

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО
ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО УПРУГОГО СЛОЯ

АЛЕКСАНДРОВ В. М., ПОРОШИН В. С.

Рассматривается несжимаемая упругая среда, когда взаимно однозначная связь между деформациями и напряжениями имеет нелинейный характер. Исследуется контактная задача для преднапряженного физически нелинейного упругого слоя. Результаты могут быть использованы для оценки напряженно-деформированного состояния в окрестности «целиков» горных выработок.

1. Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$, начало которой расположим на дне слоя конечной толщины h . Допустим, что слой, лежащий без трения на жестком основании, нагружен равномерно распределенными на бесконечности сжимающими (растягивающими) усилиями $\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = -p$. Затем в слой силой P вдавливается жесткий штамп. Будем считать, что действие штампа вызывает в слое малое возмущение основного напряженно-деформированного состояния, определяемого соотношениями

$$\begin{aligned} u^0 &= Cx, & v^0 &= Cy, & w^0 &= -2Cz \\ \sigma_x^0 &= \sigma_y^0 = -p, & \sigma_z^0 &= \tau_{xz}^0 = \tau_{yz}^0 = \tau_{xy}^0 = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Связь между постоянными C и p может быть найдена из уравнений нелинейно-упругого тела [1], которые представим в форме (массовые силы отсутствуют):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \psi(\sigma_x - \sigma), & \varepsilon_y &= \psi(\sigma_y - \sigma), & \varepsilon_z &= \psi(\sigma_z - \sigma) \\ \gamma_{xy} &= 2\psi\tau_{xy}, & \gamma_{xz} &= 2\psi\tau_{xz}, & \gamma_{yz} &= 2\psi\tau_{yz}, & \varepsilon &= 0 \\ \varepsilon &= 1/3(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), & \sigma &= 1/3(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), & \psi &= \psi(\tau) \\ \tau &= \frac{1}{\sqrt{6}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)]^{1/2} \\ & \partial\sigma_x / \partial x + \partial\tau_{xy} / \partial y + \partial\tau_{xz} / \partial z, \dots \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Отметим, что предположение о несжимаемости упругой среды не принципиально и принято в целях упрощения вычислений.

Обозначая малые возмущения напряжений, деформаций и перемещений через σ_x^* , ..., ε_x^* , ..., u^* , v^* , w^* и разыскивая решение уравнений (1.2) в форме

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0 + \sigma_x^*, \dots, & \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + \varepsilon_x^*, \dots \\ u &= u^0 + u^*, & v &= v^0 + v^*, & w &= w^0 + w^* \end{aligned} \quad (1.3)$$

в результате линеаризации указанных уравнений относительно возмуще-

ний, имеем [2]:

$$\begin{aligned}\sigma_x^* &= \frac{6l+5m}{6l(l+m)} \varepsilon_x^* - \frac{m}{6l(l+m)} \varepsilon_y^* + \frac{m}{3l(l+m)} \varepsilon_z^* + \sigma^* \\ \sigma_y^* &= -\frac{m}{6l(l+m)} \sigma_x^* + \frac{6l+5m}{6l(l+m)} \sigma_y^* + \frac{m}{3l(l+m)} \sigma_z^* + \sigma^* \\ \sigma_z^* &= \varepsilon_z^* / (l+m) + \sigma, \quad \varepsilon^* = 0 \\ \tau_{xy}^* &= \gamma_{xy}^* / 2l, \quad \tau_{xz}^* = \gamma_{xz}^* / 2l, \quad \tau_{yz}^* = \gamma_{yz}^* / 2l \\ (l = \psi(\tau_0) > 0, \quad m = \tau_0 \psi'(\tau_0) \geq 0, \quad \tau_0 = |p| / \sqrt{3})\end{aligned}\quad (1.4)$$

Сюда еще нужно добавить уравнения равновесия и формулы связи между деформациями и перемещениями Копши, записанные со звездочками.

Подставляя (1.4) в уравнения равновесия и выражая деформации через перемещения, получим аналог уравнений Ламе

$$\begin{aligned}\kappa_1 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \kappa_2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} \right) + \kappa_3 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x \partial y} + \kappa_4 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \sigma^*}{\partial x} &= 0 \\ \kappa_1 \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} + \kappa_2 \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^2} \right) + \kappa_3 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial y} + \kappa_4 \frac{\partial^2 w^*}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \sigma^*}{\partial y} &= 0 \\ \kappa_5 \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} + \kappa_2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y \partial z} \right) + \frac{\partial \sigma^*}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (1.5)$$

$$\kappa_1 = \frac{6l+5m}{6l(l+m)}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{2l}, \quad \kappa_3 = \frac{3l+2m}{6l(l+m)}, \quad \kappa_4 = \frac{3l+5m}{6l(l+m)}, \quad \kappa_5 = \frac{1}{l+m}$$

Добавляя к (1.5) условие несжимаемости

$$\partial u^* / \partial x + \partial v^* / \partial y + \partial w^* / \partial z = 0 \quad (1.6)$$

будем иметь систему четырех уравнений для определения u^* , v^* , w^* и σ^* .

Решение системы уравнений (1.5), (1.6) для слоя находим в форме двойных интегралов Фурье [3]:

$$\begin{aligned}u^* &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\alpha, \beta; z) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ v^* &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} V(\alpha, \beta; z) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ w^* &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} W(\alpha, \beta; z) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ \sigma^* &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \Sigma(\alpha, \beta; z) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta\end{aligned}\quad (1.7)$$

при этом относительно трансформант Фурье $U(\alpha, \beta; z)$, $V(\alpha, \beta; z)$, $W(\alpha, \beta; z)$ и $\Sigma(\alpha, \beta; z)$ получим систему обыкновенных дифференциаль-

ных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}(\kappa_1 \alpha^2 + \kappa_2 \beta^2) U - \kappa_2 U_{zz}'' + \kappa_3 \alpha \beta V + i \kappa_4 \alpha W_z' + i \alpha \Sigma &= 0 \\ \kappa_3 \alpha \beta U + (\kappa_2 \alpha^2 + \kappa_1 \beta^2) V - \kappa_2 V_{zz}'' + i \kappa_4 \beta W_z' + i \beta \Sigma &= 0 \\ i \kappa_2 \alpha U_z' + i \kappa_2 \beta V_z' + \kappa_2 \gamma^2 W - \kappa_5 W_{zz}'' - \Sigma_z' &= 0 \\ i \alpha U + i \beta V - W_z' &= 0 \quad (\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})\end{aligned}\quad (1.8)$$

Исследование уравнений (1.8) показывает, что система уравнений (1.5), (1.6) является системой эллиптического типа, а общее решение уравнений (1.8) имеет вид

$$\begin{aligned}U &= A_1 \operatorname{sh} \gamma z + A_2 \operatorname{ch} \gamma z + A_3 \operatorname{sh} a \gamma z + A_4 \operatorname{ch} a \gamma z + A_5 \operatorname{sh} \bar{a} \gamma z + A_6 \operatorname{ch} \bar{a} \gamma z \\ V &= -(A_1 \operatorname{sh} \gamma z + A_2 \operatorname{ch} \gamma z) \frac{\alpha}{\beta} - \frac{(a^4 + K a^2 + 1) \alpha / \beta + a^2 (a^2 - 1) \beta / \alpha}{N a^2 + 1} \times \\ &\times (A_3 \operatorname{sh} \alpha \gamma z + A_4 \operatorname{ch} a \gamma z) - \frac{(\bar{a}^4 + K \bar{a}^2 + 1) \alpha / \beta + \bar{a}^2 (\bar{a}^2 - 1) \beta / \alpha}{N \bar{a}^2 + 1} (A_5 \operatorname{sh} \bar{a} \gamma z + A_6 \operatorname{ch} \bar{a} \gamma z), \\ W &= -i \frac{\gamma}{\alpha} \left[a \frac{a^2 - 1}{N a^2 + 1} (A_3 \operatorname{ch} a \gamma z + A_4 \operatorname{sh} a \gamma z) + \bar{a} \frac{\bar{a}^2 - 1}{N \bar{a}^2 + 1} (A_5 \operatorname{ch} \bar{a} \gamma z + A_6 \operatorname{sh} \bar{a} \gamma z) \right] \\ \Sigma &= \frac{i}{2l} \frac{\gamma^2}{\alpha} \left[\frac{(M a^2 - 1) (a^2 - 1)}{N a^2 + 1} (A_3 \operatorname{sh} a \gamma z + A_4 \operatorname{ch} a \gamma z) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(M \bar{a}^2 - 1) (\bar{a}^2 - 1)}{N \bar{a}^2 + 1} (A_5 \operatorname{sh} \bar{a} \gamma z + A_6 \operatorname{ch} \bar{a} \gamma z) \right] \\ a &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{4l+m}{l+m}} + i \sqrt{\frac{3m}{l+m}} \right), \quad K = \frac{-2l+m}{l+m}, \quad N = \frac{-l+2m}{l+m} \\ M &= (l-m)/(l+m), \quad A_j = A_j(\alpha, \beta), \quad (j=1, 2, \dots, 6)\end{aligned}\quad (1.9)$$

2. Далее с помощью формул (1.9) получим решение следующей вспомогательной задачи о равновесии слоя:

$$\begin{aligned}w^*(x, y, 0) &= 0, \quad \tau_{xz}^*(x, y, 0) = 0, \quad \tau_{yz}^*(x, y, 0) = 0 \\ \tau_{xz}^*(x, y, h) &= 0, \quad \tau_{yz}^*(x, y, h) = 0, \quad \sigma_z^*(x, y, h) = -q(x, y)\end{aligned}\quad (2.1)$$

Здесь также возмущения напряжений σ_x^*, \dots и $q(x, y)$ стремятся к нулю при $r = (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty$. Записав граничные условия (2.1) в трансформантах Фурье и удовлетворяя им, найдем вид функций $A_j(\alpha, \beta)$ в (1.9) и получим

$$\begin{aligned}w^*(x, y, h) &= -\frac{1}{2\pi\theta} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} k\gamma h - \cos \omega\gamma h}{\operatorname{sh} k\gamma h + k\omega^{-1} \sin \omega\gamma h} \frac{Q(\alpha, \beta)}{\gamma} \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ \theta &= k/2l, \quad k = 2 \operatorname{Re}(a), \quad \omega = 2 \operatorname{Im}(a)\end{aligned}\quad (2.2)$$

где $Q(\alpha, \beta)$ — трансформанта Фурье функции $q(x, y)$.

Удовлетворяя теперь с помощью (2.2) граничным условиям контактной задачи

$$\begin{aligned}w^*(x, y, 0) &= 0, \quad \tau_{xz}^*(x, y, 0) = 0, \quad \tau_{yz}^*(x, y, 0) = 0 \\ \tau_{xz}^*(x, y, h) &= 0, \quad \tau_{yz}^*(x, y, h) = 0, \quad \sigma_z^*(x, y, h) = 0 \quad ((x, y) \in \Omega) \\ w^*(x, y, h) &= -f(x, y) = -[\delta + \alpha x + \beta y - g(x, y)] \quad ((x, y) \in \Omega) \\ \sigma_x^*, \dots &\rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)\end{aligned}\quad (2.3)$$

получим относительно неизвестного контактного давления $q(x, y)$ следующее интегральное уравнение:

$$\iint_{\Omega} q(\xi, \eta) K\left(\frac{R}{h}\right) d\xi d\eta = 2\pi h \theta f(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega)$$

$$K(t) = \int_0^{\infty} L(u) J_0(ut) du, \quad R = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}$$

$$L(u) = (\operatorname{ch} ku - \cos \omega u) / (\operatorname{sh} ku + k\omega^{-1} \sin \omega u) \quad (2.4)$$

Здесь $\delta + \alpha x + \beta y$ — жесткое перемещение штампа, $g(x, y)$ — функция, описывающая форму основания штампа, Ω — область контакта, $J_0(x)$ — функция Бесселя.

Интегральное уравнение (2.4) отличается от интегрального уравнения контактной задачи для линейно-упругого слоя только видом функции $L(u)$ и значением контактной жесткости θ . Нетрудно проверить, что анализ интегрального уравнения (2.4) можно провести на основе результатов, изложенных в [4].

Действительно, функция $L(u)$ вида (2.4) обладает всеми характерными свойствами функций $L(u)$, указанными в [4]; в частности, имеем

$$A = \lim_{z \rightarrow 0} L(z)/z = k^{-1}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} L(z) = 1 \quad (1 < k \leq 2) \quad (2.5)$$

Кроме того, здесь справедлива лемма 51.1 [4], во втором предложении которой только следует считать, что

$$0 \leq t < k \quad (t = R/h) \quad (2.6)$$

а также справедлива в точности и лемма 51.2 [4].

Введем в рассмотрение [4] два безразмерных параметра λ и μ , определяемых геометрией области контакта Ω и толщиной слоя h . Параметр λ определяется соотношением $\lambda = h/a$, $a = 1/2 \max_{\Omega} R$. Параметр μ в случае выпуклой области Ω определяется соотношением $\mu = h/\rho_{\min}$; ρ_{\min} — минимальный радиус кривизны контура L , очерчивающего область Ω . Параметр λ характеризует слой большой относительной толщины, а параметр μ — малой.

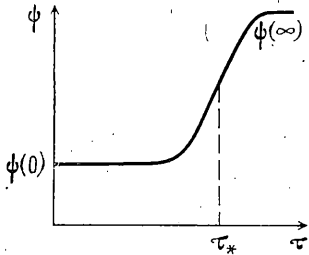
Из сказанного на основании [4] вытекают следующие результаты. При $\lambda \rightarrow \infty$ интегральное уравнение (2.4) переходит в интегральное уравнение соответствующей контактной задачи для преднапряженного нелинейно-упругого полупространства

$$\iint_{\Omega} q(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{R} = 2\pi \theta f(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega) \quad (2.7)$$

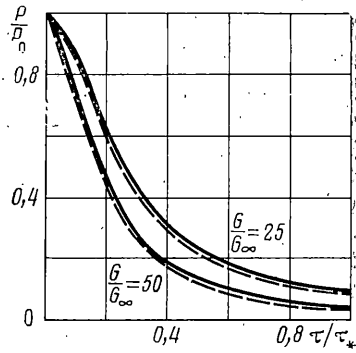
которое, в свою очередь, отличается от классического интегрального уравнения контактной задачи для линейно-упругого полупространства лишь значением контактной жесткости θ .

Решение интегрального уравнения (2.4) контактной задачи для слоя будет иметь при всех значениях безразмерных параметров λ и μ те же особенности, что и решение интегрального уравнения контактной задачи (2.7) для полупространства. Более того, можно заключить, что при достаточно больших λ и достаточно малых μ могут быть использованы асимптотические методы [4] приближенного решения интегрального уравнения (2.4).

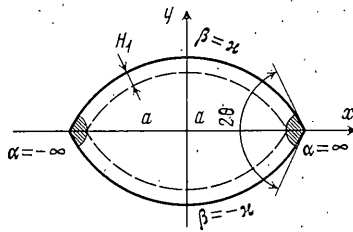
Остановимся на оценке границ применимости этих методов, поскольку все расчетные формулы из [4] переносятся на данный случай без изменений. Однако необходимо помнить, что величина A вида (2.5) и коэффициенты a_m , определяемые формулой (39.8) [4], будут зависеть от основ-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ного напряженно-деформированного состояния слоя. Учитывая (2.6) и определение параметра λ , получим $\lambda > 2k^{-1}$. Для нахождения соответствующей оценки при малых μ достаточно заметить, что первое соотношение (57.8) [4] в рассматриваемом случае будет иметь вид $1/2 k H_1 = 0,6$. Отсюда для вышуклого в плане штампа получим $\mu < 0,833k$.

В качестве примера рассмотрим плоский ($f(x, y) = \delta$) эллиптический в плане штамп с полуосями a и b . В этом случае между параметрами λ и μ существует следующая связь [4]:

$$\lambda = \mu(1 - e^2), \quad e = \sqrt{1 - b^2/a^2} \quad (2.8)$$

Пусть на диаграмме (τ, γ) , где τ — интенсивность девиатора напряжений, определяемая формулой (1.2), а γ — интенсивность девиатора деформаций, имеется участок линейного «упрочнения». Характерный вид функции $\psi(\tau)$, соответствующей этому условию, изображен на фиг. 1. Качественно такую кривую можно представить соотношением

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2G} \frac{1 + 1/3(G/G_\infty)(\tau/\tau_*)^2}{1 + 1/3(\tau/\tau_*)^2} \quad (2.9)$$

Здесь τ_* выбрано так, чтобы $\psi''(\tau_*) = 0$; $G = [2\psi(0)]^{-1}$ и $G_\infty = [2\psi(\infty)]^{-1}$ — соответственно модули сдвига при $\tau = 0$ и $\tau \rightarrow \infty$.

На фиг. 2 изображены кривые зависимости относительной величины вдавливающей силы P/P_0 ($P_0 = P(0)$) от величины отношения τ/τ_* при функции $\psi(\tau)$ вида (2.9). Расчеты проводились по формулам (53.12) и (57.21) [4] соответственно для значений $\lambda = 2$ и $\mu = 0$, (6) ($\lambda = 0,5$); эксцентриситет $e = 0,5$. Верхняя пара кривых отвечает отношению $G/G_\infty = 25$, нижняя — $G/G_\infty = 50$; сплошные линии соответствуют параметру λ , штриховые — параметру μ . Видно, что с увеличением степени преднапряжения (сжатия или растяжения) при постоянном внедрении штампа δ вдавливающая сила P уменьшается, а предельное значение P/P_0 при $\tau \rightarrow \infty$ равно G_∞/G .

3. Отметим, что с точки зрения формы «целиков» горных выработок можно рассмотреть задачу для эллиптической в плане области контакта Ω представляет интерес изучение случая «чечевицеобразной» в плане области Ω (фиг. 3). При малых μ исследование этого случая не вызывает особых затруднений. Нужно только «сплечь» решение в основной (незаштрихованной) части области Ω , которое находится (для плоского штампа) согласно формулам (57.5), (57.9) [4], с решениями в заштрихованных частях (фиг. 3), которые находятся как решения задач о вдавливании в преднапряженное упругое полупространство клиновидного в плане штампа с углом при вершине 2θ [5, 6]. При больших λ решение задачи для случая чечевицеобразной в плане области Ω может быть найдено в форме (53.6) [4], лишь только будет построено для данной области Ω решение интегрального уравнения (2.7). На последнем остановимся подробнее, поскольку нахождение такого решения представляет самостоятельный интерес.

Введем в рассмотрение биполярную систему координат соотношениями [7]:

$$x = a \operatorname{sh} \alpha / (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta), \quad y = a \sin \beta / (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \quad (3.1)$$

и запишем в этой системе координат интегральное уравнение (2.7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\gamma, \delta) d\delta}{\sqrt{\sin^2 \frac{1}{2}(\delta - \beta) + \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)}} = L\pi F(\alpha, \beta) \quad (|\beta| \leq \kappa, |\alpha| < \infty) \quad (3.2)$$

$$Q(\gamma, \delta) = \theta^{-1} q(\gamma, \delta) g^{3/2}, \quad F(\alpha, \beta) = a^{-1} \sqrt{h} f(\alpha, \beta), \\ g = (\operatorname{ch} \gamma + \cos \delta)^{-1}, \quad h = (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^{-1}$$

Представим ядро уравнения (3.2) и функцию $F(\alpha, \beta)$ в форме интегралов Фурье

$$\frac{1}{4\sqrt{\sin^2 \frac{1}{2}t + \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2}u}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_s(t) e^{-isu} ds, \quad F(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_s(\beta) e^{-i\alpha s} ds \quad (3.3)$$

и введем в рассмотрение трансформанту Фурье функции $Q(\gamma, \delta)$:

$$Q_s(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\gamma, \delta) e^{is\gamma} d\gamma \quad (3.4)$$

Подставляя выражения (3.3), (3.4) в уравнение (3.2) и преобразуя его, придем к одномерному интегральному уравнению относительно функции $Q_s(\delta)$ ($P_s(x)$ и $Q_s(x)$ — функции Лежандра [7]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_s(\delta) K_s(\delta - \beta) d\delta = \pi F_s(\beta) \quad (|\beta| \leq \kappa) \quad (3.5)$$

$$K_s(t) = \int_0^{\infty} \frac{\cos us du}{\sqrt{2(\operatorname{ch} u - \cos t)}} = \frac{\pi}{2 \operatorname{ch} \pi s} P_{-\frac{1}{2}+is}(-\cos t) = \\ = \frac{1}{2} [Q_{-\frac{1}{2}+is}(\cos t) + Q_{-\frac{1}{2}-is}(\cos t)] \quad (3.6)$$

Из формулы (3.6) видно, что ядро $K_s(t)$ является по t периодической функцией (период 2π) и совпадает с ядром интегрального уравнения контактной задачи для клиновидного в плане штампа [6]. Такое совпаде-

ние не является случайным, ибо задача Дирихле для пространства с плоским чечевицеобразным разрезом (интегральное уравнение (2.7) эквивалентно [8] этой задаче) с помощью преобразования инверсии Кельвина может быть приведена [8] к задаче Дирихле для пространства с плоским клинообразным разрезом.

При малых значениях t ядро $K_s(t)$ вида (3.6) может быть представлено в форме разложения

$$K_s(t) = \ln|t| \sum_{i=0}^{\infty} b_i(s) t^{2i} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i(s) t^{2i} \quad (b_0 = -1)$$

Поэтому асимптотическое решение уравнения (3.5) при малых значениях κ может быть построено по схеме [9]. Ядро $K_s(t)$ может быть также разложено в ряд Фурье ($\Gamma(z)$ — гамма-функция):

$$K_s(t) = 1/2 a_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) \cos nt$$

$$a_n(s) = \frac{\Gamma(1/2n + 1/4 - 1/2is) \Gamma(1/2n + 1/4 + 1/2is)}{\Gamma(1/2n + 3/4 - 1/2is) \Gamma(1/2n + 3/4 + 1/2is)}$$

Здесь величина $a_n(s)$ является мероморфной функцией от n , поэтому асимптотическое решение уравнения (3.5) при малых значениях $\kappa - 2$ может быть построено по схеме [10].

После нахождения функции $Q_s(\delta)$ из уравнения (3.5), обращая по Фурье (3.4), определим $Q(\gamma, \delta)$. Выражение для силы, действующей на чечевицеобразный в плане штамп, может быть получено по формуле

$$P = \frac{a^2 \theta}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\kappa}^{\kappa} Q_s(\delta) P_{-\nu+is}(\cos \delta) (\operatorname{ch} \pi s)^{-1} ds$$

Авторы благодарны Н. Х. Арутюняну за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Толоконников Л. А. Механика деформируемого твердого тела. М.: Высш. школа, 1979. 318 с.
2. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 270 с.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
4. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
5. Рвачев В. Л. О давлении на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму клина. — ПММ, 1959, т. 23, вып. 1, с. 169—171.
6. Александров В. М., Бабешко В. А. О давлении на упругое полупространство штампа клиновидной формы в плане. — ПММ, 1972, т. 36, вып. 1, с. 88—93.
7. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.—Л.: Физматгиз, 1963. 358 с.
8. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
9. Александров В. М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство. — Инж. ж. МТТ, 1967, № 4, с. 108—116.
10. Бабешко В. А. Периодические уравнения свертки и свойства их решений. — Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 1, с. 52—54.

Москва

Поступила в редакцию
28.VII.1983