \quad (1.7)$$

$$f=0 \quad (t \leq 0), \quad f=f(t) \quad (t > 0), \quad \max f(t) = 1$$

где  $P_m$  — максимальное напряжение; ось  $z_1$  направлена по нормали к фронтам волн.

Предполагается, что минимальное характерное время для функции  $f(t)$  много больше величины  $h/a$ .

Будем искать компоненты скорости частиц вдоль и поперек слоя в виде (фиг. 1):

$$\begin{vmatrix} v_x \\ v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_i \\ B_i \end{vmatrix} f(\xi) \quad (i=1,2) \quad (1.8)$$

$$\xi = (\alpha x + \beta z) / c_i - t, \quad \alpha = \sin \varphi, \quad \beta = \cos \varphi$$

где  $\varphi$  — угол между поверхностями раздела слоев и фронтом волны. Подставляя  $v_x$ ,  $v_z$  в уравнения (1.2), (1.4) и используя (1.7), можно определить скорости распространения квазипродольных и квазипоперечных волн  $c_i$  и их амплитуды  $A_i$ ,  $B_i$ . В частности, для квазипродольной волны имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= R B_1, & R &= R_1 / (\beta^2 + \alpha^2 s_1 - c_2^2) \\ s_0 &= \mu / (\rho a^2), & s_1 &= \mu_1 / (\rho a^2), & s_2 &= \lambda / (\rho a^2) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$R_1 = \alpha \beta (s_1 + s_2), \quad c_2^2 = c_1^2 / a^2, \quad c_2^2 = 1/2 [1 + s_1 + \sqrt{(1 - s_1)^2 (1 - 4\alpha^2 \beta^2) + 4R_1^2}]$$

$$B_1 = P_m c_2 / \{ \rho a [s_1 (\alpha - R \beta) + 2s_0 (\alpha^3 - R \beta^3) + 2\alpha \beta s_1 (\beta - R \alpha)] \}$$

Напряжения в квазипродольной волне определяются формулами

$$\sigma_z = -(s_2 A_1 \beta - B_1 \alpha) \frac{f(\xi)}{c}, \quad \sigma_x = -(A_1 \beta - B_1 \alpha s_2) \frac{f(\xi)}{c_1}, \quad \tau_{zx} = s_2 (A_1 \alpha - B_1 \beta) \frac{f(\xi)}{c_1} \quad (1.10)$$

Из формул (1.8), (1.9) следует, что вектор скорости в квазипродольной волне вообще не совпадает с направлением нормали к фронту. Величина острого угла  $\psi^\circ$  между осью  $z_1$  и вектором  $v^\circ$  (см. фиг. 1) зависит от

значений  $\varphi$  и  $\mu_1$ . При  $\varphi=0, 45^\circ$  и  $90^\circ$  и любых значениях  $\mu_1$   $\psi^\circ=0$ . При промежуточных значениях  $\varphi$  величина угла  $\psi^\circ$  уменьшается с ростом  $\mu_1$  ( $\psi^\circ \rightarrow 0$  при  $\mu_1 \rightarrow \mu$ ). Максимальные по модулю значения  $\psi^\circ = \psi_m^\circ$  достигаются при  $\mu_1=0$  для  $\varphi=22,5^\circ$  и  $67,5^\circ$ . При  $\varphi=22,5^\circ$  вектор  $\mathbf{v}^\circ$  направлен практически по нормали к слоям ( $\psi_m^\circ \approx 22,5^\circ$ ), при  $\varphi=67,5^\circ$  вектор  $\mathbf{v}^\circ$  практически параллелен слоям ( $\psi_m^\circ \approx -22,5^\circ$ ).

2. Для дальнейшего анализа система (1.2), (1.4) записывается в безразмерном виде. При этом временные характеристики отнесены к времени нарастания в падающей волне  $t_n$ , величины, имеющие размер длины, — к  $\lambda_n = at_n$ , компоненты тензора напряжений — к  $P_m$ , а скорости частиц — к  $v_m^* = P_m / (\rho a)$  ( $v_m^*$  — амплитуда скорости частиц в волне, распространяющейся в изотропной среде).

Решение исходной системы строится на основе метода конечных разностей [5]. В области решения вводятся две сетки (см. фиг. 1). В узлах одной сетки вычисляются скорости частиц (обозначены точками), в узлах другой — напряжения (обозначены крестами). Предполагается, что скорости относятся к моменту времени  $(n-1/2)\Delta t$  ( $n$  — целое число,  $\Delta t$  — шаг по времени), а напряжения — к моменту времени  $n\Delta t$ . Уравнения (1.2) центрируются в точках скоростей в момент времени  $(n-1)\Delta t$ , уравнения (1.4) — в точках напряжений в момент  $(n-1/2)\Delta t$ .

Для вычисления производных скоростей и напряжений по координатам во внутренних точках области выделяются элементы, соответственно, типов 5678 и 1234 (см. фиг. 1). Для вычисления производных от напряжений по координатам в приконтурных точках выделяются элементы типа  $abcd$ . Воспользовавшись интегральными определениями частных производных, выразим последние через напряжения или скорости на границах элементов.

Для вычисления окружных напряжений  $\sigma_s$ , действующих на площадке, нормальные контуру полости, последний аппроксимируется ломаной линией; уравнения (1.4) записываются в локальной декартовой системе координат (оси  $s$  и  $n$  направлены вдоль отрезка ломаной линии и по нормали к нему (см. фиг. 1)) и используются граничные условия на контуре  $\sigma_n = \tau_{ns} = 0$ .

Переходя к безразмерным величинам, получим дифференциальное уравнение относительно напряжения  $\sigma_s$  ( $\gamma$  — угол между осями координат  $s$  и  $x$ ):

$$\partial \sigma_s / \partial t = (1 - s_z^2) (\partial v_s / \partial s) / P \quad (2.1)$$

$$P = [6 + m + (2 - m) \cos 4\gamma] / 8, \quad m = 2[2s_0(1 - s_0) / s_1 - s_2]$$

Уравнение (2.1) аппроксимируется при помощи конечно-разностной схемы второго порядка точности. На внешних границах расчетной области ставятся условия, соответствующие параметрам падающей волны в каждый момент времени.

Начальное условие состоит в том, что при  $t=0$  (время отсчитывается от момента прихода волны к полости) решение должно совпадать с напряжениями (1.10) и скоростями (1.8), (1.9), задаваемыми квазипродольной волной.

С целью увеличения области решения, начиная с расстояния от контура, равного половине характерного размера сечения полости, производится непрерывное расширение сетки.

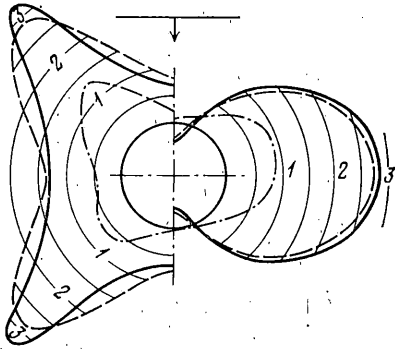
Исследование устойчивости схемы, проведенное для прямоугольной области, показало необходимость выполнения условия  $\Delta t \leq h_x h_z / (h_x^2 + h_z^2)^{1/2}$ , где  $h_x$  и  $h_z$  — безразмерные шаги в направлении осей координат  $x$  и  $z$ . В случае неравномерной сетки максимально допустимый шаг по времени определяется размерами наименьшей ячейки.

Если параметры в падающей волне резко нарастают во времени, то в уравнения движения вводятся члены, учитывающие искусственную вяз-

кость, линейные по отношению к разности скоростей на границах ячейки.

Все расчеты производились на сетке, содержащей 90 точек на контуре полости и 40 точек в направлении луча, исходящего из начала координат  $O$  (см. фиг. 1).

3. Апробирование разностной схемы проводилось на ряде модельных задач. Одна из таких задач — исследование дифракции волн на цилиндрической полости кругового очертания, расположенной в изотропной упругой среде. Сравнение результатов расчетов, полученных предложенным методом, с результатами расчетов, приведенных в [1, 6, 7], показало, что отклонение максимальных значений скоростей и напряжений, рассчитанных по разным методам, не превышало пяти процентов. Исключение составляет область малых значений  $t$ , где метод, использованный в [6, 7], приводит к ошибкам, которые особенно значительны при вычислении радиальных составляющих скорости боковой и тыльной точек контура.



Фиг. 2

фиг. 2) и слоистой ( $\varphi=45^\circ$ ,  $k_1=k/(\rho a^2)=0,1$ ) средах. Дифракционное число  $D=\lambda_n/d=2,5$ . Фронт волны нормален вертикальной оси симметрии полости.

Концентрические дуги на фиг. 2 характеризуют уровень достигнутых напряжений. Сплошными линиями представлены результаты численного расчета, соответствующие установившемуся по напряжению процессу. Он наступает с момента времени, соответствующего проходу волной расстояния, равного  $6d$ . Штриховые кривые представляют распределение окружных напряжений, соответствующее точному решению статической задачи [2] для упругого пространства с цилиндрической полостью, свободной от напряжений и с условиями на бесконечности, определяемыми выражением (1.10) при  $f(\xi)=1$ . Как видно из фиг. 2, численное решение обеспечивает достаточную точность. Вместе с тем можно наблюдать различие распределений напряжений по контуру в изотропной и слоистых средах. Отметим, что при  $\varphi=0$  и  $90^\circ$ , а также при больших значениях  $k_1$  и всех значениях  $\varphi$  максимальные напряжения  $\sigma_s^m$  в установившемся режиме достигаются в точках контура  $\theta=90^\circ$  и  $-90^\circ$ . При  $\varphi=22,5^\circ$ ;  $67,5^\circ$  и малых  $k_1$  значение  $\sigma_s=\sigma_s^m$  достигается вблизи точек пересечения с контуром диаметров, параллельных направлениям слоев и нормальных слоям.

Представление об изменении напряжений в динамике может дать сопоставление сплошных и штрихпунктирных линий. Последние соответствуют моментам времени, когда волна прошла расстояние, равное  $1,6d$ .

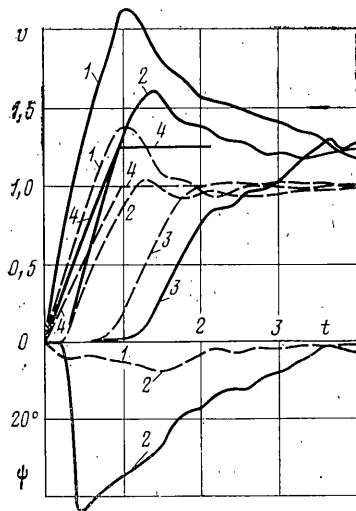
Отметим, что влияние динамичности процесса на величину максимального окружного напряжения невелико (максимальные напряжения в динамике не более чем на 10% превышают свои статические значения).

Фиг. 3—5 иллюстрирует характер движения точек контура в процессе взаимодействия последнего с квазипродольной волной (форма волны та же, что и ранее). В ходе расчетов варьировались значения параметров  $k_1$ ,  $\varphi$  и  $D$ .

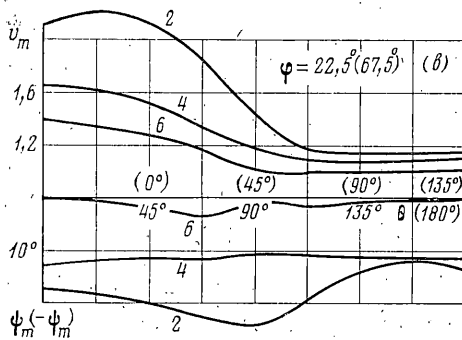
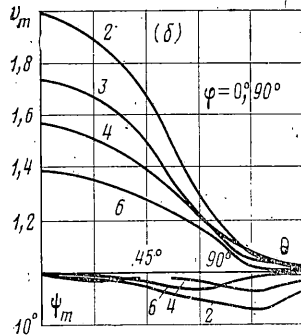
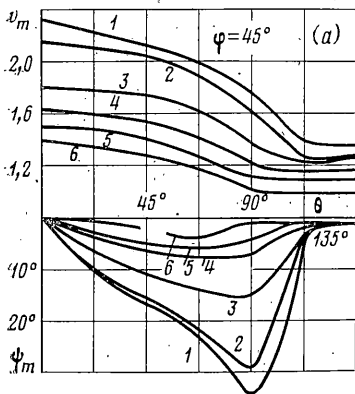
На фиг. 3 ( $\varphi=45^\circ$ ,  $k_1=0,025$ ,  $D=2,5$ ) сплошными линиями представлены зависимости от времени  $t$  модуля вектора скорости частиц в лобовой ( $\theta=0$ , кривая 1), боковой ( $\theta=90^\circ$ , кривая 2), тыльной ( $\theta=180^\circ$ , кривая 3) точках контура и в падающей волне (кривая 4), а также величины угла  $\psi$  (см. фиг. 1) между осью  $z_1$  и вектором скорости частиц в боковой точке (при  $\theta=0, 180^\circ$ , и в падающей волне  $\psi=0$ ). Для сравнения штриховыми линиями представлены аналогичные зависимости, соответствующие изотропной среде. Видно, что учет анизотропии приводит к увеличению скоростей точек контура и угла разворота вектора скорости  $v$  относительно вектора  $v^0$ , а также к более позднему началу движения тыльной точки полости. Время установления решения в анизотропной среде ( $t \approx 4$ ) больше, чем в изотропной ( $t \approx 2$ ).

На фиг. 4 для случая слоистой среды ( $D=2,5$ ) представлены в зависимости от угла  $\theta$  амплитуды скоростей точек контура  $v_m$  и угол  $\psi_m$  между осью  $z_1$  и вектором  $v_m$  (значения в скобках на фиг. 4, в соответствующих  $\varphi=67,5^\circ$ ). Кривые 1—6 построены для следующих значений параметра  $k_1$ : 0,0125; 0,025; 0,1; 0,25; 0,5;  $\infty$ .

Из расчетов и сопоставления фиг. 4 следует, что местоположение точки контура ( $\theta=\theta_m$ ), которой соответствует наибольшая амплитуда  $v_m$ , зависит от величин  $\varphi$



Фиг. 3

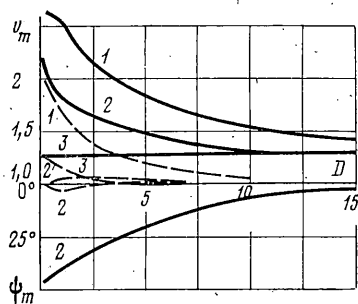


Фиг. 4

и  $k_1$ . Угол  $\theta_m$  можно найти из условия, что в этой точке вектор  $v_m$  практически параллелен вектору  $v^\circ$  и нормален контуру полости ( $22,5^\circ > \theta_m > -22,5^\circ$ ). Отметим, что максимальный разворот вектора  $v_m$  относительно вектора  $v^\circ$  имеет место в изотропной среде при  $\theta \approx 67,5^\circ$ , а в анизотропной среде (для  $k_1 < 0,2$ ) при  $\theta \approx 90^\circ$ .

При  $\varphi = 0, 45^\circ$  и  $90^\circ$  распределение скоростей по контуру симметрично относительно оси  $z_1$ . При  $\varphi = 22,5^\circ$  и  $67,5^\circ$  эпюры скоростей практически симметричны относительно диаметров, соответственно нормальных и параллельных слоям.

Из фиг. 4 видно, что с уменьшением параметра  $k_1$  увеличиваются значения  $v_m$  и  $\psi_m$ . Особенно сильно зависит от  $k_1$  угол  $\psi_m$  при  $\varphi = 45^\circ$ . Из расчетов следует, также, что амплитуды скоростей точек контура, находящихся в интервале углов  $135^\circ \leq \theta \leq 225^\circ$ , не превосходят значений  $v_m^\circ$ .



Фиг. 5

На фиг. 5 представлены зависимости величин  $v_m$  и  $\psi_m$  от дифракционного числа  $D$ . Сплошные и штриховые кривые соответствуют расчетам для анизотропной ( $\varphi=45^\circ$ ,  $k_1=0,025$ ) и изотропной сред. Кривые 1, 2 и 3 относятся к лобовой, боковой и тыльной точкам контура. При уменьшении параметра  $D$  возрастают скорости в лобовой  $v_m^l$  и боковой точках. Амплитуда скорости в тыльной точке полости для всех  $D$  практически равна скорости  $v_m^\circ$ . Для предельного случая ( $D=0$ ) можно получить точные значения  $v_m^l$  путем решения задачи об отражении волны, распространяющейся в анизотропной среде, от прямолинейной свободной границы. Тогда в частных случаях ( $\varphi=0, 45^\circ$  и  $90^\circ$ ) получим  $v_m^l=2v_m^\circ$ . Как видно из фиг. 5, численные и точные значения  $v_m^l$  при  $D \rightarrow 0$  мало отличаются друг от друга.

Отметим, что существует такое значение  $D=D_*$ , что при  $D \geq D_*$  амплитуды скоростей точек контура практически равны величине  $v_m^\circ$ . Число  $D_*$  максимально для лобовой точки и  $D_* \approx 0$  для тыльной. Оно зависит от величин углов  $\theta$ ,  $\varphi$  и параметра  $k_1$ .

Учет анизотропии приводит для всех значений  $D$  к увеличению скоростей точек контура, углов  $\psi$  и числа  $D_*$ .

Авторы благодарят Н. В. Зволинского за постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ковшов А. Н. О дифракции нестационарной упругой волны на цилиндрической полости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4, с. 115—124.
2. Лехницкий С. Г. Распространение напряжений вблизи горизонтальной выработки эллиптического сечения в трансверсально-изотропном массиве с наклонными плоскостями изотропии.— Инж. ж. МТТ, 1966, № 2, с. 54—62.
3. Ержанов Ж. С., Айталиев Ш. М., Масанов Ж. К. Устойчивость горизонтальных выработок в наклонно-слоистом массиве. Алма-Ата: Наука, 1971. 160 с.
4. Ержанов Ж. С., Айталиев Ш. М., Масанов Ж. К. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве. Алма-Ата: Наука, 1980. 211 с.
5. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений.— В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967, с. 212—263.
6. Baron M. L., Matthews A. T. Diffraction of a pressure wave by a cylindrical cavity in an elastic medium.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1961, v. 28, No. 3, p. 347—352.— Рус. перев.: Механика: Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1961, т. 28, № 3, с. 31—38.
7. Baron M. L., Parnes R. Displacements and velocities produced by the diffraction of pressure wave by a cylindrical cavity in an elastic medium.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1962, v. 29, No. 2, p. 385—395.— Рус. перев.: Механика: Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1962, т. 29, № 2, с. 183—193.

Ленинград

Поступила в редакцию  
17.VIII.1982