МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1984

УДК 539.3

# О ВАРИАЦИОННЫХ ПОСТАНОВКАХ ЗАДАЧИ СИНЬОРИНИ С ТРЕНИЕМ

ВОВКУШЕВСКИЙ А. В.

Вариационная постановка в перемещениях задачи теории упругости с односторонними связями на границе при наличии трения Кулона между контактирующими поверхностями (задача Синьорини с трением) рассматривалась в [1, 2]. Такая задача формулируется в виде вариационного неравенства, но не может быть сведена к задаче минимизации функционала энергии. В [2] рассмотрен итерационный процесс для решения этой задачи.

В публикуемой статье приводится постановка задачи Синьорини с трением в напряжениях (типа Кастильяно), на основе этой постановки формулируется другой итерационный процесс решения, рассматривается регуляризация исходной задачи и доказывается достаточное условие единственности решения регуляризованной задачи.

1. Рассмотрим следующую задачу:

$$\sigma_{ij,j}+f_i=0,\quad \sigma_{ij}=a_{ijkh}\varepsilon_{kh},\quad \varepsilon_{kh}={}^1/_2(u_{k,h}+u_{h,k})\quad \text{в}\quad \Omega \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij}n_j=F_i\quad \text{на}\quad S_\sigma,\qquad u_i=U_i\quad \text{на}\quad S_u \tag{1.2}$$

$$u_n\leqslant\delta_n,\quad \sigma_n\leqslant 0,\quad (u_n-\delta_n)\sigma_n=0\quad \text{на}\quad S_c \tag{1.3}$$

$$|\sigma_\tau|\leqslant -f\sigma_n\quad \text{на}\quad S_c \tag{1.4}$$

$$\sigma_\tau u_\tau\leqslant 0,\quad (|\sigma_\tau|+f\sigma_n)u_\tau=0\quad \text{на}\quad S_c \tag{1.5}$$

$$u_n=u_in_i,\quad u_\tau=u_i\tau_i,\quad \sigma_n=\sigma_{ni}n_i,\quad \sigma_\tau=\sigma_{ni}\tau_i,\quad \sigma_{ni}=\sigma_{ij}n_j$$

где $u_i$ — компоненты перемещений, $\sigma_{ij}$ — напряжений, $\varepsilon_{ij}$ — деформаций, $n_i$, $\tau_i$ — нормали и касательной к границе $S=S_\sigma\cup S_u\cup S_c$ двумерной области $\Omega$, $\delta_n$ — начальный зазор, $f\geqslant 0$ — коэффициент трения; запятая в нижних индексах означает дифференцирование по координатам, а по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2.

Считаем, что $a_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh}\geqslant\alpha_1\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$, $\alpha_1>0$, $a_{ijkh}=a_{ijhk}=a_{khij}$. Группа условий (1.3) описывает действие односторонних связей по направлению нормали, (1.4) — условие трения Кулона. Поясним (1.5). Можно показать, что с учетом (1.4) условия (1.5) эквивалентны при $\sigma_n<0$ следующим двум условиям ($\lambda\leqslant 0$):

$$\text{если}\ |\sigma_\tau|<-f\sigma_n,\ \text{то}\ u_\tau=0;\qquad \text{если}\ |\sigma_\tau|=-f\sigma_n,\ \text{то}\ u_\tau=\lambda\sigma_\tau \tag{1.6}$$

При $\sigma_n=0$ условия (1.5) удовлетворяются при любых значениях $u_\tau$, следовательно, в этом случае выполнения условий (1.6) не требуется.

Условия трения вида (1.6) на участках контакта поверхностей рассматривались в [1—4]. Известно, что такие условия получаются из имеющих ясный физический смысл условий в скоростях $\dot{u}_\tau$ при некоторых предположениях относительно процесса приложения нагрузки, например когда $f_i$, $F_i$, $U_i$ и $\delta_n$ возрастают пропорционально времени.

Отметим, что $\sigma_n$ заранее неизвестны и определяются в ходе решения задачи. Это обстоятельство приводит к коренным отличиям в свойствах и методах решения рассматриваемой задачи от задач с заданными напряжениями $\sigma_n$ [1, 5, 6].

Построим для задачи (1.1)–(1.5) соответствующую вариационную задачу в напряжениях. Как обычно [1], при выводе вариационной постановки предполагается, что все операции имеют смысл и требуемые производные существуют. В дальнейшем, при использовании вариационной постановки, излишние требования могут быть сняты. Введем множество статически возможных напряжений

$$K=\{\boldsymbol{\tau}\,|\,\tau_{ij}=\tau_{ji}\in L^2(\Omega),\ \ \tau_{ij,\,j}+f_i=0 \text{ в } \Omega,$$
$$\tau_{ni}=F_i \text{ на } S_\sigma,\ \ \tau_n\leqslant 0,\ \ |\tau_\tau|\leqslant -f\tau_n \text{ на } S_c\} \tag{1.7}$$
$$\tau_{ni}=\tau_{ij}n_j,\qquad \tau_n=\tau_{ni}n_i,\qquad \tau_\tau=\tau_{ni}\tau_i$$

Докажем, что если $\boldsymbol{\sigma}$ удовлетворяет (1.1)–(1.5) (при соответствующем $\mathbf{u}$), то при любом $\boldsymbol{\tau}\in K$ выполняется вариационное неравенство

$$A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\sigma})-\int\limits_{S_u}U_i(\tau_{ni}-\sigma_{ni})\,dS-\int\limits_{S_c}(\delta_n+f|u_\tau|)(\tau_n-\sigma_n)\,dS\geqslant 0$$
$$A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau})=\int\limits_{\Omega}A_{ijkh}\sigma_{kh}\tau_{ij}\,d\Omega \tag{1.8}$$

где $A_{ijkh}$ – коэффициенты обратного закона упругости, $A_{ijkh}\sigma_{kh}\sigma_{ij}\geqslant\alpha_2\sigma_{ij}\sigma_{ij}$, $\alpha_2>0$.

Действительно, из (1.1) можно получить [1]

$$A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\sigma})=\int\limits_{S}u_i(\tau_{ni}-\sigma_{ni})\,dS. \tag{1.9}$$

Далее, учитывая (1.2) и добавляя в обе части (1.9) одинаковые члены, имеем

$$A(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\sigma})-\int\limits_{S_u}U_i(\tau_{ni}-\sigma_{ni})\,dS-\int\limits_{S_c}(\delta_n+f|u_\tau|)(\tau_n-\sigma_n)\,dS=$$
$$=\int\limits_{S_c}[u_i(\tau_{ni}-\sigma_{ni})-(\delta_n+f|u_\tau|)(\tau_n-\sigma_n)]\,dS. \tag{1.10}$$

Покажем, что подынтегральная функция в правой части (1.10) неотрицательна

$$\psi=u_i(\tau_{ni}-\sigma_{ni})-(\delta_n+f|u_\tau|)(\tau_n-\sigma_n)=(u_n-\delta_n)(\tau_n-\sigma_n)+$$
$$+|u_\tau|(\tau_\tau\operatorname{sign}u_\tau-f\tau_n)-|u_\tau|(\sigma_\tau\operatorname{sign}u_\tau-f\sigma_n) \tag{1.11}$$

Первое слагаемое в (1.11) неотрицательно вследствие (1.3) и (1.7), второе – вследствие (1.7), третье равно нулю вследствие (1.5), так как при $u_\tau\neq 0$ выполняется $\sigma_\tau\operatorname{sign}u_\tau=-|\sigma_\tau|$. Таким образом, $\psi\geqslant 0$ и (1.8) справедливо.

Для вариационного неравенства (1.8) не существует эквивалентной формулировки в виде принципа минимума энергии.

2. Решение вариационного неравенства (1.8) будем искать с помощью последовательности задач

$$A(\boldsymbol{\sigma}^t,\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\sigma}^t)-\int\limits_{S_u}U_i(\tau_{ni}-\sigma_{ni}^t)\,dS-\int\limits_{S_c}(\delta_n+f|u_\tau^{t-1}|)(\tau_n-\sigma_n^t)\,dS\geqslant 0 \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{\sigma}^t\in K$, $\boldsymbol{\tau}\in K$, $\boldsymbol{\tau}$ – любое, $t=1, 2, \ldots$; при $t=1$ имеем $u_\tau^0=0$.

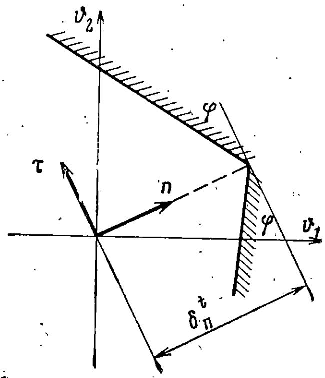
Вариационному неравенству (2.1) эквивалентна задача минимизации

$$J(\sigma^t)\to\inf \quad (\sigma^t\in K) \tag{2.2}$$

$$J(\sigma^t)=\frac{1}{2}A(\sigma^t,\sigma^t)-\int\limits_{S_u} U_i\sigma_{ni}{}^t\,dS-\int\limits_{S_c}\delta_n{}^t\sigma_n{}^t\,dS \tag{2.3}$$

где $\delta_n{}^t=\delta_n+f|u_\tau{}^{t-1}|$.

Множество $K$ выпуклое и замкнутое, функционал (2.3) — строго выпуклый и коэрцитивный [1]. Предположим, что $K$ не пусто (это выполняется, например, если граница $S_u$ невырождена), тогда точка минимума (2.3) на $K$ существует и единственна. Постановка (2.2) похожа на постановки в форме принципа Кастильяно задач с идеальными односторонними связями, рассмотренные в [1, 7]. Однако отличие в задании множества $K$, не нарушая идеальности связей, приводит к отличию в естественных граничных условиях на $S_c$.




Можно показать (аналогично п. 1), что задаче (2.2) соответствует постановка (1.1)—(1.5), где вместо (1.3) выполняются условия

$$u_n{}^t+f|u_\tau{}^t|\leqslant\delta_n+f|u_\tau^{t-1}|,\qquad \sigma_n{}^t\leqslant 0$$

$$[u_n{}^t-\delta_n+f(|u_\tau{}^t|-|u_\tau^{t-1}|)]\sigma_n{}^t=0 \tag{2.4}$$

Видно, что если последовательность $\mathbf{u}^t$ сходится, то (2.4) в пределе переходят в (1.3). Задачи такого рода рассматривались в [4, 8], где они были поставлены в форме принципа Лагранжа

$$I(\mathbf{u}^t)\to\inf \qquad (\mathbf{u}^t\in W) \tag{2.5}$$

$$I(\mathbf{u}^t)=\frac{1}{2}a(\mathbf{u}^t,\mathbf{u}^t)-\int\limits_{\Omega} f_iu_i{}^t\,d\Omega-\int\limits_{S_\sigma}F_iu_i{}^t\,dS \tag{2.6}$$

$$W=\{\mathbf{v}\,|\,v_i\in H^1(\Omega),\ v_i=U_i \text{ на } S_u,\ v_n+f|v_\tau|\leqslant\delta_n{}^t \text{ на } S_c\} \tag{2.7}$$

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int\limits_{\Omega} a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(\mathbf{u})\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\,d\Omega$$

Здесь $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева [1].

Условие на $S_c$ в (2.7) задает на плоскости $v_1$, $v_2$ выпуклое множество, представленное на фигуре, где $\varphi=\operatorname{arctg} f$. Постановка (2.2) — двойственная по отношению к (2.5). Таким образом, последовательность задач (2.2) эквивалентна последовательности задач (2.5), предложенной ранее в [8].

Эффективность изложенного метода опробована численно на примере реальной строительной конструкции (типа подпорной стенки). Задачи (2.5) при $f=1$ решались методом конечных элементов по программе [9]. Сходимость последовательности $\mathbf{u}^t$ оказалась хорошей. Уже при $t=6$ погрешности выполнения кинематического условия в (1.3) составили около 0,2% от характерного перемещения, а при $t=11$ — всего 0,006%. Результаты расчетов приведены в [4, 10].

3. Решение задач с трением, описываемым условиями (1.4), (1.5), в некоторых случаях может быть неединственным [4]. Для исследования этого вопроса удобнее обратиться к постановке в форме Лагранжа.

Аналогично [1] можно показать, что решение $\mathbf{u}$ задачи (1.1)—(1.5) удовлетворяет при любом $\mathbf{v}\in W_1$ следующему вариационному неравенству:

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u})-\int_{\Omega} f_i(v_i-u_i)\,d\Omega-\int_{S_\sigma} F_i(v_i-u_i)\,dS-$$
$$-\int_{S_c} f\sigma_n(\mathbf{u})(|v_\tau|-|u_\tau|)\,dS\geqslant 0 \tag{3.1}$$

$$W_1=\{\mathbf{v}\,|\,v_i\in H^1(\Omega),\quad v_i=U_i \ \text{на}\ S_u,\quad v_n\leqslant\delta_n\ \text{на}\ S_c\}$$

Справедливо и обратное утверждение: если $\mathbf{u}\in W_1$ удовлетворяет неравенству (3.1) при любом $\mathbf{v}\in W_1$, то $\mathbf{u}$ является решением задачи (1.1) — (1.5). Для (3.1), так же как и для (1.8), не существует эквивалентной постановки в форме принципа минимума функционала энергии.

Видоизменим (3.1), добавив в левую часть регуляризирующий член [1]

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u})-\int_{\Omega} f_i(v_i-u_i)\,d\Omega-\int_{S_\sigma} F_i(v_i-u_i)\,dS-$$
$$-\int_{S_c} f\sigma_n(\mathbf{u})(|v_\tau|-|u_\tau|)\,dS+\gamma\int_{S_c}\sigma_n(\mathbf{u})\sigma_n(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dS\geqslant 0 \tag{3.2}$$

где $\gamma>0$ — параметр регуляризации.

Пусть существуют два решения (3.2): $\mathbf{u}^1$ и $\mathbf{u}^2$. Полагая в (3.2) $\mathbf{u}=\mathbf{u}^1$, $\mathbf{v}=\mathbf{u}^2$, а затем $\mathbf{u}=\mathbf{u}^2$, $\mathbf{v}=\mathbf{u}^1$ и складывая полученные выражения, придем к неравенству

$$a(\mathbf{u}^2-\mathbf{u}^1,\mathbf{u}^2-\mathbf{u}^1)+\gamma\int_{S_c}[\sigma_n(\mathbf{u}^2-\mathbf{u}^1)]^2\,dS-$$
$$-\int_{S_c} f\sigma_n(\mathbf{u}^2-\mathbf{u}^1)(|u_\tau^2|-|u_\tau^1|)\,dS\leqslant 0 \tag{3.3}$$

Обозначим $\mathbf{u}^2-\mathbf{u}^1=\mathbf{w}$, норму $\mathbf{u}$ в $H^1(\Omega)$ через $\|\mathbf{u}\|_\Omega$, а норму $\sigma_n$ в $L^2(S_c)$ через $\|\sigma_n\|_S$. Пусть граница $S_u$ невырождена, тогда $a(\mathbf{w},\mathbf{w})\geqslant\alpha\|\mathbf{w}\|_\Omega^2$, $\alpha>0$. Последний член в (3.3) оценим с помощью неравенства Коши — Буняковского и теоремы о следах [11]

$$\int_{S_c} f\sigma_n(\mathbf{w})(|u_\tau^2|-|u_\tau^1|)\,dS\leqslant f_0\|\sigma_n(\mathbf{w})\|_S\|\,|u_\tau^2|-|u_\tau^1|\,\|_S\leqslant$$
$$\leqslant f_0\|\sigma_n(\mathbf{w})\|_S\|w_\tau\|_S\leqslant f_0C\|\sigma_n(\mathbf{w})\|_S\|\mathbf{w}\|_\Omega \tag{3.4}$$

где $f_0\geqslant f$, $C>0$, $f_0$ и $C$ — константы.

Тогда из (3.3) и (3.4) получим

$$\alpha\|\mathbf{w}\|_\Omega^2+\gamma\|\sigma_n(\mathbf{w})\|_S^2-f_0C\|\sigma_n(\mathbf{w})\|_S\|\mathbf{w}\|_\Omega\leqslant 0 \tag{3.5}$$

Поскольку $\mathbf{u}^2\neq\mathbf{u}^1$, то $\|\mathbf{w}\|_\Omega>0$ и (3.5) можно представить следующим образом:

$$g(r)=\gamma r^2-f_0Cr+\alpha\leqslant 0,\qquad r=\|\sigma_n(\mathbf{w})\|_S/\|\mathbf{w}\|_\Omega \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что $\min g(r)\leqslant 0$ $(0\leqslant r<\infty)$, откуда получим $f_0\geqslant f_*=2\sqrt{\alpha\gamma}/C$. Это неравенство является необходимым условием наличия двух решений. Очевидно, достаточным условием единственности решения является $f_0<f_*$.

В [4] приведен пример простой упругой системы с положительно-определенной матрицей жесткости (при двух степенях свободы), в котором ре-

[1] На возможность регуляризации такого типа указал В. Г. Мазья.

шение единственно только при $0 \leqslant f < f_*$, где $f_*$ — некоторое критическое значение коэффициента трения, а при $f \geqslant f_*$ существуют неединственные решения. В этом примере $f_*$ зависит только от свойств упругой системы, в то время как полученная для задачи упругости оценка $f_*$ содержит параметр регуляризации $\gamma$. Рассмотрим принципиальную возможность получения единственности решения при малом трении в исходной задаче (без регуляризации).

Можно показать, что подобного типа регуляризация имеет физический смысл и соответствует включению между контактирующими поверхностями упругой прослойки, деформируемой в направлении нормали к $S_c$. При этом вместо условий (1.3) для решения регуляризованной задачи выполняются условия

$$u_n + \gamma\sigma_n \leqslant \delta_n, \quad \sigma_n \leqslant 0, \quad (u_n + \gamma\sigma_n - \delta_n)\sigma_n = 0 \tag{3.7}$$

и на участках контакта поверхностей справедливо равенство $\gamma\sigma_n = \delta_n - u_n$, т. е. величины $\sigma_n$ непосредственно контролируются величинами $u_n$.

В исходной задаче такой связи между $\sigma_n$ и $u_n$ нет, и оказывается, что доказать единственность решения при малом трении можно только при введении некоторых дополнительных требований, например ограниченности $|\sigma_n|$ некоторой константой.

Следовательно, для получения единственности решения при малом трении в исходной задаче надо добиться сужения класса функций, которому принадлежит решение. Можно предположить, что требуемый результат имеет место при достаточно гладком задании условий на $S_c$, но строго доказать это затруднительно. Отметим, что в конечномерном случае (при численном решении задачи) имеется единственность решения при малом трении.

Доказательство сходимости последовательности решений вспомогательных задач п. 2 в конечном итоге сводится к оценкам такого же типа, что и при доказательстве единственности решения. В частности, можно доказать, что для регуляризованной задачи последовательность решений вспомогательных задач, построенная по типу п. 2, сходится при $f_0 < f_*$. Тем самым решается и вопрос существования решения регуляризованной задачи.

В случае произвольного процесса приложения нагрузки задачу Синьорини с трением необходимо решать шаговым методом с учетом последовательности загружения [2, 10]. При этом задачу на каждом шаге можно сформулировать так, что ее отличия от (1.1)—(1.5) не будут принципиальными. Например, если формулировать задачу в приращениях всех величин, то в условиях (1.3)—(1.5) должно быть учтено состояние односторонних связей, достигнутое в течение предыдущих шагов. Это приводит к изменению зазоров и возникновению некоторых поверхностных нагрузок на $S_c$ [10], учет которых, однако, не препятствует осуществлению выкладок, аналогичных приведенным выше.

Следовательно, в случае пошагового учета последовательности загружения изложенные результаты полностью переносятся на задачи, решаемые на каждом шаге процесса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. *Кравчук А. С.* К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 123—129.
3. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
4. *Вовкушевский А. В., Шойхет Б. А.* Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов. М.: Энергоиздат, 1981. 136 с.
5. *Кравчук А. С.* Метод двойственности в задаче теории упругости с условием типа трения на границе.— Напряженно-деформированное состояние конструкций из

упругих и вязкоупругих материалов: Сб. статей. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1977, с. 31—40.

6. *Спектор А. А.* Вариационный метод исследования контактных задач с проскальзыванием и сцеплением.— Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 1, с. 39—42.
7. *Розин Л. А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
8. *Вовкушевский А. В.* О решении контактных задач с трением.— Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехн., 1980, т. 136, с. 9—12.
9. *Вовкушевский А. В., Зейлигер В. А.* Программа решения задачи упругости с односторонними связями и уравнения Пуассона методом конечных элементов для ЭВМ БЭСМ-6. Л., Всес. н.-и. ин-т гидротехн., 1980. 127 с.
10. *Вовкушевский А. В.* Статический расчет подпорной стенки с учетом трения между поверхностями контактного шва.— Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехн., 1981, т. 151, с. 43—48.
11. *Вольперт А. И., Худяев С. И.* Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М.: Наука, 1975. 394 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
23.III.1983